第50卷 第1期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 1
2011年 1月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2011

# 具有脉冲投放益虫生物控制害虫的捕食 - 食饵模型*

程惠东
（山东科技大学理学院，山东 青岛 266510）

**摘　要**：讨论了具有阶段结脉冲时滞 HollingII 功能反应的捕食模型，其中天敌（益虫）进行人工脉冲周期投放，害虫具有阶段结构及成熟期的时滞现象，并进行了系统的数学及生物方面的研究。首先利用离散动力系统的频闪映射得到了害虫根除周期解的存在性，并且利用脉冲及时滞微分方程的基本知识证明了该害虫根除周期解的唯一性和全局吸引性。进一步证明了当天敌的投放量或者投放周期在一定的范围内，能够控制害虫在作物的经济危害水平（EIL）运行的情况下使天敌与害虫可以共存。得出的结论为害虫的生物治理提供了策略基础。

**关键词**：脉冲；阶段结构捕食模型；时滞；全局吸引性；害虫管理
**中图分类号**：O175.14　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 - 6579（2011）01 - 0023 - 05

# Stage Structured Predator-prey Model with Impulsive Perturbations on Beneficial Insect and Delay

*CHENG Huidong*
（College of Science, Shandong University of Science and Technology, Qingdao 266510, China）

**Abstract**: Predator-prey model of a stage structured impulse delay HollingII functional response, in which predator (natural enemy) is released impulsively and the prey has stage structured and maturation time delay are discussed, and a systematic mathematical and ecological study are performed. Using the discrete dynamical system determined by the stroboscopic map, we obtain the existence of pest-eradication periodic solution. And show that the pest-eradication periodic solution is unique and globally attractive by using the basis of impulse and delay differential equation. Further, we prove that if the pulse releasing rate or impulsive period for natural enemy is within an appropriate range, the pest population can be controlled under the economic injury level (EIL) E, that is, the pest population and the natural enemy population may coexist. The results provide reliable tactical basis for the practical pest management.

**Key words**: impulse; stage structured predator-prey model; time delays; global attractivity; pest management

在自然界生物系统中，有关害虫的科学有效的治理一直是人们研究的问题，人们试图利用喷洒杀虫剂作为控制害虫的数量，这会造成环境污染，也对天敌益虫及人类造成伤害，经常会因为害虫的变异及适应性的增强而使得杀虫剂失效，这样显然不利于人们的长远发展，也不经济；而利用人工培养或从外地迁入天敌的方法，即定期进行天敌投放，以达到控制害虫的目的，这样可以避免环境污染给人类带来的损失。因此很多学者对生物控制进行了大量的研究与讨论[1-8]，这些研究大多是在彻底根除害虫的情况下，而引入大量的天敌[4-8]，但是从生态平衡和经济方面考虑，根除害虫是不太可能，

* 收稿日期：2010 - 01 - 11
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10872118）
作者简介：程惠东（1964年生），女，副教授；E-mail：chd900517@sdust.edu.cn

也不科学的；我们希望天敌最小的投放量，最长的投放周期，使害虫种群与益虫种群持续生存，故本文致力于害虫生物治理的研究。

# 1 模型及预备知识

许多作者对捕食－食饵系统的研究已做了很多工作并且得到了很好的结果[2-5]。近年来，阶段结构模型也越来越受到关注，许多文献对阶段结构单种群模型进行数学分析[6-9]，最近，Weng 等[9]考虑了下面的捕食－ 食饵模型

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)(a - bx(t-\tau_1)) - \beta x(t)y_2(t) \\ \dot{y}_1(t) = x(t-\tau_1)y_2(t-\tau_1) - (D+d_1)y_1(t) \\ \dot{y}_2(t) = Dy_1(t) - d_2y_2(t) \end{cases}$$

其中，$x(t),y_1(t),y_2(t)$ 分别表示食饵、幼年和成年捕食者种群的密度，其具体的生物学意义可参见文献［9］，但是这个模型没有考虑到捕食者幼体的成长期和功能反应情况。

由于害虫的出生率、死亡率等生存指数几乎总是与年龄、种群的大小或发展阶段有关，幼虫大多生活的庇护所里，我们进行的管理策略几乎不起作用，我们还注意到，幼年不具有生育能力，从幼年到成年的成熟期作为一个常数时滞。由此害虫的阶段结构、时滞以及人类周期性的干扰等生物现象是经常发生的。近几年脉冲微分方程在生物模型中的应用正在兴起[5-9]，而且时滞微分方程在生物模型中也有广泛的应用[10-11]，但是脉冲时滞微分方程在种群动力学上的应用不太常见中，由此，我们引入如下具有阶段结构脉冲时滞的 HollingII 功能反应的捕食模型

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dot{x}_j(t) = rx(t) - \gamma x_j(t) - re^{-\gamma\tau}x(t-\tau) \\ \dot{x}(t) = re^{-\gamma\tau}x(t-\tau) - cx^2(t) - \dfrac{\beta x(t)y(t)}{1+\alpha y(t)} \\ \dot{y}(t) = y(t)\left(-d + \dfrac{\lambda\beta x(t)}{1+\alpha y(t)}\right) \end{array}\right\} \\ \qquad t \neq nT, n \in \mathbb{N}, \\ \left.\begin{array}{l} x_j(t^+) = x_j(t) \\ x(t^+) = x_j(t) \\ y(t^+) = y(t) + u \end{array}\right\} \quad t = nT, n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{1}$$

这里 $x_j(t),x(t)$ 分别表示幼年、成年害虫种群的密度，$r>0$ 成年害虫的出生率，$\gamma>0,c>0$ 分别表示幼年、成年害虫种群的死亡率，$\tau$ 时期从出生到长成成年的时间，$re^{-\gamma\tau}x(t-\tau)$ 表示幼年害虫在 $t-\tau$ 时刻的出生数（即 $rx(t-\tau)$）到 $t$ 时刻除去死亡以后的剩余数，表示幼年到成年的转化数；$u>0$ 表示天敌的释放量，$d>0$ 表示天敌的死亡率，$\beta>0$ 表示天敌的捕食率，$\lambda>0$ 表示被捕食的食饵向捕食者的转化率，$\alpha>0$ 反映的是同种群生物之间相互干扰的大小程度[8-9]。$y(nT^+) = \lim_{t\to nT^+}y(t)$，$y(nT) = \lim_{t\to nT^-}y(t)$，$x(t),x_j(t)$ 对 $t>0$ 都是连续的，具体细节请参阅文献［9－10］。

因为幼虫不具有危害性或者危害性较小，并且不具有出生率，所以控制害虫主要是指对成虫的控制。注意到系统（1）的第二第三个方程中不显含变量 $x_j(t)$，因此只需研究下面系统（1）的子系统

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dot{x}(t) = re^{-\gamma\tau}x(t-\tau) - cx^2(t) - \dfrac{\beta x(t)y(t)}{1+\alpha y(t)} \\ \dot{y}(t) = y(t)\left(-d + \dfrac{\lambda\beta x(t)}{1+\alpha y(t)}\right) \end{array}\right\} \\ \qquad t \neq nT, n \in \mathbb{N}, \\ \left.\begin{array}{l} x(t^+) = x_j(t) \\ y(t^+) = y(t) + u \end{array}\right\} \quad t = nT, n \in \mathbb{N} \end{cases} \tag{2}$$

从生物意义出发，只在区域 $D = \{(x,y) \mid x,y>0\}$ 上考虑系统（2）的动力学行为，于是系统（2）满足初始条件

$$(\varphi_1(s),\varphi_2(s)) \in C_+ = C([-\tau,0],\mathbb{R}_+^2),\varphi_i(0)>0, i=1,2 \tag{3}$$

**引理 1**[3] 时滞微分方程 $\dot{x}(t) = ax(t-\tau) - bx(t) - cx^2(t)$，这里 $a,b,c,\tau$ 都是正的常数且当 $t \in [-\tau,0], x(t)>0$。

（i）若 $a<b$，则 $\lim_{t\to\infty}x(t) = 0$，

（ii）若 $a>b$，则 $\lim_{t\to\infty}x(t) = \dfrac{a-b}{c}$。

**引理 2**[4] 当 $t$ 足够大时，系统（1）的任意解 $(x_j(t),x(t),y(t))$，都有 $x_j(t),x(t),y(t) \leqslant L$，这里 $L = \dfrac{\lambda(r+d_m)^2}{4cd_m} + \dfrac{u\exp(d_mT)}{\exp(d_mT)-1}$，以及 $d_m = \min\{\gamma,d\}$。

# 2 “害虫根除”周期解的全局吸引性

## 2.1 “根除害虫”周期解的存在性

假设害虫（食饵）从捕食系统中完全消失，即害虫根除，须有 $x(t)=0,t>0$。在此条件下，我们表明与周期脉冲投放天地同步，天敌（捕食者）种群出现相同周期的震荡。

在害虫根除的条件下，首先要了解天敌（捕食者）在 $nT < t \leqslant (n+1)T$ 内的生长情况，需研究下面的系统

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = -dt, t \neq nT, n \in \mathbb{N} \\ y(t^+) = y(t) + u, t = nT, n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad (5)$$

在任何两次脉冲时间间隔内对微分方程（5）进行积分求得

$$y(t) = y(nT)e^{-d(t-nT)},\ nT < t \leqslant (n+1)T$$

这里 $y(nT)$ 是天敌在 $nT$ 时刻的初始值，对于系统（5）第二个方程。依据离散动力系统的频闪映射得

$$y((n+1)T) = y(nT)e^{-dT} + u = f(y(nT)) \quad (6)$$

这里，$f(y) = ye^{-dT} + u$，易知系统（6）有唯一的一个正平衡点 $y^* = \dfrac{u}{1 - e^{-dT}}$。因为 $f(y)$ 关于 $y$ 是一条斜率小于 1 的直线，所以 $y^*$ 是全局渐进稳定的，这说明系统（5）的相关的周期解是全局渐进稳定的。

于是有

$$\begin{cases} y^*(t) = \dfrac{ue^{-d(t-nT)}}{1 - e^{-dT}}, t \in (nT, (n+1)T] \\ y(nT^+) = y^*(0) = \dfrac{u}{1 - e^{-dT}} \end{cases}$$

系统（5）有唯一的一个全局渐进稳定的正周期解。

因为系统（5）的解是

$$y(t) = \left(y(0^+) - \frac{u}{1 - \exp(-dT)}\right)e^{-dT} + y^*(t), t \in (nT, (n+1)T]$$

于是有下面的引理。

**引理 3**[5]　系统（5）有唯一的一个全局渐进稳定的正周期解 $y^*(t)$，即系统（2）有唯一的一个在 $t \in (nT, (n+1)T]$ 上的"害虫根除"周期解 $(0, y^*(t))$，并且对系统（2）的任何解 $(x(t), y(t))$，都有当 $\lim_{t\to\infty} y(t) = y^*(t)$。

### 2.2　"害虫根除"周期解的全局吸引性

记

$$u^* = (e^{dT} - 1)\frac{re^{-\gamma\tau}}{\beta - re^{-\gamma\tau}},$$

$$T_* = \frac{1}{d}\ln\left(1 + u\frac{\beta - re^{-\gamma\tau}}{re^{-\gamma\tau}}\right)$$

**定理 1**　如果 $u \geqslant u^*$ 或者 $T \leqslant T_*$，则系统（2）"害虫根除"周期解 $(0, y^*(t))$ 是全局吸引的。

**证明**　设 $(x(t), y(t))$ 是系统（2）的任何一个解，因为 $u \geqslant u^*$ 或者 $T \leqslant T_*$，有 $re^{-\gamma\tau} - \dfrac{\dfrac{\beta u}{e^{dT}-1}}{1 + \dfrac{\alpha u}{e^{dT}-1}} \leqslant 0$，因为 $\beta z/(1+\alpha z)$ 是关于 $z$ 单调递增的函数，所以选择充分小的常数 $\varepsilon > 0$，使

$$re^{-\gamma\tau} - \frac{\beta\left(\dfrac{u}{e^{dT}-1} - \varepsilon\right)}{1 + \alpha\left(\dfrac{u}{e^{dT}-1} - \varepsilon\right)} \leqslant 0 \quad (7)$$

成立。由系统（2）的第三个方程可知，

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \geqslant -dy(t), & t \neq nT, n \in \mathbb{N} \\ y(t^+) = y(t) + u, & t = nT, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

从而

$$\liminf_{t\to\infty} y(t) \geqslant \frac{u}{\exp(dT) - 1}$$

因此，对上述 $\varepsilon > 0$，存在一个正整数 $n_1$，使对 $t \geqslant n_1 T$ 时，都有

$$y(t) \geqslant \frac{u}{\exp(dT) - 1} - \varepsilon = \eta > 0 \quad (8)$$

由（8）式及系统（2）的第一个方程，对 $t \geqslant n_1 T + \tau$，有

$$\dot{x}(t) < re^{-\gamma\tau}x(t-\tau) - \frac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}x(t) - cx^2(t) \quad (9)$$

考虑方程：$\dot{z}(t) = re^{-\gamma\tau}z(t-\tau) - \dfrac{\beta\eta}{1+\alpha\eta}z(t) - cz^2(t)$，由（7）式及引理 1 可知，$\lim_{t\to\infty} z(t) = 0$。由（9）式及微分方程的比较定理，对充分大的 $t$，有 $x(t) \leqslant z(t)$。因为 $x(s) = z(s) = \varphi_1(s) > 0$ 并且 $s \in [-\tau, 0]$，根据解的非负性，可得 $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$。故存在 $n_2 > n_1$，当 $t > n_2 T + \tau$ 时，我们有 $0 < x(t) < \varepsilon < d/\lambda\beta$，根据系统（2）的第二个方程得

$$\dot{y}(t) \leqslant -(d - \lambda\beta\varepsilon)y(t)$$

因此，当 $\varepsilon \to 0$ 时，$\tilde{z}_1(t) \to y^*(t)$，这里 $\tilde{z}_1(t)$ 是如下方程

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -(d - \lambda\beta\varepsilon)z_1(t), t \neq nT, n \in \mathbb{N} \\ z_1(t^+) = z_1(t) + u, t = nT, n \in \mathbb{N} \\ z_1(0^+) = y(0^+) \end{cases} \quad (10)$$

的唯一全局渐进稳定的正周期解。由（10）式知，对 $t \in (nT, (n+1)T]$，有

$$\tilde{z}_1(t) = \frac{u\exp(-(d - \lambda\beta\varepsilon))(t - nT)}{1 - \exp(-(d - \lambda\beta\varepsilon))}$$

根据脉冲微分方程的比较定理，对任意 $\varepsilon_1 > 0$，存在 $n_3 > n_2$，当 $t > n_3 T + \tau$，都有

$$y(t) < \tilde{z}_1(t) + \varepsilon_1 \quad (11)$$

由系统（2）的第二个方程，知 $\dot{y}(t) \geqslant -dy(t)$ 。考虑下面的比较系统

$$\begin{cases} \dot{z}_2(t) = -dz_2(t), t \neq nT, n \in \mathbb{N} \\ z_2(t^+) = z_2(t) + u, t = nT, n \in \mathbb{N} \\ z_2(0^+) = y(0^+) \end{cases} \quad (12)$$

因此，当 $t \to \infty$ 时，有

$$y(t) > \tilde{z}_2(t) - \varepsilon_1 \quad (13)$$

并且 $\tilde{z}_2(t) = y^*(t)$ ，这里 $\tilde{z}_2(t)$ 是微分方程（12）全局渐进稳定的正的周期解。令 $\varepsilon \to 0$ ，由（11）式和（13）式，当 $t$ 充分大时，有 $y^*(t) - \varepsilon_1 < y(t) < y^*(t) + \varepsilon_1$ ，即当 $t \to \infty$ 时，$y(t) \to y^*(t)$。证毕。

注：定理1表明了较短的脉冲周期（$T$），或者对天地进行较大的脉冲释放量（$u$），是害虫根除周期解全局吸引的充分条件，这也说明了这些参数对系统动力学行为有重要影响。

## 3 害虫的控制策略

定理1表明了较短的脉冲周期（$T$），或者对天敌进行较大的脉冲释放量（$u$），是害虫种群最终完全根除，事实上，从生态平衡及经济方面考虑，种群最终完全被根除是困难的，也是不科学的。因此我们希望让害虫与天敌在共存的条件下，控制在经济危害水平（EIL）E之下，从而不会带来严重的经济损失。由此我们给出有效且符合实际的害虫控制策略。

记

$$u^{**} = (e^{dT} - 1)\frac{re^{-\gamma\tau} - cE}{\beta - r\alpha e^{-\gamma\tau} + \alpha cE},$$

$$T_{**} = \frac{1}{d}\ln\left(1 + u\frac{\beta - r\alpha e^{-\gamma\tau} + \alpha cE}{re^{-\gamma\tau} - cE}\right)$$

**定理2** 如果 $u^{**} < u < u^*$ 或者 $T_* < T < T_{**}$ ，则害虫与天敌可以共存且害虫种群的密度处在经济危害水平（EIL）E之下。

**证明** 因为 $u < u^*$ 或者 $T_{**} > T$ ，所以 $re^{-\gamma\tau} - \frac{\beta u}{e^{dT} - 1}\Big/\left(1 + \frac{\alpha u}{e^{dT} - 1}\right) > 0$ ，选择充分小的常数 $\varepsilon > 0$ ，使对于足够大的 $t$ ，有 $re^{-\gamma\tau} - \frac{\beta\eta}{1 + \alpha\eta} > 0$ ，这里 $\eta = \frac{u}{e^{dT} - 1} - \varepsilon$ 。因为 $u^{**} < u$ 或者 $T_{**} > T$，所以 $\left(re^{-\gamma\tau} - \frac{\beta\eta}{1 + \alpha\eta}\right)/c < E$ 。由系统（2）的第二和第四个方程得

$$\begin{cases} \dot{y}(t) \geqslant -dy(t), \quad t \neq nT, n \in \mathbb{N} \\ y(t^+) = y(t) + u, \quad t = nT, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

则有 $\liminf\limits_{t \to \infty} y(t) \geqslant \frac{u}{\exp(dT) - 1}$ 因此，对上 $\varepsilon > 0$ ，存在一个正整数 $n_1$ ，使对 $t \geqslant n_1 T$ 时，都有

$$y(t) \geqslant \frac{u}{\exp(dT) - 1} - \varepsilon = \eta > 0$$

因而由系统（2）的第一个方程，对 $t \geqslant n_1 T + \tau$ ，有

$$\dot{x}(t) < re^{-\gamma\tau}x(t - \tau) - \frac{\beta\eta}{1 + \alpha\eta}x(t) - cx^2(t) \quad (14)$$

考虑比较方程

$$\dot{z}_3(t) = re^{-\gamma\tau}z_3(t - \tau) - \frac{\beta\eta}{1 + \alpha\eta}z_3(t) - cz_3^2(t) \quad (15)$$

由（15）式可得 $\lim\limits_{t \to \infty} z_3(t) = \left(re^{-\gamma\tau} - \frac{\beta\eta}{1 + \alpha\eta}\right)/c$ 。对于（14）式，根据微分方程的比较定理，$x(t) \leqslant z_3(t)$ 。又因为 $s \in [-\tau, 0], x(s) = z_3(s) = \varphi_1(s) > 0$ ，于是根据（14）式，得到当 $t$ 足够大时，$x(t) \leqslant \left(re^{-\gamma\tau} - \frac{\beta\eta}{1 + \alpha\eta}\right)/c < E$ 。则定理得证。

## 4 生物意义

本文根据现实的生物意义，把脉冲、时滞和阶段结构捕食模型中，一方面得到害虫彻底根除的充分条件，另一方面得到了能够把害虫控制在作物经济危害水平（EIL）之下，这在阶段结构种群动力学上还不多见。这与许多作者大多得到的彻底根除害虫的条件和结论是不同的。事实上，在现实生活中彻底根除害虫是很难实现的，也是不科学的。因此我们给出了不必彻底根除害虫的充分条件，即当天地的最小投放量 $u^{**}$ 与最小投放周期 $T_{**}$ 时，害虫处于作物经济危害水平（EIL）之下。从生态平衡、种群的多样性及经济方面考虑，这样的害虫控制策略更具现实意义。从数学上看，我们还获得了定理的条件及模型的动力学行为依赖于时滞 $\tau$ 的结论，这说明这个时滞为“有害”时滞。

**参考文献：**


[1] AIELLO W G, FREEDMAN H I. A time-delay model of single-species growth with stage structure [J]. Math Biosci, 1990, 101:139 - 153.

[2] MENG X, JIAO J, CHEN L. Nonlinear analysis: The dynamics of an age predator - prey model with disturbing pulse and time delays [J]. Real World Applications, 2008, 9(2): 547 - 561.


（下转第30页）

$$\left(\prod_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i\right)^{\frac{8\alpha}{n(n+1)}} \geqslant (\csc\theta)^{2\alpha}\left(\frac{2^n n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}} V^{\frac{4\alpha}{n}} \geqslant$$

$$(\csc\theta)^{\frac{2\alpha}{(n-1)^2}} 2^{\alpha}\left(\frac{n!^2}{n+1}\right)^{\frac{2\alpha}{n}} V^{\frac{4\alpha}{n}} \qquad (26)$$

由（25）式、（26）式便知（22）式成立。易知当$\Omega_n$为正则单形时，（22）式中等号成立。

用同样的方法可证明不等式（23）式成立，证明过程中只需要将应用不等式（19）换成不等式（20），应用不等式（14）换成不等式（16）即可，具体过程不再赘述。

**定理1的证明** 记$p = \sigma^2 - \lambda \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i^{4\beta}, p' = \sigma'^2 - \lambda \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i'^{4\alpha}$，则有

$$S_{\alpha,\beta}^{\lambda} = \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_i'^{2\alpha}\left(\sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_j^{2\beta} - \lambda a_i^{2\beta}\right) =$$

$$\sigma\sigma' - \lambda \sum_{j=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} a_j^{2\beta} a_i'^{2\alpha} = \frac{1}{2}\left(\frac{\sigma'}{\sigma}p + \frac{\sigma}{\sigma'}p'\right) + \varphi \qquad (27)$$

其中$\varphi = \dfrac{\lambda}{2\sigma\sigma'} \sum_{i=1}^{\frac{1}{2}n(n+1)} (\sigma' a_i^{2\beta} - \sigma a_i'^{2\alpha})^2 \geqslant 0$。

由（27）式与不等式（22）便得不等式（7）。易知当$\Omega_n$为正则单形时，（7）式中等号成立。

用同样方法可证明定理2中的不等式（8）成立。

## 参考文献：


[1] 杨路,张景中. Neuberg-Pedoe不等式的高维推广及其应用[J]. 数学学报, 1981, 24(3):401－408.

[2] SU H M. Two inequalities for the simplexes [J]. Chinese Sci Bull, 1987, 32(1):1－3.

[3] 陈计,马援. 涉及两个单形的一类不等式[J]. 数学研究与评论, 1989, 9(2):282－284.

[4] 毛其吉. 联系两个单形的不等式[J]. 数学的实践与认识, 1989,19(3):23－25.

[5] 李迈龙. 高维Neuberg-pedoe不等式的推广[J]. 数学的实践与认识, 2004,34 (4):142－146.

[6] 杨世国. 涉及两个$n$维单形的不等式[J]. 浙江大学学报:理学版, 2006, 33(3):247－249.

[7] 苏化明. 一个涉及单形体积棱长及侧面面积的不等式[J]. 数学杂志, 1993, 11(2):453－454.

[8] 冷岗松. Euler不等式的一个加强[J]. 数学的实践与认识, 2004, 25(2):94－96.

[9] 匡继昌. 常用不等式[M]. 济南:山东科学技术出版社, 2004.

[10] OPPENHEIM A. Inequalities involving the elements of triangles, quadrilaterals or tethraedra[J]. Univ Beograd Publ Elektrotehn Fak Ser Mat Fiz, 1974, 496: 257－263.

[11] 苏化明. 关于切点单形的两个不等式[J]. 数学研究与评论, 1990, 10(2):243－247.

[12] 杨世国. $n$维Euler不等式的推广[J]. 西安工程科技学院学报,2005,19(4):503－506.


（上接第26页）


[3] 程惠东,孟新桂,王芳. 一类时滞非自治Lotka-Volterra扩散生态系统的全局吸引性[J]. 中山大学学报:自然科学版,2008,47(2):18－22.

[4] 程惠东. 脉冲投放益虫化学控制害虫管理模型[J]. 中山大学学报:自然科学版,2010,49(3):8－11.

[5] MENG X, CHEN L. A stage-structured si eco-epidemiological model with time delay and impulsive controlling [J]. Journal of Systems Science and Complexity, 2008: 427－440.

[6] GOURLEY S A, KUANG Y. A stage structured predator－prey model and its dependence on through-stage delay and death rate [J]. J Math Biol, 2004, 49:188－200 .

[7] NIETO J J, RODRIGUEZ - LOPEZ R. Periodic boundary value problems for non-Lipschitzian impulsive functional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2006, 31 (8): 593－610.

[8] HASTINGS A. Global stability in two species system [J]. J Math Biol, 1978, 5: 399－403.

[9] WANG W, CHEN L. A predator - prey system with stage structure for predator [J]. Comput Math Appl, 1997, 33 (8): 83－91.

[10] J IAO J J, PANG G P, CHEN L S, et al. A delayed stage-structured predator prey model with impulsive stocking on prey and continuous harvesting on predator [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 195(1): 316－325.

[11] MENG X Z, CHEN L S. Almost periodic solution of non-autonomous Lotka-Volterra predator-prey dispersal system with delays [J]. Journal of Theoretical Biology, 2006, 243:562－574.