第 50 卷 第 5 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 50 No. 5
2011 年 9 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Sep. 2011

# 严格 π - 正则半群上的 fuzzy 同余*

李春华[1,2]，刘二根[1]
（1. 华东交通大学基础科学学院，江西 南昌 330013；
2. 华南师范大学数学科学学院，广东 广州 510631）

**摘　要**：π - 正则半群 $S$ 称为严格 π - 正则的，如果其正则元集为 $S$ 的理想且为 $S$ 的完全正则子半群。这里利用半群 fuzzy 同余的概念，研究了 π - 正则半群上 fuzzy 同余的性质。在此基础上，给出了严格 π - 正则半群上 fuzzy 同余的性质和特征，并给出了严格 π - 正则半群上群同余的刻画，得到了严格 π - 正则半群上 fuzzy 同余为 fuzzy 群同余的充要条件。

**关键词**：严格 π - 正则半群；fuzzy 同余；fuzzy 群同余
**中图分类号**：O152.7　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 - 6579（2011）05 - 0011 - 04

# Fuzzy Congruences on Strictly π-Regular Semigroups

*LI Chunhua*[1,2], *LIU Ergen*[1]
(1. School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China;
2. School of Mathematics, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

**Abstract**: A π-regular semigroup $S$ is called strictly π-regular, if the set of regular elements of $S$ is an ideal of $S$ and is a completely regular subsemigroup of $S$. We use the notion of a fuzzy congruence relation on semigroups to study some properties of fuzzy congruences on π-regular semigroups. Some properties and characterizations of fuzzy congruences on strictly π-regular semigroups are given, and the group congruence on such semigroups is obtained. Finally, sufficient and necessary conditions for a fuzzy congruence on a strictly π-regular semigroup to be a fuzzy group congruence are proved.

**Key words**: strictly π-regular semigroup; fuzzy congruence; fuzzy group congruence

半群上的同余一直是半群学者的研究热点之一。自 Samhan 在文［1］中定义了半群上的 fuzzy 同余关系，对半群上的 fuzzy 同余进行了研究之后，国内许多学者对各类半群上的 fuzzy 同余进行了的研究[2-6]。近几十年来，各种广义正则半群受到了人们的重视，特别地，各种 π - 正则半群的结构和同余理论引起了不少学者的关注[7-8]。本文利用半群 fuzzy 同余的概念，研究了 π - 正则半群上 fuzzy 同余的性质。在此基础上，给出了严格 π - 正则半群上 fuzzy 同余的性质和特征，并给出了严格 π - 正则半群上群同余的刻画，得到了严格 π - 正则半群上 fuzzy 同余为 fuzzy 群同余的相关条件。文中一般定义及记号均参见［8 - 12］。

半群 $S$ 的元素 $a$ 称为正则的，若存在元素 $x \in S$ 使得 $a = axa$；半群 $S$ 的元素 $a$ 称为完全正则的，若存在元素 $x \in S$ 使得 $a = axa$，且 $ax = xa$；半群 $S$ 的元素 $a$ 称为 π - 正则的，若存在自然数 $n$ 使得 $a^n$ 为正则的，并称使得 $a^n$ 为正则元的最小自然数 $n$ 为 $a$ 的正则指数。半群 $S$ 称为正则的（完全正则的、π - 正则的），若 $S$ 的所有元素为正则的（完全正则的、π - 正则的）。为方便记，分别用 $E(S)$，$\mathrm{Reg}(S)$ 表示半群 $S$ 的幂等元集和正则元集；

* 收稿日期：2010 - 10 - 19
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11061014）；江西省自然科学基金资助项目（2007GZS0715）；江西省教育厅科研基金资助项目（GJJ10453）；华东交通大学科研基金资助项目（01305131）
作者简介：李春华（1973 年生），男，副教授，博士生；E-mail：chunhuali66@163.com

用 $\overline{E(S)}$ 表示由 $E(S)$ 生成的 $S$ 的子半群；用 $V(a)$ 表示元素 $a$ 所有逆元的集合。$\pi$－正则半群 $S$ 称为严格 $\pi$－正则的，若 $\mathrm{Reg}(S)$ 为 $S$ 的理想且为 $S$ 的完全正则子半群。半群 $S$ 的子集 $H$ 称为满的，若 $E(S)\subseteq H$，半群 $S$ 的子集 $H$ 称为自共轭的，若对任意 $a\in S$ 及 $(a^n)'\in V(a^n)$，有 $aHa^{n-1}(a^n)'\subseteq H$ 且 $a^{n-1}(a^n)'Ha\subseteq H$，其中 $n$ 为 $a$ 的正则指数。

为方便讨论，下面回忆 fuzzy 理论的有关定义和性质。

设 $X$ 是一个非空集合，称映射 $f:X\to[0,1]$ 为 $X$ 的一个 fuzzy 子集。$\forall x\in X$，称 $f(x)$ 为 $x$ 对 $f$ 的隶属度。令 $S$ 为半群，称映射 $\mu:S\times S\to[0,1]$ 为 $S$ 上的 fuzzy 关系。

**定义 1**[12] 令 $\mu,\nu$ 为半群 $S$ 上的两个 fuzzy 关系，$\forall x,y\in S$，作如下定义：

1) $\mu\subseteq\nu\Leftrightarrow\forall x,y\in S,\mu(x,y)\leqslant\nu(x,y)$；

2) $\mu\circ\nu(a,b)=\bigvee_{x\in S}\{\mu(a,x)\wedge\nu(x,b)\}$。

**定义 2**[12] 令 $\mu$ 为半群 $S$ 上的 fuzzy 关系，则称 $\mu$ 为半群 $S$ 上的 fuzzy 等价关系，如果 $\forall a,b\in S$ 下列各款成立：1) $\mu(a,a)=1$；2) $\mu(a,b)=\mu(b,a)$；3) $\mu\circ\mu\subseteq\mu$。

**定义 3**[12] 令 $\mu$ 为半群 $S$ 上的 fuzzy 关系，则称 $\mu$ 在 $S$ 上关于乘法是相容的，如果 $\forall a,b,x\in S$ 下列各款成立：1) $\mu(ax,bx)\geqslant\mu(a,b)$； 2) $\mu(xa,xb)\geqslant\mu(a,b)$。

半群 $S$ 上的 fuzzy 等价关系 $\mu$ 称为 $S$ 的 fuzzy 同余，如果 $\mu$ 在 $S$ 上关于乘法是相容的。为方便记，用 $\mu_a$ 表示半群 $S$ 上所有与 $a$ 具有 fuzzy 等价关系 $\mu$ 的 fuzzy 子集；用 $C_\rho$ 表示半群 $S$ 上的二元关系 $\rho$ 的特征函数。不难验证，$\rho$ 为 $S$ 上的同余等价于 $C_\rho$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余。令 $\mu$ 为半群 $S$ 上的 fuzzy 同余，按如下定义乘法“$*$”：$\mu_a*\mu_b=\mu_{ab}(\forall a,b\in S)$，则容易验证 $S/\mu=\{\mu_a\mid a\in S\}$ 关于乘法“$*$”为半群且 $\forall e\in E(S),\mu_e=(\mu_e)^2$。

**引理 1**[12] 令 $\mu$ 为半群 $S$ 上的 fuzzy 同余，$a,b\in S$，则下列各款成立：

1) $\mu_a=\mu_b\Leftrightarrow\mu(a,b)=1$；

2) $\mu^{-1}=\{(a,b)\in S\times S\mid\mu(a,b)=1\}$ 是 $S$ 上的同余。

半群 $S$ 上的 fuzzy 同余 $\mu$ 称为幂等可分的，如果 $(\forall e,f\in E(S))\mu_e=\mu_f\Rightarrow e=f$。半群 $S$ 上的 fuzzy 同余 $\mu$ 称为 fuzzy 消去同余（群同余），如果 $S/\mu$ 关于半群乘法“$*$”为消去半群（群）。显然，fuzzy 群同余为 fuzzy 消去的。

**定义 4** 令 $\mu$ 为半群 $S$ 上的 fuzzy 同余，称 $\mu$ 为幂等纯的，如果

$(\forall a\in S,e\in E(S))\mu_a=\mu_e\Rightarrow a\in E(S)$

据文［12］，在半群 $S$ 上按如下定义关系 $\Delta_S$：

$(\forall x,y\in S)\Delta_S(x,x)=1,\Delta_S(x,y)=0(x\neq y)$

则易知 $\Delta_S$ 为半群 $S$ 上的 fuzzy 同余，且为幂等可分的幂等纯 fuzzy 同余。

## 1 性质与特征

**引理 2** 令 $S$ 为 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，则 $S/\mu$ 关于半群乘法“$*$”为 $\pi$－正则半群。

**证明** 可由 $\pi$－正则半群定义容易推得。

**命题 1** 令 $S$ 为 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，则以下各款等价：

1) $(\forall a\in S)\mu_a\in E(S/\mu)$；

2) $(\exists e\in E(S))\mu_a=\mu_e$。

**证明** 2)$\Rightarrow$1)。显然成立。

1)$\Rightarrow$2)。令 $\mu_a\in E(S/\mu)$，则 $(\forall m\in\mathbb{N}^+)$ $\mu_a=\mu_{a^2}=\mu_{a^3}=\cdots=\mu_{a^m}$。又 $S$ 为 $\pi$－正则半群，故对于 $a^2\in S$，有 $n\in\mathbb{N}^+$ 使得 $(a^2)^n=(a^2)^nx(a^2)^n,x=x(a^2)^nx$。于是，$\mu_a=\mu_{a^2}=\mu_{a^{2n}}=\mu_{a^{2n}xa^{2n}}=\mu_{a^{2n}}*\mu_x*\mu_{a^{2n}}=\mu_{a^n}*\mu_x*\mu_{a^n}=\mu_{a^nxa^n}$，而 $(a^nxa^n)^2=a^nxa^na^nxa^n=a^nxa^{2n}xa^n=a^nxa^n\in E(S)$。至此，完成命题证明。

**命题 2** 令 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，则下列各款成立：

1) $\mathrm{Reg}(S)/\mu=\mathrm{Reg}(S/\mu)$；

2) 若 $\mu$ 为 fuzzy 消去的，则 $(\forall e,f\in E(S))\mu_e=\mu_f$。

**证明** 1) 仅证 $\mathrm{Reg}(S)/\mu\supseteq\mathrm{Reg}(S/\mu)$（反包含的证明过程可直接推得）。为此，令 $\mu_a\in\mathrm{Reg}(S/\mu)$，则存在 $x\in S$，使得 $\mu_a=\mu_a*\mu_x*\mu_a=\mu_a*\mu_{xa}$。注意到 $\mu_{xa}\in E(S/\mu)$，故由命题 1，$\mu_{xa}=\mu_e$，其中 $e\in E(S)$。于是 $\mu_a=\mu_a*\mu_e=\mu_{ae}$。又 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，故 $ae\in\mathrm{Reg}(S)$，即 $\mu_a=\mu_{ae}\in\mathrm{Reg}(S)/\mu$。

2) 令 $e,f\in E(S)$，则由 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，得 $ef\in\mathrm{Reg}(S)$。注意到 $\mathrm{Reg}(S)$ 为 $S$ 的完全正则子半群。故 $\exists x\in V(ef)$ 使 $ef=(ef)x(ef)$。于是 $\mu_{eff}=\mu_{ef}=\mu_{efxef}$。即 $\mu_{ef}*\mu_f=\mu_{ef}*\mu_{xef}$。由 $\mu$ 为 fuzzy 消去的，得 $\mu_f=\mu_{xef}$。同理，$\mu_e=\mu_{efx}$。而 $\mu_{xef}=\mu_{efx}$，故 $\mu_e=\mu_f$。

**定理 1** 令 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，则 $S/\mu$ 关于半群乘法“$*$”为严格 $\pi$－正则半群。按如下定义映射：$\mu^\#:S\to S/\mu$，$\mu^\#(a)$

$=\mu_a$，则 $\mu^{\#}$ 为 $S$ 到 $S/\mu$ 的同态。反之，若 $\mu^{\#}$ 为 $S$ 到半群 $T$ 的同态，则 $S\mu^{\#}$ 为严格 $\pi$－正则半群，且 $\forall g\in E(S\mu^{\#})$，$\exists e\in S$，使 $\mu_e=g$。

**证明**　由引理 2，$S/\mu$ 为 $\pi$－正则半群。下证 $\mathrm{Reg}(S)/\mu$ 为 $S/\mu$ 的理想。令 $\mu_a\in S/\mu,\mu_b\in \mathrm{Reg}(S)/\mu$，则 $b\in\mathrm{Reg}(S)$。又由 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，得 $ab\in\mathrm{Reg}(S)$。于是 $\mu_a*\mu_b=\mu_{ab}\in\mathrm{Reg}(S)/\mu$。即 $\mathrm{Reg}(S)/\mu$ 为 $S/\mu$ 的理想。另一方面，由 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，易证 $\mathrm{Reg}(S)/\mu$ 为 $S/\mu$ 的完全正则子半群。因此，由命题 2，$\mathrm{Reg}(S/\mu)$ 为 $S/\mu$ 的理想，且为 $S/\mu$ 的完全正则子半群。即 $S/\mu$ 关于半群乘法"$*$"为严格 $\pi$－正则半群。按上述定义 $\mu^{\#}$ 为 $S$ 到半群 $T$ 的同态是显然的。而定理的余下证明可由命题 1 推得。

## 2　群同余与 fuzzy 群同余

**定理 2**　令 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，$H$ 为 $S$ 满的、自共轭的子半群，记 $\mu^H=\{(a,b)\in S\times S\mid \exists x,y\in H,\mu(xa,by)=1\}$，则 $\mu^H$ 为 $S$ 上的群同余。

**证明**　先证 $\mu^H$ 为等价关系。为此，可令 $a\in S$，则存在 $n\in\mathbb{N}^+$ 使得 $a^n$ 为正则元，且 $a^{n-1}(a^n)'a$，$a^n(a^n)'\in E(S)$。又 $H$ 为 $S$ 满的，故 $a^{n-1}(a^n)'a$，$a^n(a^n)'\in H$。注意到，$\mu_{[a^n(a^n)']a}=\mu_{a[a^{n-1}(a^n)'a]}$。于是由引理 1 的 1)，$\mu(a^n(a^n)'a,aa^{n-1}(a^n)'a)=1$。故 $(a,a)\in\mu^H$。即 $\mu^H$ 为自反的。令 $(a,b)\in\mu^H$，则 $\exists n,m\in\mathbb{N}^+$ 使 $a^n,b^m$ 为正则元，且有 $x,y\in H$ 使得 $\mu(xa,by)=1$。由引理 1 的 1)，$\mu_{xa}=\mu_{by}$。于是

$$\mu_{a(a^{n-1})(a^n)'}*\mu_{xa}*\mu_{b^{m-1}(b^m)'b}=\mu_{a^n(a^n)'}*\mu_{by}*\mu_{b^{m-1}(b^m)'b}$$

即

$$\mu_{a[(a^{n-1})(a^n)'xab^{m-1}(b^m)'b]}=\mu_{[a^n(a^n)'byb^{m-1}(b^m)']b}$$

进而，由引理 1 的 1)，

$$\mu(a(a^{n-1}(a^n)'xab^{m-1}(b^m)'b),\\(a^n(a^n)'byb^{m-1}(b^m)')b)=1$$

注意到 $H$ 为自共轭的，故 $a^{n-1}(a^n)'xa,byb^{m-1}(b^m)'\in H$。又 $b^{m-1}(b^m)'b,a^n(a^n)'\in H$，且 $H$ 为 $S$ 的子半群。因此，$a^{n-1}(a^n)'xab^{m-1}(b^m)'b,a^n(a^n)'byb^{m-1}(b^m)'\in H$。于是，由 $\mu^H$ 定义，得 $(b,a)\in\mu^H$，即 $\mu^H$ 为对称的。为了证传递性，又令 $(a,b)\in\mu^H,(b,c)\in\mu^H$，则 $\exists x,y,s,t\in H$ 使得 $\mu(xa,by)=1,\mu(sb,ct)=1$。即 $\mu_{xa}=\mu_{by},\mu_{sb}=\mu_{ct}$。于是

$$\mu_{sxa}=\mu_s*\mu_{xa}=\mu_s*\mu_{by}=\mu_{sby}=\mu_{sb}*\mu_y=\mu_{ct}*\mu_y=\mu_{cty}$$

即 $\mu((sx)a,c(ty))=1$。故 $(a,c)\in\mu^H$，即 $\mu^H$ 为传递的。因此，$\mu^H$ 为等价关系。

下证 $\mu^H$ 为同余关系。令 $a,b,c\in S$，且有 $(a,b)\in\mu^H$，则 $\exists n,m\in\mathbb{N}^+$ 使 $a^n,c^m$ 为正则元，且有 $x,y\in H$ 使得 $\mu(xa,by)=1$。即 $\mu_{xa}=\mu_{by}$。上式两边分别右乘 $\mu_{a^{n-1}(a^n)'c^{m-1}(c^m)'ca}$ 及左乘 $\mu_c$，得

$$\mu_{[cxa^n(a^n)'c^{m-1}(c^m)']ca}=\mu_{cb[ya^{n-1}(a^n)'c^{m-1}(c^m)'ca]}$$

即

$$\mu((cxa^n(a^n)'c^{m-1}(c^m)')ca,\\cb(ya^{n-1}(a^n)'c^{m-1}(c^m)'ca))=1$$

注意到 $H$ 为 $S$ 的子半群。故 $xa^n(a^n)'\in H$。又 $H$ 为自共轭的。故 $cxa^n(a^n)'c^{m-1}(c^m)'\in H$。而 $c^{m-1}(c^m)'c\in E(S)\subseteq H$。于是由 $H$ 为自共轭的，有 $a^{n-1}(a^n)'c^{m-1}(c^m)'ca\in H$。又由 $H$ 为 $S$ 的子半群，得 $ya^{n-1}(a^n)'c^{m-1}(c^m)'ca\in H$。故 $(ca,cb)\in\mu^H$，即 $\mu^H$ 为左相容。类似地，可证 $\mu^H$ 为右相容。因此，$\mu^H$ 为 $S$ 上的同余。

最后，证 $\mu^H$ 为 $S$ 上的群同余。任取 $a\in S,e\in E(S)$，则 $\exists n\in\mathbb{N}^+$ 使 $a^n$ 为正则元，且有

$$\mu_{ae[a^{n-1}(a^n)'a]}=\mu_{[aea^{n-1}(a^n)']a},\mu_{[ea^n(a^n)']a}=\mu_{ea[a^{n-1}(a^n)'a]}$$

即

$$\mu(ae(a^{n-1}(a^n)'a),(aea^{n-1}(a^n)')a)=1,\\\mu((ea^n(a^n)')a,ea(a^{n-1}(a^n)'a))=1$$

而 $a^{n-1}(a^n)'a,aea^{n-1}(a^n)',ea^n(a^n)'\in H$。故 $(ae,a)\in\mu^H,(a,ea)\in\mu^H$。即 $a\mu^He\mu^H=a\mu^H=e\mu^Ha\mu^H$。因此，对任意 $e\in E(S)$，$e\mu^H$ 为 $S/\mu^H$ 的恒等元。即 $\forall e,f\in E(S)$，有 $e\mu^H=f\mu^H$。于是 $\forall a\in S,e\in E(S)$，有 $a\mu^H(a^{n-1}(a^n)')\mu^H=(a^{n-1}(a^n)')\mu^Ha\mu^H=e\mu^H$。即 $a^{n-1}(a^n)'\mu^H$ 为 $a\mu^H$ 的逆元。因此，$\mu^H$ 为 $S$ 上的群同余。

**推论 1**　令 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，记

$\mu^{\overline{E(S)}}=\{(a,b)\in S\times S\mid \exists x,y\in\overline{E(S)},\mu(xa,by)=1\}$；

$\mu^{\mathrm{Reg}(S)}=\{(a,b)\in S\times S\mid\exists x,y\in\mathrm{Reg}(S),\mu(xa,by)=1\}$

则 $\mu^{\overline{E(S)}}$ 及 $\mu^{\mathrm{Reg}(S)}$ 均为 $S$ 上的群同余。

**证明**　由 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，易证 $\overline{E(S)}$，$\mathrm{Reg}(S)$ 为 $S$ 满的、自共轭的子半群。因此，由定理 2，$\mu^{\overline{E(S)}}$ 及 $\mu^{\mathrm{Reg}(S)}$ 均为 $S$ 上的群同余。

**定理 3**　令 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，$H$ 为 $S$ 满的、自共轭的子半群，则下列各款成立：

1) $C_{\mu^H}$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余；

2) 若 $C_{\mu^H}\subseteq\mu$，则 $\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余；

3) $\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余当且仅当 $C_{\mu^{\overline{E(S)}}}\subseteq\mu$。

**证明**　1)、2) 可由定理 2 及特征函数定义容易推得。

3) 充分性可由 2) 直接推得，仅证必要性。分两种情形：(i) 若 $\forall a,b\in S,(a,b)\notin\mu^{\overline{E(S)}}$，则

$C_{\mu\overline{E(S)}}(a,b) = 0 \leqslant \mu(a,b)$；（ii）若 $\forall a,b \in S$，$(a,b) \in \mu^{\overline{E(S)}}$，则 $C_{\mu\overline{E(S)}}(a,b) = 1$，且存在 $x,y \in \overline{E(S)}$，使得 $\mu_{xa} = \mu_{by}$。注意到 $x,y$ 由幂等元生成的，且 $\mu$ 为 fuzzy 群同余。故 $\mu_x = \mu_y = \mu_e$，其中 $e$ 为 $E(S)$ 中任意幂等元。于是，$\mu_a = \mu_{ea} = \mu_{be} = \mu_b$。即 $\mu(a,b) = 1$。至此完成定理证明。

**定理4** 令 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，则 $\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余当且仅当 $\mu^{\overline{E(S)}} \subseteq \mu^{-1}$。

**证明** 必要性：令 $a,b \in S,(a,b) \in \mu^{\overline{E(S)}}$，则 $\exists x,y \in \overline{E(S)}$ 使得 $\mu(xa,by) = 1$。由引理1的1)，$\mu_{xa} = \mu_{by}$。注意到 $x,y$ 由幂等元生成的，且 $\mu$ 为 fuzzy 群同余。故 $\mu_x = \mu_y = \mu_e$，其中 $e$ 为 $E(S)$ 中任意幂等元。又由 $\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余，$\mu_a = \mu_{ea} = \mu_{be} = \mu_b$。即 $\mu(a,b) = 1$。因此，$(a,b) \in \mu^{-1}$。

充分性：令 $e,f \in E(S)$，则由 $\mu^{\overline{E(S)}}$ 为群同余，得 $e\mu^{\overline{E(S)}} = f\mu^{\overline{E(S)}}$，即 $(e,f) \in \mu^{\overline{E(S)}}$。又 $\mu^{\overline{E(S)}} \subseteq \mu^{-1}$，故 $(e,f) \in \mu^{-1}$，即 $\mu(e,f) = 1$。由引理1的1)，$\mu_e = \mu_f$。另一方面，对任意 $a \in S, e \in E(S)$，由 $\mu^{\overline{E(S)}}$ 为群同余，有 $(ae,a) \in \mu^{\overline{E(S)}}$，$(a,ea) \in \mu^{\overline{E(S)}}$。又 $\mu^{\overline{E(S)}} \subseteq \mu^{-1}$，于是，$(ae,a) \in \mu^{-1}$，$(a,ea) \in \mu^{-1}$。进而，$\mu(ae,a) = 1$，$\mu(ea,a) = 1$。由引理1的1)，$\mu_{ae} = \mu_a = \mu_{ea}$，即 $\mu_a * \mu_e = \mu_a = \mu_e * \mu_a$。故 $\mu_e$ 为 $S/\mu$ 恒等元。因此，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余。

**定理5** 令 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，$\mu$ 为 $S$ 上的 fuzzy 同余，则下列各款成立：

1）若 $\mu$ 为 $S$ 上的幂等可分的幂等纯同余，则 $\mu^{\overline{E(S)}}$ 为 $S$ 上的最小群同余；

2）若 $\mu$ 为 $S$ 上的幂等可分的幂等纯同余，则 $\mu^{\overline{E(S)}} = \Delta_S^{\overline{E(S)}}$；

3）若 $\mu$ 为 $S$ 上的幂等可分的幂等纯同余，则 $C_{\mu\overline{E(S)}}$ 为 $S$ 上的最小 fuzzy 群同余。

**证明** 1）由定理2，$\mu^{\overline{E(S)}}$ 为 $S$ 上的群同余，下证 $\mu^{\overline{E(S)}}$ 为 $S$ 上的最小群同余。为此，令 $a,b \in S$，且 $(a,b) \in \mu^{\overline{E(S)}}$，则 $\exists x,y \in \overline{E(S)}$ 使 $\mu_{xa} = \mu_{by}$。由 $S$ 为严格 $\pi$－正则半群，得 $xa,by \in \mathrm{Reg}(S)$。故 $\exists s \in V(xa)$ 使 $\mu_s \in V(\mu_{xa}) = V(\mu_{by})$。于是 $\mu_s * \mu_{xa} = \mu_s * \mu_{by}$。即 $\mu_{sxa} = \mu_{sby}$，其中 $sxa \in E(S)$。由 $\mu$ 为 $S$ 上的幂等纯 fuzzy 同余，得 $sby \in E(S)$。又 $\mu$ 为 $S$ 上的幂等可分 fuzzy 同余，有 $sxa = sby$。故 $s'sxa = s'sby$，其中 $s'$ 为 $s$ 逆元。又令 $\rho$ 为 $S$ 上的任意群同余，则 $\forall e \in E(S)$，$e\rho$ 为 $S/\rho$ 恒等元，且 $(s's)\rho = x\rho = y\rho = e\rho$。于是

$$a\rho = (s's)\rho x\rho a\rho = (s'sxa)\rho = (s'sby)\rho = (s's)\rho b\rho y\rho = b\rho$$

即 $(a,b) \in \rho$。因此，结论成立。

2）显然，$\Delta_S$ 为 $S$ 上的幂等可分的幂等纯 fuzzy 同余。因此，由1）直接推得成立。

3）$C_{\mu\overline{E(S)}}$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余是显然的。令 $v$ 为 $S$ 上的任意 fuzzy 群同余，仅证 $C_{\mu\overline{E(S)}} \subseteq v$ 即可。分两种情形：（i）$\forall a,b \in S$，$(a,b) \notin \mu^{\overline{E(S)}}$，则 $C_{\mu\overline{E(S)}}(a,b) = 0 \leqslant v(a,b)$；（ii）$\forall a,b \in S,(a,b) \in \mu^{\overline{E(S)}}$，则 $C_{\mu\overline{E(S)}}(a,b) = 1$，且 $\exists x,y \in \overline{E(S)}$ 使 $\mu_{xa} = \mu_{by}$。进而，由1）的证明过程，易知 $s'sxa = s'sby$，其中 $s \in V(xa)$，$s'$ 为 $s$ 逆元。又 $v$ 为 $S$ 上的 fuzzy 群同余，故 $v_a = v_{s's} * v_x * v_a = v_{s'sxa} = v_{s'sby} = v_{s's} * v_b * v_y = v_b$。由引理1的1)，$v(a,b) = 1$。综上所述，$C_{\mu\overline{E(S)}} \subseteq v$，至此完成定理证明。

**参考文献：**

[1] SAMHAN M. Fuzzy congruences on semigroups[J]. Inform Sci, 1993, 74: 165－175.

[2] XIE X Y. Fuzzy congruences extensions in semigroups [J]. Advances in Mathematics, 2001, 30(3): 218－230.

[3] TAN Y J. Fuzzy congruences on a regular semigroup[J]. Fuzzy Sets and Systems, 2001, 117: 447－453.

[4] LI C H. Fuzzy good congruences on adequate semigroups [J]. Journal of Nanchang University: Natural Science, 2007, 31(1): 35－37.

[5] LI C H. Fuzzy good congruences on type-A semigroups [J]. Journal of Shandong University: Natural Science, 2008, 43(2): 40－43.

[6] LI C H. XU B G. Fuzzy good congruences on abundant semigroups[J]. Fuzzy Systems and Mathematics, 2008, 22(4): 39－42.

[7] TIAN Z J. π－ inverse semigroup whose lattice of π－inverse subsemigroups is modular[J]. Journal of Systems Science and Mathematical Science, 1997, 17(3): 226－231.

[8] YU B J. Construction of strictly π－ regular semigroups [J]. Science in China: Series A, 1990, 11: 1159－1161.

[9] PETRICH M. Completely regular semigroups[M]. New York: John Wiley and Sons Inc, 1999.

[10] ZHAN J M, DAVVAZ B, SHUM K P. A new view on fuzzy hypermodules[J]. Acta Mathematica Sinica, English Series, 2007, 23(8): 1345－1356.

[11] YING M S. Fuzzy topology based on residuated lattice-valued logic[J]. Acta Mathematica Sinica: English Series, 2001, 17: 89－102.

[12] JOHN N M, DAVENDER S M, NOBUAKI K. Fuzzy semigroups[M]. New York: Springer-Verlag, 2003.