

一类非线性 Duffing 方程概周期解的存在性*

张留伟, 徐远通

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 研究了一类广义非线性 Duffing 方程概周期解的存在性。通过 Lyapunov 函数建立辅助线性方程的指数型二分性, 在此基础上, 选取适当的函数空间, 利用不动点定理, 得到广义非线性 Duffing 有界解的存在性, 再次利用 Lyapunov 函数, 得到其概周期解的存在性和模包含关系。

关键词: Duffing 方程; 概周期; 指数型二分性; Lyapunov 函数

中图分类号: O175.14 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2010) 04-0006-05

Existence of Almost Periodic Solutions for Some Nonlinear Duffing Equations

ZHANG Liuwei, XU Yuantong

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The existence of almost periodic solutions of some more generalized nonlinear Duffing equations is studied. Firstly, by means of the Lyapunov functions, the exponential dichotomy of the auxiliary linear equations is established. Then, by combining the fixed point theorem in some suitable space, using the Lyapunov function again, the existence of almost periodic solutions of the nonlinear Duffing equations and module inclusion are obtained.

Key words: Duffing equations; almost periodicity; exponential dichotomy; Lyapunov functions

对于非线性 Duffing 方程解的研究多集中于有界解、调和解、次调和解以及拟周期解, 而关于其概周期解的研究相对较少。由于概周期函数自身的特性, 很多对于周期情形成立的结论, 对于概周期情形却不再成立^[1], 比如 Floquet 理论^[2]。因此, 有必要对 Duffing 方程的概周期解进行研究。文 [3] 用变分法研究了如下方程

$$x'' - x - x^3 = f(t), x' = \frac{dx}{dt} \quad (1)$$

其中, f 是概周期函数, 即 $f \in AP(\mathbb{R})$, 证明了方程 (1) 的有界解是概周期的。文 [4] 利用 Lyapunov 函数, 结合指数型二分性研究了方程

$$x'' - x + x^3 = f(t) \quad (2)$$

得到当 $f \in AP(\mathbb{R})$, 且 $|f(t)| \leq \frac{8}{27}$ 时, 方程 (2)

有唯一的概周期解 $x(t)$, 满足 $|x(t)| \leq \frac{1}{3}$, 且 $\text{mod}(x) \subset \text{mod}(f)$ 。

1 主要结论

本文研究更广义的一类非线性 Duffing 方程

$$x'' - ax + bx^m = f(t) \quad (3)$$

与

$$x'' - \sum_{i=1}^n a_i x^{2i-1} = f(t) \quad (4)$$

其中 $a > 0, b > 0, m, n$ 是正整数, $a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n, f(t)$ 是有界的连续函数。得到如下

* 收稿日期: 2009-06-09

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10471155; 10871213)

作者简介: 张留伟 (1982 年生), 男, 博士生; E-mail: zhangliuwei020@yahoo.com.cn

结论：

定理 1 设 f 是概周期函数，存在 $M > 0$ ，使得 $|f(t)| \leq M(a - bM^{m-1})$ ，且 $a - bM^{m-1} > 0$ ，则方程 (3) 存在唯一的概周期解 $x(t)$ ，满足 $|x(t)| \leq M$ ，且 $\text{mod}(x) \subset \text{mod}(f)$ 。

容易看出，当 $a = 1, b = 1, m = 3, M = \frac{1}{3}$ 时，我们的结论与文 [4] 中的定理 2 是一致的。

定理 2 设存在 $\delta > 1$ ，使得 $\theta < 1, \frac{l}{1-\theta} < 1, \lambda < 1$ ，其中 $l = \frac{\sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|}{\delta}, \theta = \frac{1}{\delta} \max\{1, |a_1 - \delta^2| + \sum_{i=2}^n |a_i|\}$ ， $\lambda = \frac{1}{\delta} \max\{1, |a_1 - \delta^2| + \sum_{i=2}^n (2i-1)|a_i| \left(\frac{2l}{1-\theta}\right)^{2i-2}\}$ ，则方程 (4) 存在概周期解 $x(t)$ ，满足 $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \frac{l\theta}{1-\theta}$ 。

可见，本文对一类广义 Duffing 方程概周期解的存在性给出了新的判据。关于 Duffing 方程概周期解的研究可参看文 [5-8]。

2 引理及定理的证明

定义 1 设 $x \in \mathbb{R}^n, A(t)$ 是 \mathbb{R} 上 $n \times n$ 的连续矩阵值函数，称线性系统

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) \quad (5)$$

在 \mathbb{R} 上具有指数型二分性，如果存在正常数 k, α 及投影矩阵 P ，有

$$\begin{aligned} |X(t)PX^{-1}(s)| &\leq ke^{-\alpha(t-s)}, t \geq s \\ |X(t)(I-P)X^{-1}(s)| &\leq ke^{-\alpha(s-t)}, s \geq t \end{aligned}$$

其中， $X(t)$ 是系统 (5) 的基本解矩阵。

引理 1^[2] 如果线性系统 (5) 在 \mathbb{R} 上具有指数型二分性，则概周期系统

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + f(t) \quad (6)$$

存在唯一的概周期解 $x(t)$ ，且

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t X(t)PX^{-1}(s)f(s)ds - \\ &\int_t^{\infty} X(t)(I-P)X^{-1}(s)f(s)ds \end{aligned}$$

引理 2 设 $\varphi(t)$ 是有界的连续函数， $Q = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)|$ ，且 $0 < a - bQ^{m-1} < 1$ ，则方程组

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a - b\varphi^{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (7)$$

具有指数型二分性，且二分性中的常数 k, α 与 $\varphi(t)$ 无关。

证明 取函数 $V(t, x, y) = -xy$ ，记 $E_1 = \{(x, y)^T = r(1, 1)^T, r \in \mathbb{R}\}$ ， $E_2 = \{(x, y)^T = r(1, -1)^T, r \in \mathbb{R}\}$ ，则 $\mathbb{R} = E_1 \oplus E_2$ ，且

$$\begin{cases} V(t, x_0, y_0) \leq 0, & (x_0, y_0)^T \in E_1 \\ V(t, x_0, y_0) \geq 0, & (x_0, y_0)^T \in E_2 \end{cases}$$

设 $(x(t), y(t))^T = (x(t, 0, x_0, y_0), y(t, 0, x_0, y_0))^T$ 是方程 (7) 过点 $(0, (x_0, y_0)^T)$ 的解，则

$$\begin{aligned} V'_{(7)}(t, x(t), y(t)) &= (x(t), y(t)) \cdot \\ &\begin{pmatrix} -(a - b\varphi^{m-1}(t)) & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} (x(t), y(t))^T = \\ &-(a - b\varphi^{m-1}(t))x^2(t) - y^2(t) \leq \\ &-(a - bQ^{m-1})x^2(t) - y^2(t) \leq \\ &-(a - bQ^{m-1})(x^2(t) + y^2(t)) \end{aligned}$$

于是，

$$\begin{cases} V(t, x(t), y(t)) \leq 0, t \geq 0, (x_0, y_0)^T \in E_1 \\ V(t, x(t), y(t)) \geq 0, t \leq 0, (x_0, y_0)^T \in E_2 \end{cases}$$

从而，见文 [9]，存在两个一维解子空间 M_1, M_2 满足

$$\begin{cases} V(t, x(t), y(t)) \leq 0, (x(t), y(t))^T \in M_1, t \in \mathbb{R} \\ V(t, x(t), y(t)) \geq 0, (x(t), y(t))^T \in M_2, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

取 Lyapunov 函数 $W(t, x, y) = V(t, x, y) + \varepsilon(x^2 + y^2)$ ，其中，选取 ε 充分小，使得 $a - bQ^{m-1} - \varepsilon(1 + a + bQ^{m-1}) > 0$ ，则有

$$\begin{aligned} W'_{(7)}(t, x(t), y(t)) &\leq -(a - bQ^{m-1})(x^2(t) + \\ &y^2(t)) + \varepsilon(2x(t)y(t) + 2y(t)(a - b\varphi^{m-1}(t))x(t)) \leq \\ &-(a - bQ^{m-1})(x^2(t) + y^2(t)) + \\ &\varepsilon(1 + (a - b\varphi^{m-1}(t)))(x^2(t) + y^2(t)) \leq \\ &-((a - bQ^{m-1}) - \varepsilon(1 + a + bQ^{m-1})) \cdot \\ &(x^2(t) + y^2(t)) = -L(x^2(t) + y^2(t)) \quad (8) \end{aligned}$$

其中 $L = a - bQ^{m-1} - \varepsilon(1 + a + bQ^{m-1}) > 0$ 。设 $(x(t), y(t))^T \in M_2$ ，则 $V(t, x(t), y(t)) \geq 0$ ，

$$\begin{aligned} \varepsilon(x^2(t) + y^2(t)) &\leq W(t, x(t), y(t)) \leq \\ &\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right)(x^2(t) + y^2(t)) \quad (9) \end{aligned}$$

注意到 (8) 与 (9)，有

$$\begin{aligned} W'(t, x(t), y(t)) &\leq -L(x^2(t) + y^2(t)) \leq \\ &-\frac{2L}{1+2\varepsilon}W(t, x(t), y(t)) \quad (10) \end{aligned}$$

因此，

$$W(t, x(t), y(t)) \leq e^{-\frac{2L}{1+2\varepsilon}(t-s)}W(s, x(s), y(s)), t \geq s$$

再由 (9)，得

$$\begin{aligned} \varepsilon(x^2(t) + y^2(t)) &\leq \frac{1+2\varepsilon}{2}e^{-\frac{2L}{1+2\varepsilon}(t-s)} \cdot \\ &(x^2(t) + y^2(t)), t \geq s \end{aligned}$$

从而,

$$| (x(t), y(t))^T | \leq \sqrt{\frac{1+2\epsilon}{2\epsilon}} e^{-\frac{t}{1+2\epsilon}(t-s)} | (x(s), y(s))^T |, t \geq s$$

类似上述论述, 对 $(x(t), y(t))^T \in M_1$, 可以得到

$$| (x(t), y(t))^T | \leq \sqrt{\frac{1+2\epsilon}{2\epsilon}} e^{-\frac{t}{1+2\epsilon}(s-t)} | (x(s), y(s))^T |, s \geq t$$

由 $Q = \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi(t)| < \infty$, 知 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a - b\varphi^{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix}$ 是有界的, 由 [9], 知方程 (7) 是有界增长的, 因此具有指数型二分性, 且 k, α 不依赖于 $\varphi(t)$. 证毕.

引理 3^[3] 对于二阶标量微分方程

$$y'' - p(t)y = q(t) \quad (11)$$

其中, $p(t) \geq c > 0, q(t)$ 是 \mathbb{R} 上的有界连续函数, 则方程 (11) 有唯一的有界解 $y(t)$, 满足 $|y(t)| \leq \frac{1}{c} \sup_{t \in \mathbb{R}} |q(t)|$.

引理 4 设 f 是 \mathbb{R} 上的有界连续函数, 存在 $M > 0$, 使得 $|f(t)| \leq M(a - bM^{m-1})$, 则方程 (3) 有唯一有界解 $x(t)$ 满足 $|x(t)| < M$.

证明 令 $x' = y$, 方程 (3) 可以化为如下方程组

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a - bx^{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (12)$$

记 $C = \{(x(t), y(t))^T : x(t), y(t) \text{ 是 } \mathbb{R} \text{ 上的有界连续函数}\}$,

$$C_0 = \{ (x(t), y(t))^T : (x(t), y(t))^T \in C, |x(t)| \leq M, |y(t)| \leq \frac{2k}{a} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \}$$

其中 k, a 分别是方程组 (7) 指数型二分性中的常数. 对 $(x(t), y(t))^T \in C$, 定义

$$\| (x(t), y(t))^T \|_{[-j, j]} = \sup_{t \in [-j, j]} | (x(t), y(t))^T |, \| (x(t), y(t))^T \| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\| (x(t), y(t))^T \|_{[-j, j]}}{2^j (1 + \| (x(t), y(t))^T \|_{[-j, j]})}$$

则 $(C, \|\cdot\|)$ 是赋范线性空间, 且序列 $\{(x_n(t), y_n(t))^T\} \subset C$ 在 C 中收敛等价于在 \mathbb{R} 的任一紧子集上一致收敛.

任取 $(\varphi(t), \psi(t))^T \in C_0$, 考察如下方程

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a - b\varphi^{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (13)$$

由引理 2 知, 方程 (7) 在 \mathbb{R} 上有指数型二分性,

即

$$\begin{cases} |X_\varphi(t)P_\varphi X_\varphi^{-1}(s)| \leq ke^{-a(t-s)}, t \geq s \\ |X_\varphi(t)(I - P_\varphi)X_\varphi^{-1}(s)| \leq ke^{-a(s-t)}, s \geq t \end{cases}$$

其中 X_φ 是方程 (7) 的基本解矩阵, P_φ 是投影矩阵, 正常数 k, a 不依赖于 φ , 则方程 (13) 唯一有界解 $(x_\varphi(t), y_\varphi(t))^T$ 为

$$\begin{pmatrix} x_\varphi(t) \\ y_\varphi(t) \end{pmatrix} = \int_{-\infty}^t X_\varphi(t)P_\varphi X_\varphi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds - \int_t^{\infty} X_\varphi(t)(I - P_\varphi)X_\varphi^{-1}(s) \begin{pmatrix} 0 \\ f(s) \end{pmatrix} ds \quad (14)$$

直接计算得, $\left| \begin{pmatrix} x_\varphi(t) \\ y_\varphi(t) \end{pmatrix} \right| \leq \frac{2k}{a} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, 进而,

$$|x_\varphi(t)| \leq \frac{2k}{a} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|.$$

注意到 x_φ 是方程

$$x'' - (a - b\varphi^{m-1}(t))x = f(t)$$

的解, 且 $a - b\varphi^{m-1}(t) \geq a - bM^{m-1} > 0$, 由引理 3 得,

$$|x_\varphi(t)| \leq \frac{1}{a - bM^{m-1}} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \leq M$$

定义算子

$$T: C_0 \rightarrow C_0$$

$$(\varphi(t), \psi(t))^T \mapsto (x_\varphi(t), y_\varphi(t))^T$$

则 $TC_0 \subset C_0$.

下证 T 是连续的紧算子. 取序列 $\{(\varphi_n(t), \psi_n(t))^T\} \subset C_0$, 有

$$\begin{pmatrix} x_{\varphi_n}(t) \\ y_{\varphi_n}(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix}$$

且 $|x_{\varphi_n}(t)| \leq M, |y_{\varphi_n}(t)| \leq \frac{2k}{a} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$. 由于 $(x_{\varphi_n}(t), y_{\varphi_n}(t))^T$ 是方程

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a - b\varphi_n^{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (15)$$

的有界解, 注意到 $\varphi_n(t)$ 及 f 的有界性, 由 Ascoli 引理知, 存在 $(x_{\varphi_n}(t), y_{\varphi_n}(t))^T$ 的子序列 $(x_{\varphi_{n_i}}(t), y_{\varphi_{n_i}}(t))^T$ 在 \mathbb{R} 的任一紧子集上一致收敛, 即 $(x_{\varphi_{n_i}}(t), y_{\varphi_{n_i}}(t))^T$ 在 C 中收敛, 从而, T 是紧算子.

一方面, 设 $(\varphi_n(t), \psi_n(t))^T$ 收敛到 $(\varphi(t), \psi(t))^T$, 则 $(\varphi(t), \psi(t))^T \in C_0$. 另一方面, 设

$$\left\{ T \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} \right\} \text{ 收敛到 } (x^*(t), y^*(t))^T \in C_0, \text{ 知 } (x^*(t), y^*(t))^T \text{ 是方程}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a - b\varphi^{m-1}(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(t) \end{pmatrix} \quad (16)$$

的有界解。由方程 (16) 在 \mathbb{R} 上有界解存在的唯一性知,

$$\begin{pmatrix} x^*(t) \\ y^*(t) \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$$

即 $\left\{ T \begin{pmatrix} \varphi_n(t) \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} \right\}$ 收敛到 $T \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix}$, 从而 T 是连续算子。由不动点定理知, 方程 (12) 存在解 $(x(t), y(t))^T \in C_0$, 即方程 (3) 存在有界解 $x(t)$, 满足 $|x(t)| \leq M$ 。

定理 1 的证明 由引理 4 的证明知, 方程 (12) 在 \mathbb{R} 上的有界解 $(\varphi^*(t), \psi^*(t))^T$, 满足 $|\varphi^*(t)| \leq M, |\psi^*(t)| \leq \frac{2k}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$ 。设

$$D = \{ (x, y)^T : |x| \leq M, |y| \leq \frac{2k}{\alpha} \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)| \}$$

定义

$$U(t, x, y) = - (x - \varphi^*(t))(y - \psi^*(t)), x, y \in D$$

则

$$\begin{aligned} U'_{(12)}(t, x(t), y(t)) &= \\ &- (y(t) - \psi^*(t))^2 - (x(t) - \varphi^*(t)) \cdot \\ &(a(x(t) - \varphi^*(t)) - b(x^{m-1}(t) - \varphi^{*m-1}(t))) = \\ &- (y(t) - \psi^*(t))^2 - (x(t) - \varphi^*(t))^2 \\ &(a - b(x^{m-1}(t) + x^{m-2}(t)\varphi^*(t) + \dots + \\ &x(t)\varphi^{*m-2}(t) + \varphi^{*m-1}(t))) = \\ &- (y(t) - \psi^*(t))^2 - (a - bmM^{m-1}) \cdot \\ &(x(t) - \varphi^*(t))^2 \leq - \min\{1, a - bmM^{m-1}\} \\ &((x(t) - \varphi^*(t))^2 + (y(t) - \psi^*(t))^2) \end{aligned}$$

由 [10] 定理 19.5 知, 方程 (12) 有概周期解 $(x(t), y(t))^T$, 满足 $|x(t)| < M, \text{mod}(x) \subset \text{mod}(f)$, 即方程 (3) 有概周期解 $x(t)$ 。

下证唯一性。设方程 (3) 有另一概周期解 $\bar{x}(t)$, 满足 $|\bar{x}(t)| \leq M, \bar{x}(t) - x(t)$ 是方程

$$\ddot{z}(t) - g(t)z(t) = 0$$

的解, 其中 $g(t) = a - b(\bar{x}^{m-1}(t) + \bar{x}^{m-2}(t)x(t) + \dots + \bar{x}(t)x^{m-2}(t) + x^{m-1}(t))$, 并且 $g(t) \geq a - bmM^{m-1} > 0$, 由引理 3 知, $\bar{x}(t) = x(t)$ 。证毕。

为了证明定理 2, 我们给出一些记号。设 $X = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$, 记 $|X| = (|x_1|, |x_2|)^T, \|X\| = \max\{|x_1|, |x_2|\}, X \geq 0$ 意味着 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$ 。类似地, 可以定义 $X > 0$ 。对 $Y \in \mathbb{R}^2, X \geq Y (X > Y)$, 即 $X - Y \geq 0 (X - Y > 0)$ 。记

$$AP(\mathbb{R}^2) = \{ \varphi : \varphi = (\varphi_1(t), \varphi_2(t))^T,$$

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in AP(\mathbb{R}) \}$$

对 $\varphi \in AP(\mathbb{R}^2)$, 定义 $\|\varphi\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\varphi(t)\|$, 则 $(AP(\mathbb{R}^2), \|\cdot\|_\infty)$ 是一个 Banach 空间。

定理 2 的证明 令 $y = x' + \delta x$, 则方程 (4) 化为

$$\begin{cases} x' = -\delta x + y \\ y' = \delta y - \delta^2 x + \sum_{i=1}^n a_i x^{2i-1} + f(t) \end{cases} \quad (17)$$

对 $\varphi \in AP(\mathbb{R}^2)$, 考虑如下方程

$$\begin{cases} x' = -\delta x + \varphi_2(t) \\ y' = \delta y - \delta^2 \varphi_1(t) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_1^{2i-1}(t) + f(t) \end{cases} \quad (18)$$

其解可以表示为

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)} \varphi_2(s) ds \\ - \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} (-\delta^2 \varphi_1(s) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_1^{2i-1}(s) + f(s)) ds \end{pmatrix}$$

定义映射

$$F: AP(\mathbb{R}^2) \rightarrow AP(\mathbb{R}^2),$$

$$F\varphi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \varphi \in AP(\mathbb{R}^2)$$

记

$$\Omega = \left\{ \varphi \in AP(\mathbb{R}^2) : \|\varphi - \varphi_0\|_\infty \leq \frac{l\theta}{1-\theta} \right\}$$

其中 $\varphi_0(t) = (0, -\int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} f(s) ds)$, 则 Ω 是 $AP(\mathbb{R}^2)$ 的闭凸子集。此外,

$$\|\varphi_0\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left\{ \left| \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} f(s) ds \right| \right\} \leq l$$

注意到, 对任意 $\varphi \in \Omega$,

$$\|\varphi\|_\infty \leq \|\varphi - \varphi_0\|_\infty + \|\varphi_0\|_\infty \leq$$

$$\frac{l\theta}{1-\theta} + l = \frac{l}{1-\theta} < 1$$

有

$$\|F\varphi - \varphi_0\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} \max \left\{ \left| \int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)} \varphi_2(s) ds \right|, \right.$$

$$\left. \left| \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} (-\delta^2 \varphi_1(s) + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_1^{2i-1}(s)) ds \right| \right\} \leq$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \max \left\{ \left| \int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)} \|\varphi\|_\infty ds \right|, \right.$$

$$\left. \left| \int_t^\infty e^{-\delta(s-t)} (|a_1 - \delta^2| \|\varphi\|_\infty + \sum_{i=2}^n |a_i| \|\varphi\|_\infty^{2i-1}) ds \right| \right\} \leq$$

$$\max \left\{ \frac{1}{\delta}, \frac{|a_1 - \delta^2| + \sum_{i=2}^n |a_i|}{\delta} \right\} \|\varphi\|_\infty =$$

$$\theta \|\varphi\|_{\infty} = \frac{l\theta}{1-\theta}$$

因此, F 是 Ω 到 Ω 的映射。下证 F 是压缩的。对任意 $\varphi \in \Omega$, 有

$$\begin{aligned} & |F\varphi(t) - F\psi(t)| = \\ & \left(\left| \int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)} (\varphi_2(s) - \psi_2(s)) ds \right|, \right. \\ & \left| \int_t^{\infty} e^{-\delta(s-t)} ((a_1 - \delta^2)(\varphi_1(s) - \psi_1(s)) + \right. \\ & \sum_{i=2}^n a_i (2i-1) (\psi_1(s) + h_i(s)\varphi_1(s))^{2i-2} \cdot \\ & \left. (\varphi_1(s) - \psi_1(s)) ds \right|^T = \\ & \left(\left| \int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)} (\varphi_2(s) - \psi_2(s)) ds \right|, \right. \\ & \left| \int_t^{\infty} e^{-\delta(s-t)} ((a_1 - \delta^2)(\varphi_1(s) - \psi_1(s)) + \right. \\ & \sum_{i=2}^n a_i (2i-1) (((1-h_i(s))\psi_1(s) + \\ & \left. h_i(s)\varphi_1(s))^{2i-2} ((\varphi_1(s) - \psi_1(s))) ds \right|^T \end{aligned}$$

其中 $0 \leq h_i(s) \leq 1, i = 2, \dots, n$, 则

$$\begin{aligned} & |F\varphi(t) - F\psi(t)| \leq \\ & \left(\int_{-\infty}^t e^{-\delta(t-s)} ds \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_2(t) - \psi_2(t)|, \right. \\ & \int_t^{\infty} e^{-\delta(s-t)} (|a_1 - \delta^2| \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| + \\ & \left. \sum_{i=2}^n (2i-1) |a_i| \left(\frac{2l}{1-\theta} \right)^{2i-2} \sup_{t \in \mathbb{R}} |\varphi_1(t) - \psi_1(t)| ds \right)^T \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} & \|F\varphi - F\psi\|_{\infty} \leq \\ & \max \left\{ \frac{1}{\delta}, \frac{|a_1 - \delta^2| + \sum_{i=2}^n (2i-1) |a_i| \left(\frac{2l}{1-\theta} \right)^{2i-2}}{\delta} \right\} \cdot \\ & \|\varphi - \psi\|_{\infty} = \lambda \|\varphi - \psi\|_{\infty} \end{aligned}$$

注意到, $\lambda < 1$, 故 T 是压缩的。由压缩映射的不动点原理知, 方程 (17) 有概周期解 $(x(t),$

$y(t))^T$, 从而, 方程 (4) 有概周期解 $x(t)$, 满足 $\sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)| < \frac{\theta l}{1-\theta}$ 。

参考文献:

- [1] HU Z S, MINGARELLI A B. On a question in the theory of almost periodic differential equations [J]. Proc Amer Math Soc, 1999, 127 (9): 2665-2670.
- [2] 何崇佑. 概周期微分方程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1992.
- [3] BERGER M S, CHEN Y Y. Forced quasiperiodic and almost periodic oscillations of nonlinear Duffing equations [J]. Nonlinear Analysis, 1992, 19 (3): 249-257.
- [4] ZENG W Y. Almost periodic solutions for nonlinear Duffing equations [J]. Acta Mathematica Sinica, New Series, 1997, 13 (3): 373-380.
- [5] 袁荣. Duffing 方程概周期解的存在性[J]. 北京师范大学学报: 自然科学版, 1996, 32 (3): 296-301.
- [6] ZHOU Y Y, LIU B W. New results on almost periodic solutions for a class of nonlinear Duffing equations with a deviating argument [J]. Applied Mathematics Letters, 2009, 22 (1): 6-11.
- [7] COTI ZELATI V, MONTECCHIARI P, NOLASCO M. Almost periodic solutions for a class of Duffing-like systems [J]. Differential Integral Equations, 1998, 11 (4): 623-640.
- [8] MAWHIN J. Bounded and almost periodic solutions of nonlinear differential equations: variational vs nonvariational approach [J]. Calculus of Variations and Differential Equations (Haifa, 1998), Chapman Hall/CRC Res Notes Math, 410, Chapman Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2000: 167-184.
- [9] COPPEL W A. Dichotomies in Stability Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1978.
- [10] YOSHIZAWA T. Stability theory and the existence of periodic and almost periodic solutions of differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1975.