

幅值调节力驱动的 Josephson 系统的异宿分支与混沌*

石艳香^{1,2}, 郝江辉³, 白定勇², 刘桂荣¹

- (1. 山西大学数学科学学院, 山西 太原 030006;
2. 广州大学数学与信息科学学院, 广东 广州 510006;
3. 潞安集团余吾煤业公司自动化科, 山西 长治 046103)

摘要: 对幅值调节力驱动的 Josephson 系统的异宿分支和混沌进行了研究。利用 Melnikov 理论方法, 得到 Josephson 系统存在混沌的分支条件, 同时利用数值模拟, 显示分支参数对系统动力学行为的影响。数值模拟包括不动点的分支图、相图、系统分支图。通过数值模拟, 不仅可以验证理论方法的结果, 并且可以得到很多新的动力学行为。理论分析和数值模拟结果表明: 幅值调节力中的振幅 f 和频率 Ω 对系统动力学行为有重要的影响。

关键词: Melnikov 方法; 混沌; 分支; 幅值调节力

中图分类号: O175; O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2011) 05-0021-08

Heteroclinic Bifurcation and Chaos in Josephson System Driven by an Amplitude-Modulated Force

SHI Yanxiang^{1,2}, HAO Jianghui³, BAI Dingyong², LIU Guirong¹

- (1. School of Mathematical Sciences, Shanxi University, Taiyuan 030006, China;
2. School of Mathematics and Information Sciences, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China;
3. Automation Division, Yu'Wu Coal Industry Company of Lu'An Group, Changzhi 046103, China)

Abstract: The heteroclinic bifurcation and chaos in Josephson system subjected to an amplitude-modulated force are discussed. By using Melnikov method, the bifurcation conditions of chaotic motion are obtained. The effects of the bifurcation parameters on dynamical behaviors are also studied by using numerical simulations. Numerical simulations including bifurcation diagram of the fixed points, phase portraits, bifurcation diagrams of the system, not only show the consistence with the theoretical analysis but also exhibit the more new complex dynamical behaviors. The results of theoretical analysis and numerical simulations show that the amplitude f and the frequency Ω of the amplitude-modulated force play very important role for dynamics of the system.

Key words: Melnikov method; chaos; bifurcation; amplitude-modulated force

近几年, 有很多研究专注于非线性系统中不同周期力的影响。例如, 由扭曲力产生的混沌行为^[1], 周期脉冲产生的复合周期加倍^[2], 周期外力产生的混沌反控制^[3], 带有不同周期外力的随机共振^[4]等等。研究的方法包括多重进位扰动理论和 Melnikov 方法, 这些方法用于研究由不同周

期力驱动的非线性系统的非线性共振和同宿分支。

本文研究幅值调节力对 Josephson 系统的影响, 系统如下

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x - k \sin 2x + \varepsilon[\beta - \alpha(1 + k \cos x)y + (f + 2g \cos \omega t) \sin \Omega t] \end{cases} \quad (1)$$

* 收稿日期: 2010-09-26

基金项目: 高校博士点资助项目 (20061078002); 广州市教育局市属高校科技资助项目 (08C015); 广东省自然科学基金博士科研启动资助项目 (9451009101003172); 数学天元青年基金资助项目 (10826080); 山西省青年科技研究基金资助项目 (2009021001-1)

作者简介: 石艳香 (1979 年生), 女, 讲师, 博士生; E-mail: hongyu1979321@163.com

这里 $\sin x + k\sin 2x$ 表示相位检测特性的混沌环; $\beta - \alpha(1 + k\cos x)y$ 表示理想滤波器的移位函数; $(f + 2g\cos \omega t)\sin \Omega t$ 是幅值调节力, f 是非调节载体的振幅, $2g$ 是调节度, ω 和 Ω 表示外力的两个频率。

许多实际问题的模型都是由此方程, 或者相似的方程描述的。Josephson 系统具有一个明显的特征, 即具有非线性属性。因此, 有必要去研究系统 (1), 以此来获得系统随不同的参数变动时的动态特征。Salam 等^[5] 和 Bartuccelli 等^[6] 利用 Melnikov 函数和定性分析, 提供分支图来证明对一些参数系统混沌的存在。带有一个周期外力的 Josephson 方程的研究见文献 [7-9]。Yang 等^[10] 研究了带有两个周期外力的 Josephson 系统的复杂动态, 得到了系统在周期扰动和拟周期扰动下混沌存在的准则。另外, Jing 等^[11-12] 研究受常数 dc 和 ac 驱动的 Josephson 系统, 显示出导致混沌的条件以及考虑了当锁相变化时, 对周期和次谐分支的影响。最近, Ravichandran 等^[13] 从理论分析和数值模拟两方面, 研究了受幅值调节力控制的 Duffing 振子的同宿分支和从正规到混沌的转变。本文研究系统 (1) 的异宿分支和混沌。利用 Melnikov 方法^[14], 得到异宿分支及混沌存在的条件。同时, 利用数值模拟研究分支参数对系统动力学行为的影响。数值模拟包括不动点的分支图、相图和系统分支图, 以此来验证理论分析, 并且还显示出新的动态行为: 包括在不同混沌区域中的 n 周期轨道, 一系列倍周期分支和逆倍周期分支, 带有复杂周期窗口和内部危机的瞬时混沌等。

1 非扰动系统的不动点和相图

若 $\varepsilon = 0$, 系统 (1) 可以写成如下非扰动形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x - k\sin 2x \end{cases} \quad (2)$$

系统 (2) 是一个 Hamilton 系统, Hamilton 函数为

$$H(x, y) = \frac{1}{2}y^2 - \cos x - \frac{k}{2}\cos 2x$$

势能函数为 $V(x) = -\cos x - \frac{k}{2}\cos 2x$ 。

Jacobian 矩阵为 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x - 2k\cos 2x & 0 \end{pmatrix}$,

特征方程为

$$\lambda^2 + \cos x + 2k\cos 2x = 0 \quad (3)$$

通过对系统 (2) 不动点 (x_j, y_j) 稳定性分析, 可以得到如下结论。

引理 1 1) 当 $0 < k \leq \frac{1}{2}$, 系统 (2) 有有限

个不动点 $(m\pi, 0)$, 这里 $m \in \mathbb{Z}$ 。如果 m 是偶数, 从 (3) 知不动点的特征值是 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 + 2k} i$, 是纯虚数, 则 $(m\pi, 0)$ 是中心。

(i) 当 $0 < k < \frac{1}{2}$, 如果 m 是奇数, 不动点 $(m\pi, 0)$ 的特征值是 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 - 2k}$, 则 $(m\pi, 0)$ 是鞍点;

(ii) 当 $k = \frac{1}{2}$, 如果 m 是奇数, 不动点 $(m\pi, 0)$ 的特征值是 $\lambda_{1,2} = 0$, 则 $(m\pi, 0)$ 是带有零特征值的分支点。

2) 当 $k > \frac{1}{2}$, 在区间 $[-8, 8]$ 上有 9 个不动点:

(i) $O(0, 0)$ 和 $C_{7,8}(\pm 2\pi, 0)$ 是中心 (从 (3) 知其特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{1 + 2k} i$); $C_{3,4}(\pm \pi, 0)$ 也是中心 (从 (3) 知其特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2k - 1} i$);

(ii) $C_{1,2}(\pm x_1, 0)$ 和 $C_{5,6}(\pm x_2, 0)$ 是鞍点 (从 (3) 知其特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm \sqrt{2k - \frac{1}{2}}$)。这里 x_1 和 x_2 是方程 $\sin x = -k\sin 2x$ 分别在区间 $(0, \pi)$ 和 $(0, 2\pi)$ 上的根。

图 1 (a) 和 (b) 分别是系统 (2) 当 $k = 1$ 时不动点的分支图和相图。

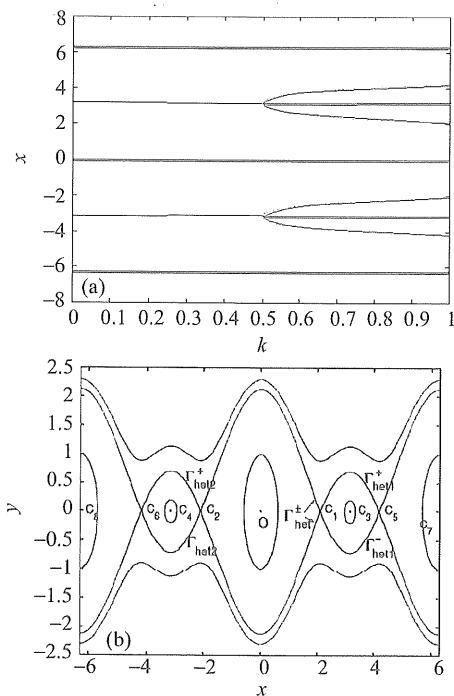


图 1 系统 (2) 不动点的分支图和相图, 这里 $k = 1$

Fig. 1 Bifurcation diagram of fixed points and phase portrait of the system (2) for $k = 1$

从图 1 (a) 中可知, 系统 (2) 在 $k = \frac{1}{2}$ 处经历了鞍结点分支。在区间 $[-8, 8]$ 上, 当 $0 < k < \frac{1}{2}$ 时系统有 5 个不动点, 当 $k > \frac{1}{2}$ 时系统有 9 个不动点。从图 1 (b) 中知, $C_{1,2}(\pm x_1, 0)$ 通过两条异宿轨道 Γ_{het}^{\pm} 连接, $C_1(x_1, 0)$ 和 $C_5(x_2, 0)$ 通过两条异宿轨道 Γ_{het1}^{\pm} 连接, $C_2(-x_1, 0)$ 和 $C_6(-x_2, 0)$ 通过两条异宿轨道 Γ_{het2}^{\pm} 连接。

在下面的讨论中, 研究 $k > \frac{1}{2}$ 时系统 (1) 在幅值调节力下的动力学行为。

2 计算 Melnikov 函数

系统 (1) 可改写为如下的自治形式

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -\sin x - k \sin 2x + \varepsilon[\beta - \alpha(1 + k \cos x)y + (f + 2g \cos \varphi_1) \sin \varphi_2], \\ \dot{\varphi}_1 = \omega, \\ \dot{\varphi}_2 = \Omega \end{cases} \quad (4)$$

通过上一节的分析知道, 当 $k > \frac{1}{2}$ 时, 非扰动系统 (2) 有 6 条异宿轨道 $\Gamma_{het}^{\pm}, \Gamma_{het1}^{\pm}$ 和 Γ_{het2}^{\pm} 。当添加扰动项之后, 原先闭合的异宿轨道将会破裂, 即产生横截异宿轨道。由 Melnikov 本人提出的 Melnikov 方法最早是一种扰动方法, 用于证明横截同宿或者异宿轨道的存在。由 Smale-Birkhoff 定理^[14]知, 这样轨道的存在将会导致混沌行为的产生。Melnikov 方法的主要思想是对扰动系统, 寻找一个可以度量鞍点的稳定流形和不稳定流形之间距离的测度函数。如果参数取一些分支值时 Melnikov 函数有简单零点存在, 则鞍点的稳定流形和不稳定流形将会在远离鞍点或者 Poincare 横截面上的点之外横截相交。通过对 Poincare 截面的理论分析, 如果鞍点的稳定流形和不稳定流形横截相交一次, 则他们会相交无限次, 因此形成了一类 Smale 马蹄映射, 从而导致混沌的产生。

假设未扰动系统的异宿轨道为 $(x_0, y_0) = (x_0(t), y_0(t))$, 则系统 (4) 的 Melnikov 函数为

$$M(t_0) = \beta \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) dt - \alpha \int_{-\infty}^{+\infty} y_0^2(t) (1 + k \cos x_0(t)) \cdot dt + \int_{-\infty}^{+\infty} y_0(t) (f + 2g \cos \omega(t + t_0)) \sin \Omega(t + t_0) dt \quad (5)$$

这里 t_0 是 Poincare 映射与横截面相交的时间, 也可

理解为外力项的初始时刻。

对于异宿轨道 $\Gamma_{het}^{\pm}, \Gamma_{het1}^{\pm}, \Gamma_{het2}^{\pm}$ 的 Melnikov 函数, 式 (5) 可简化为

$$\begin{aligned} M(t_0) = & 2\beta \int_0^{+\infty} y_0(t) dt - 2\alpha \int_0^{+\infty} y_0^2(t) (1 + \\ & k \cos x_0(t)) dt + 2f \sin \Omega t_0 \int_0^{+\infty} y_0(t) \cos \Omega t dt + \\ & 2g \sin(\Omega + \omega) t_0 \int_0^{+\infty} y_0(t) \cos(\Omega + \omega) t dt + \\ & 2g \sin(\Omega - \omega) t_0 \int_0^{+\infty} y_0(t) \cos(\Omega - \omega) t dt = \\ & 2[\beta A_1 - \alpha A_2(k) + f A_3(\Omega) \sin \Omega t_0 + g A_4(\Omega + \omega) \cdot \\ & \sin(\Omega + \omega) t_0 + g A_5(\Omega - \omega) \sin(\Omega - \omega) t_0] \end{aligned} \quad (6)$$

这里 $A_1 = \int_0^{+\infty} y_0(t) dt$ 是常数, 如果 $y_0(t)$ 给定;

$$\begin{aligned} A_2(k) = & \int_0^{+\infty} y_0^2(t) (1 + k \cos x_0(t)) dt; A_3(\Omega) = \\ & \int_0^{+\infty} y_0(t) \cos \Omega t dt; A_4(\Omega + \omega) = \int_0^{+\infty} y_0(t) \cos(\Omega + \\ & \omega) t dt; A_5(\Omega - \omega) = \int_0^{+\infty} y_0(t) \cos(\Omega - \omega) t dt. \end{aligned}$$

3 $\Omega = \omega$ 时幅值调节力对系统的影响

通过理论分析和数值模拟, 研究当 $\Omega = \omega$ 时系统 (1) 马蹄混沌的产生, 有以下 3 种情形

Case 1: $g = 0$;

Case 2: g 固定不变;

Case 3: f 固定不变。

3.1 $g = 0$ 时的异宿分支与混沌

当 $g = 0$ 时, 系统 (1) 由正弦外力 $f \sin \Omega t$ 驱使, 则 Melnikov 函数 (6) 为

$$M(t_0) = 2[\beta A_1 - \alpha A_2(k) + f A_3(\Omega) \sin \Omega t_0]$$

因此, 如果

$$|f| > \left| \frac{\beta A_1 - \alpha A_2(k)}{A_3(\Omega)} \right| = |R_1(\beta, \alpha, k, \Omega)|$$

则存在一个 t_{01} , 使得 $M(t_{01}) = 0$ 以及 $\frac{\partial M}{\partial t_0} \Big|_{t_0=t_{01}} \neq 0$, 可得到如下定理。

定理 1 系统 (4) 在

$$f = \pm R_1(\beta, \alpha, k, \Omega)$$

处发生异宿分支, 说明如果 $\varepsilon > 0$ 充分小, 则横截异宿轨道存在, 系统 (4) 可能产生混沌。

图 2(a)-(d) 分别给出了系统 (1) 在 (f, x) , (α, x) 和 (β, x) 平面上的分支图, 这里 (a) $g = 0, \beta = 0.02, \alpha = 0.2, k = 1$; (b) $g = 0, \beta = 0.02, f = 2, k = 1$; (c) $g = 0, \beta = 0.004, f = 1.5, k = 1$;

(d) $g = 0, \alpha = 0.2, f = 1, k = 1$.

从图 2(a)-(c), 看到混沌状态与周期状态的交替出现。从图 2(d), 发现带有周期窗口和内部危机的瞬时混沌。图 3 给出了对应于图 2 的相图。

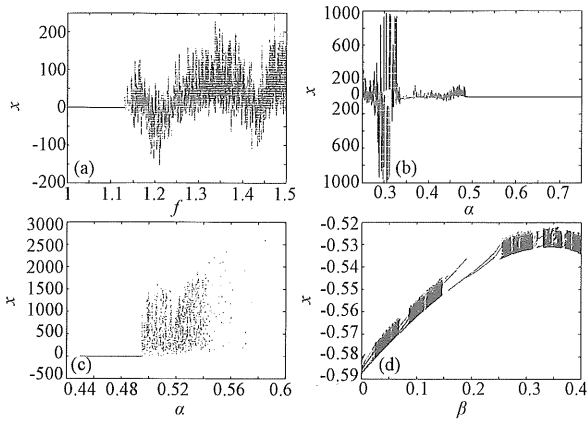


图 2 (a) 系统 (1) 在 (f, x) 平面的分支图;
 (b-c) 系统 (1) 在 (α, x) 平面的分支图;
 (d) 系统 (1) 在 (β, x) 平面的分支图
 Fig. 2 (a) Bifurcation diagram in (f, x) plane;
 (b-c) Bifurcation diagram in (α, x) plane;
 (d) Bifurcation diagram in (β, x) plane

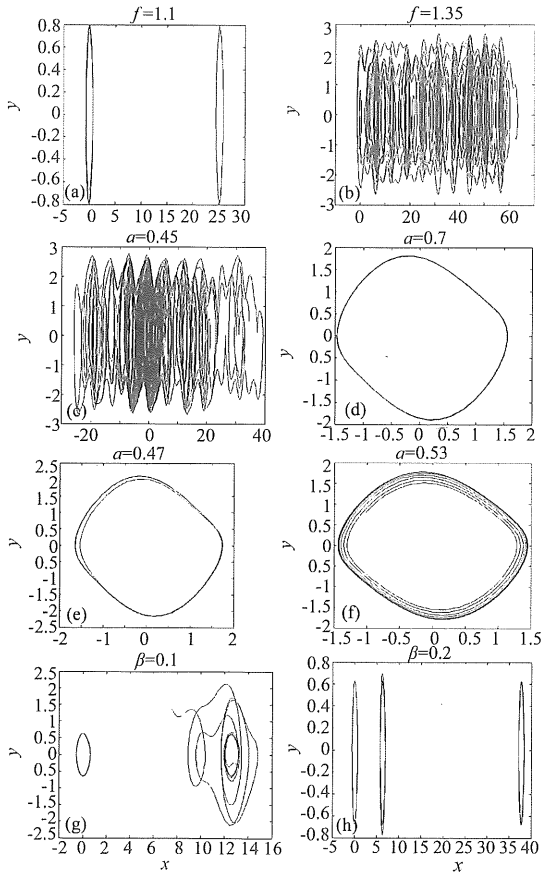


图 3 (a-b) 对应图 2(a) 的相图; (c-d) 对应图 2(b) 的相图;
 (e-f) 对应图 2(c) 的相图; (g-h) 对应图 2(d) 的相图。
 Fig. 3 (a-b) Phase portraits corresponding to Fig. 2 (a);
 (c-d) Phase portraits corresponding to Fig. 2 (b); (e-f)
 Phase portraits corresponding to Fig. 2 (c); (g-h) Phase portraits
 corresponding to Fig. 2 (d)

3.2 g 固定不变时的异宿分支与混沌

g 的值固定不变, 当 $\Omega = \omega$ 时, Melnikov 函数 (6) 为

$$M(t_0) = 2[\beta A_1 - \alpha A_2(k) + f A_3(\Omega) \sin \Omega t_0 + g A_4(2\Omega) \sin(2\Omega) t_0]$$

因此, 如果

$$|f| > \left| \frac{\beta A_1 - \alpha A_2(k) + g A_4(2\Omega)}{A_3(\Omega)} \right| = |R_2(\beta, \alpha, k, \Omega, g)|$$

则存在一个 t_{02} , 使得 $M(t_{02}) = 0$ 以及 $\frac{\partial M}{\partial t_0} \Big|_{t_0 = t_{02}} \neq 0$,

可得到如下定理。

定理 2 系统 (4) 在

$$f = \pm R_2(\beta, \alpha, k, \Omega, g)$$

处发生异宿分支, 说明如果 $\varepsilon > 0$ 充分小, 则横截异宿轨道存在, 系统 (4) 可能产生混沌。

图 4 (a) 和 (b) 分别给出了系统 (1) 在 (f, x) 和 (β, x) 平面上的分支图, 这里 (a) $g = 0.1, \beta = 0.02, \alpha = 0.2, k = 1$; (b) $g = 0.1, f = 0.2, \alpha = 0.2, k = 1$ 。

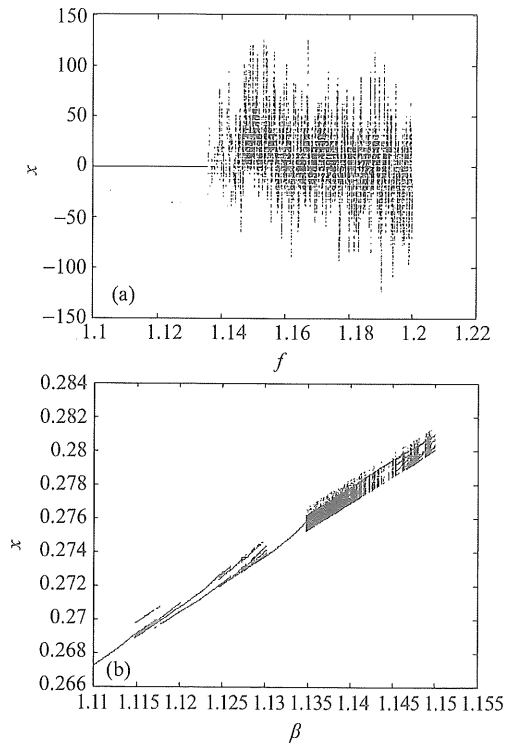


图 4 (a) 系统 (1) 在 (f, x) 平面的分支图;
 (b) 系统 (1) 在 (β, x) 平面的分支图
 Fig. 4 (a) Bifurcation diagram in (f, x) plane;
 (b) Bifurcation diagram in (β, x) plane

从图 4 中可以看到混沌状态与周期状态的交替发生, 带有复杂周期窗口与内部危机的瞬时混沌。

图 5 (a) 和 (b) 分别给出当 $f = 1.15$ 和 $\beta = 1.137$ 的相图。

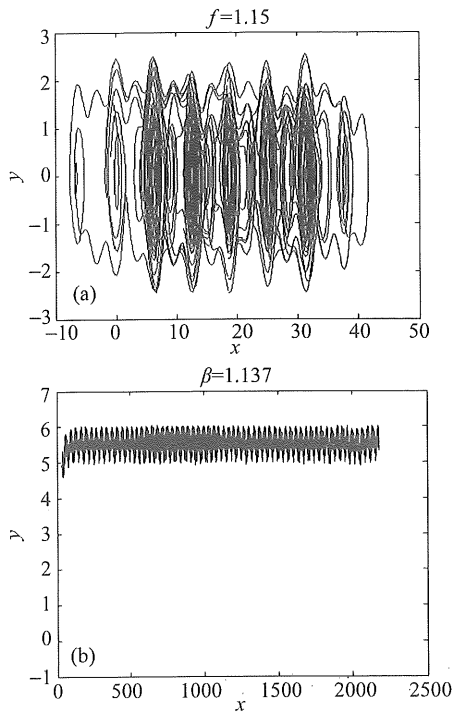


图 5 对应于图 4 的相图

Fig. 5 Phase portrait corresponding to Fig. 4

3.3 f 固定不变时的异宿分支与混沌

f 的值固定不变, 当 $\Omega = \omega$, 使 Melnikov 函数 $M(t_0)$ 具有简单零点的必要条件是

$$|g| > \left| \frac{\beta A_1 - \alpha A_2(k) + f A_3(\Omega)}{A_4(2\Omega)} \right| = |R_3(\beta, \alpha, k, \Omega, f)|,$$

则存在一个 t_{03} , 使得 $M(t_{03}) = 0$ 以及 $\frac{\partial M}{\partial t_0} \Big|_{t_0=t_{03}} \neq 0$,

则可得到如下定理。

定理 3 系统 (4) 在

$$g = \pm R_3(\beta, \alpha, k, \Omega, f)$$

处发生异宿分支, 说明如果 $\varepsilon > 0$ 充分小, 则横截异宿轨道存在, 系统 (4) 可能产生混沌。

图 6 (a) 和 (b) 分别给出了系统 (1) 在 (g, x) 和 (α, x) 平面上的分支图, 这里 (a) $f = 0.2, \beta = 0.02, \alpha = 0.2, k = 1$; (b) $f = 0.2, \beta = 0.02, g = 0.1, k = 1$; 图 6 (c) 和 (d) 分别是图 6 (a) 和 (b) 的局部放大分支图。

从图 6 (c) 看到, 当 $g = 1.64$ 和 $g = 1.68$ 时带有周期 -2 窗口和内部危机的混沌区域。图 7 (a) 和 (b) 分别给出 $g = 1.645$ 和 $\alpha = 0.05$ 时的相图。

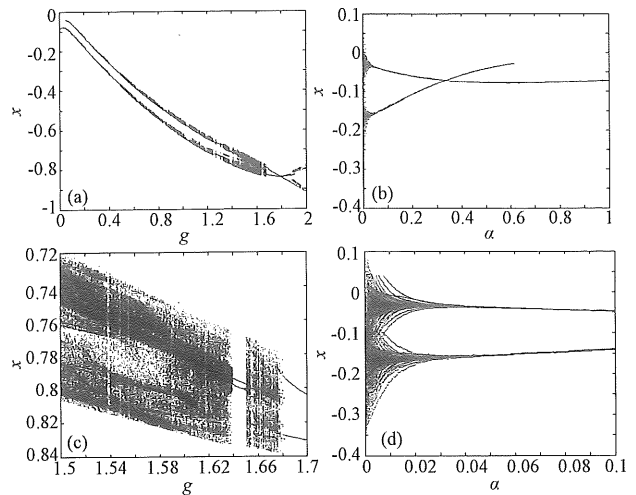


图 6 (a) 系统 (1) 在 (g, x) 平面的分支图;

(b) 系统 (1) 在 (α, x) 平面的分支图;

(c) 对应 (a) 的局部放大分支图, 这里 $1.5 < g < 1.7$;

(d) 对应 (b) 的局部放大分支图, 这里 $0 < \alpha < 0.1$

Fig. 6 (a) Bifurcation diagram in (g, x) plane;

(b) Bifurcation diagram in (α, x) plane;

(c) Local amplification of (a) for $1.5 < g < 1.7$;

(d) Local amplification of (b) for $0 < \alpha < 0.1$

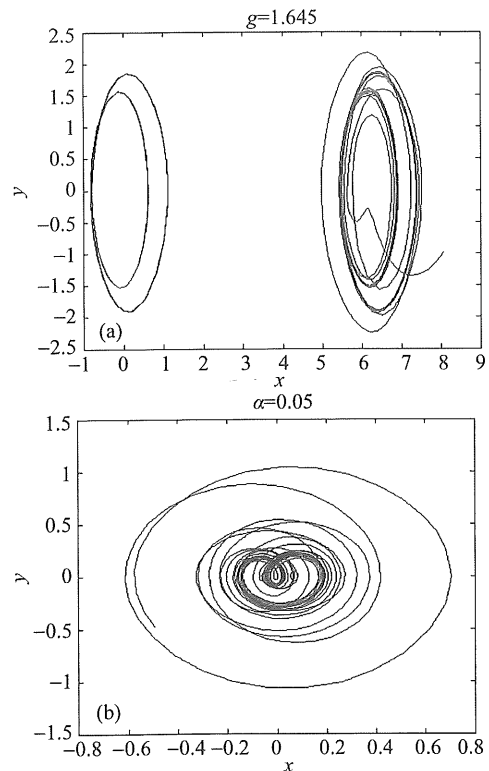


图 7 (a) 对应图 6 (a) 的相图;

(b) 对应图 6 (b) 的相图

Fig. 7 (a) Phase portrait corresponding to Fig. 6 (a);

(b) Phase portrait corresponding to Fig. 6 (b)

4 $\Omega \neq \omega$ 时幅值调节力对系统的影响

通过数值模拟, 研究受幅值调节力驱动的系统 (1) 在不同频率 $\Omega \neq \omega$ 下的动力学行为。有以下两种情形

Case 1: Ω 和 ω 是可通约的;

Case 2: Ω 和 ω 是不可通约的。

4.1 Ω 和 ω 是可通约的

取参数值 $\beta = 0.02, \alpha = 0.2, k = 1, \omega = 1, \Omega = 2$ 。这种情形下外力是周期的。图 8(a) 给出了 $g = 0$ 而 f 是变化的分支图。图中可看出具有内部危机、间断动力学行为以及从 1, 2 周期开始到混沌的倍周期分支。研究当 f 分别固定在一正规区域和一混沌区域时, 系统 (1) 随控制参数 g 变化的动力学行为。当 $f = 1.18$ 且 $g = 0$ 时系统是周期的, 图 8(b) 是 g 从 0 到 1 的分支图。图 8(c) 是对应于 $f = 1.22$ 时的分支图 (当 $g = 0$ 时是混沌的)。图 8(d) 给出了 $f = 0$ 且 $g \in [0, 1]$ 时的分支图。图 8(e) 和 (f) 分别给出了当固定 g 为 $g = 0.63$ (周期区域) 和 $g = 0.66$ (混沌区域) 时的分支图, 从图中可以清晰的看出控制参数 f 对系统动力学的影响。

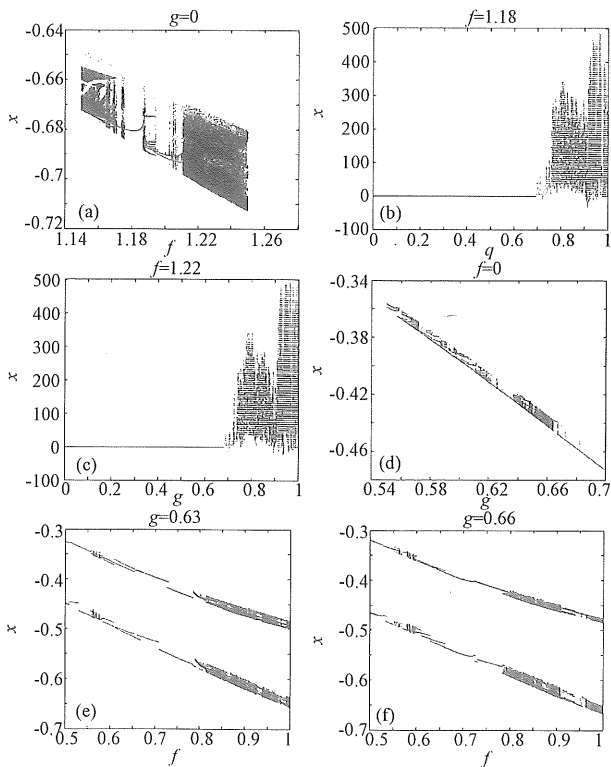


图 8 各种分支结构, 这里 $k = 1, \beta = 0.02,$

$$\omega = 1, \Omega = 2, \alpha = 0.2$$

Fig. 8 Bifurcation structures for $k = 1, \beta = 0.02,$

$$\omega = 1, \Omega = 2, \alpha = 0.2$$

4.2 Ω 和 ω 是不可通约的

取参数值 $\omega = 1$ 和 $\Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ 。这种情形下外力是拟周期的。图 9 对于两组 f 和 g 的值给出了分支结构图。在图 9 (a) 中 $f = 0.2$ 而 g 是变化的。图 10 (a) 给出了 $g = 0.5$ 时的相图。在图 9 (b) 中 f 是变化的而 $g = 0.1$, 从图中可以发现一个大范围的带有小拟周期窗口的混沌区域。图 10 (b) 给出了 $f = 0.5$ 时的相图。

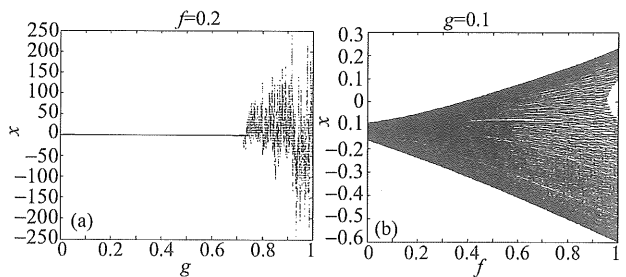


图 9 分支结构, 这里 $k = 1, \beta = 0.02,$

$$\omega = 1, \Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \alpha = 0.2$$

Fig. 9 Bifurcation structures for $k = 1, \beta = 0.02,$

$$\omega = 1, \Omega = \frac{\sqrt{5}-1}{2}, \alpha = 0.2$$

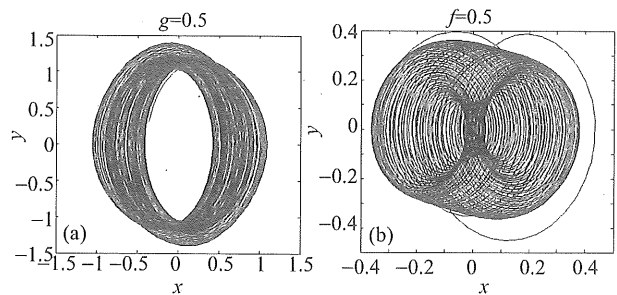


图 10 对应图 9 (a) 和 (b) 的相图

Fig. 10 Phase portraits for Fig. 9 (a) and (b)

5 系统 (1) 的其他分支结构和动力学行为

研究系统 (1) 的其他分支结构和动力学行为, 考虑以下 3 种分支参数情形

(i) β 为分支参数 ($0 \leq \beta \leq 0.05$), 固定 $\alpha = 0.2, g = 0.1, \omega = 1, \Omega = 2$ 和一些 f 值;

(ii) α 为分支参数 ($0 \leq \alpha \leq 0.5$), 固定 $f = 0.2, g = 0.1, \omega = 1$ 和一些 Ω 值;

(iii) Ω 为分支参数 ($0 \leq \Omega \leq 2$), 固定 $\beta = 0.002, f = 0.2, g = 0.1, \omega = 1$ 和一些 α 值。

情形 (i) 对不同的 f 值, 图 11 (a) - (d)

给出了系统 (1) 在 (β, x) 平面上的分支图, 显示出振幅 f 对系统动力学的影响。从图中可以看到混沌行为和周期行为交替出现, 并且发现带有复杂周期窗口的混沌区域。

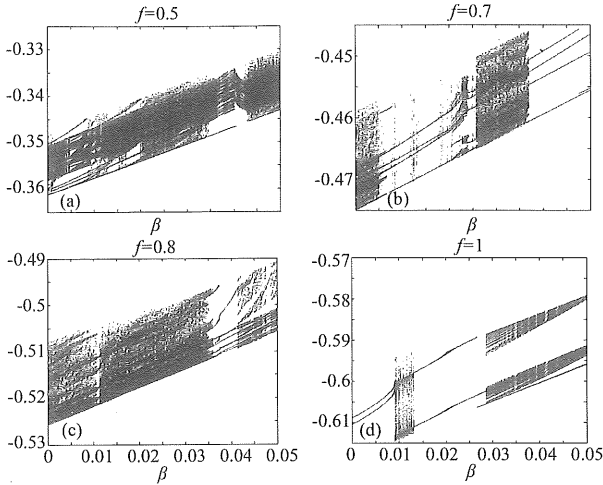


图 11 系统 (1) 在 (β, x) 平面的分支图, 这里 (a) $f = 0.5$; (b) $f = 0.7$; (c) $f = 0.8$; (d) $f = 1$
 Fig. 11 Bifurcation diagrams of the system (1) in (β, x) plane for (a) $f = 0.5$; (b) $f = 0.7$; (c) $f = 0.8$; (d) $f = 1$

情形 (ii) 对不同的 Ω 值, 图 12(a) - (d) 给出了 (α, x) 平面上的分支图, 显示出频率 Ω 对系统动力学的影响。从图中可以看到混沌行为和拟周期行为交替出现。

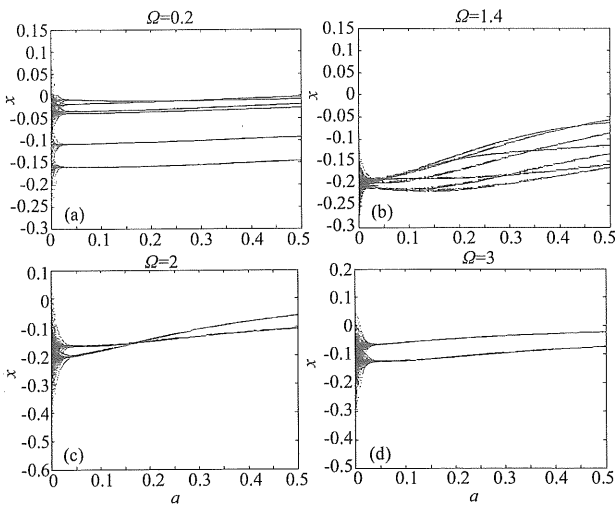


图 12 系统 (1) 在 (α, x) 平面的分支图, 这里 (a) $\Omega = 0.2$; (b) $\Omega = 1.4$; (c) $\Omega = 2$; (d) $\Omega = 3$
 Fig. 12 Bifurcation diagrams of the system (1) in (α, x) plane for (a) $\Omega = 0.2$; (b) $\Omega = 1.4$; (c) $\Omega = 2$; (d) $\Omega = 3$

情形 (iii) 图 13 (a) 和 (b) 给出了系统 (1) 在 (Ω, x) 平面上的分支图。从图中可以发现

大范围的带有小的拟周期窗口的混沌区域。

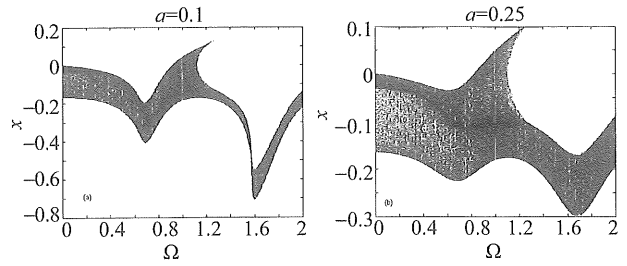


图 13 系统 (1) 在 (Ω, x) 平面的分支图,

这里 (a) $\alpha = 0.1$; (b) $\alpha = 0.25$

Fig. 13 Bifurcation diagrams of the system (1) in (Ω, x) plane for (a) $\alpha = 0.1$; (b) $\alpha = 0.25$

6 结 论

本文研究了受幅值调节力驱动的 Josephson 系统的动力学行为, 利用理论分析和数值模拟发现很多复杂动力学行为, 这些行为源自阻尼和幅值调节力的影响。特别的, 从图 11 - 13 可以看出幅值调节力中的振幅 f 和频率 Ω 对系统动力学的影响起了关键的作用。图 12 显示出通过调节阻尼 α 值, 可以调节系统从混沌进入到周期状态, 故可以将其看作是一个控制器。对理解 Josephson 系统的动力学行为, 这些结论是重要且实用的。

参考文献:

[1] KONISHI K. Generating chaotic behaviors in an oscillator driven by periodic forces[J]. Phys Lett A, 2003, 320: 200 - 206.

[2] VENKATESAN A, PARTHASARATHY S, LAKSHMANAN M. Occurrence of multiple period-doubling bifurcation route to chaos in periodically pulsed chaotic dynamical systems [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2003, 18(4): 891 - 898.

[3] GE Z M, LEU W Y. Anti-control of chaos of two-degrees-of-freedom loudspeaker system and chaos synchronization of different order systems[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 20(3): 503 - 521.

[4] GANDHIMATHI V M, MURALI K, RAJASEKAR S. Stochastic resonance with different periodic forces in over damped two coupled an harmonic oscillators[J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30(5): 1034 - 1047.

[5] SALAM F M A, SASTRY S S. Dynamics of the forced Josephson junction circuit: the regions of chaos [J]. IEEE Trans Cir Syst, 1985, 32: 784 - 796.

- 昌大学学报, 1999, 23(3): 283 - 286.
- [3] WANG K H, SIVAZLIAN B D. Reliability of a system with warm standbys and repairmen [J]. *Microelectron Reliab*, 1989, 29(5): 849 - 860.
- [4] 刘鸣, 苏保河. 修理工多重休假两部件冷贮备可修系统[J]. *石家庄铁道学院学报*, 1994, 7(3): 47 - 52.
- [5] 岳德权, 祁洪娟, 曹静, 等. 修理工 N-策略休假的带有温贮备的可修系统的可靠性分析[J]. *工程数学学报*, 2009, 26(6): 1062 - 1068.
- [6] JAIN M, MAHESHWARI R S. N-policy for a machine repair system with spares and renegeing [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2004, 28(6): 513 - 531.
- [7] WANG K H, KE J C. Probabilistic analysis of a repairable system with warm standbys plus balking and renegeing [J]. *Applied Mathematical Modeling*, 2003, 27(4): 327 - 336.
- [8] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 3 版, 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [9] 汤全武, 李德敏, 陈晓娟. 信号与系统[M]. 武汉: 华中科技大学出版社, 2008.
- [10] 曹晋华, 程侃. 可靠性数学[M]. 北京: 科学出版社, 1986.

(上接第 27 页)

- [6] BARTUCCELLI M, CHRISTIANSEN P, PEDESEN N, et al. Prediction of chaos in a Josephson junction by the Melnikov function technique [J]. *Phys Rev B*, 1986, 33: 4686 - 4691.
- [7] JING Z J. Application of qualitative methods of differential equation to study phase-locked loops [J]. *SIAM J Appl Math*, 1983, 43(6): 1245 - 1258.
- [8] JING Z J. Chaotic behavior in the Josephson equation with periodic force [J]. *SIAM J Appl Math*, 1989, 49(6): 1749 - 1758.
- [9] JING Z J, CHAN K Y, XU D S, et al. Bifurcation of periodic solutions and chaos in Josephson system [J]. *Discrete Contin Dyn Syst*, 2001, 7(3): 573 - 592.
- [10] YANG J P, FENG W, JING Z J. Complex dynamics in Josephson system with two external forcing terms [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2006, 30(1): 235 - 256.
- [11] JING Z J, CAO H J. Bifurcation of periodic orbits in a Josephson equation with a phase shift [J]. *Int J Bifurcation Chaos: Appl Sci Eng*, 2002, 12(7): 1515 - 1530.
- [12] CAO H J, JING Z J. Chaotic dynamics of Josephson equation driven by constant dc and ac forcings [J]. *Chaos, Solitons and Fractals*, 2001, 12(10): 1887 - 1895.
- [13] RAVICHANDRAN V, CHINNATHAMBI V, RAJASEKAR S. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force [J]. *Phys A*, 2007, 376: 223 - 236.
- [14] WIGGINS S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.