

# 基于混合型多结点样条插值曲面的图像放大方法\*

蔡占川<sup>1</sup>, 郑才目<sup>1</sup>, 黄 静<sup>2</sup>, 梁延研<sup>1</sup>

(1. 澳门科技大学资讯科技学院, 澳门;  
2. 北京师范大学珠海分校信息技术学院, 广东 珠海 519085)

**摘 要:** 多结点样条插值是一类曲线曲面的拟合方法, 为了探索高质量的图像放大方法, 提出了一种利用混合型多结点样条插值曲面的图像放大方法, 该方法为数字图像的每一个色彩分量构造一个分块混合型多结点样条插值曲面。试验结果表明该方法对图像的放大质量较高。为了提高该方法的效率, 描述了一种加速算法, 该加速算法在数字漫游系统与动画制作等方面可望得到应用。

**关键词:** 多结点样条; 插值曲面; 图像放大

中图分类号: O241.3 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2011)02-0016-05

## A Method of Image Zooming-in Based on Mixed Many-knot Spline Surface Interpolation

CAI Zhanchuan<sup>1</sup>, ZHENG Caimu<sup>1</sup>, HUANG Jing<sup>2</sup>, LIANG Yanyan<sup>1</sup>

(1. Faculty of Information Technology, Macau University of Science and Technology, Macau, China;  
2. The Information Technology College, Beijing Normal University Zhuhai, Zhuhai 519085, China)

**Abstract:** Many-knot spline interpolation is a class of curve and surface fitting method, In order to explore a new method for obtaining a zoom in image with a superior quality; the one dimensional many-knot spline curves algorithm is extended to that of two dimensions, which is applied to image zooming. It constructs a mixed piecewise many-knot spline interpolation surface for each color component of a digital image. The experimental results show that the method can improve the quality of zoomed image greatly. A fast algorithm is also described for efficiency, which is applied in digital pan and computer animation, etc.

**Key words:** many-knot spline; surface interpolation; image zooming-in

图像放大就是将一幅图像从较低分辨率通过插值转换到较高的分辨率。在图像处理中图像放大具有重要的作用。同时, 图像放大技术广泛地应用在气象、遥感、医学、公安、军事、动画制作和电影合成等方面<sup>[1-6]</sup>。通常, 采用简单的比例变换来进行图像放大, 但这种方法会引起比较严重的图像走样, 使得图像产生大量锯齿。目前比较成熟的算法有最近点插值, 双线性插值以及样条插值等。最近点插值方法简单, 容易实现, 然而该方法同样会

在新的图像中产生明显的锯齿形边缘和方块效应, 双线性插值具有一定的边缘平滑作用, 但会使图像的细节产生退化, 丢失重要的边缘特征, 三次样条插值和三次 B 样条插值放大后的图像函数具有较高的光滑性, 但是计算量大, 而且放大后容易造成图像边缘模糊。文献 [7] 提出了一种基于贝塞尔插值曲面的图像放大方法, 该方法要用到曲面拼接, 大大降低了效率。

1975 年齐东旭<sup>[8]</sup>给出了多结点样条基本函数

\* 收稿日期: 2010-02-01

基金项目: 澳门科技发展基金资助项目 (015/2010/A)

作者简介: 蔡占川 (1974 年生), 男, 助理教授, 博士; E-mail: zccai@must.edu.mo

的构造及计算格式, 后续文献 [9-10] 对其作进一步的理论分析和应用。为了兼顾插值与逼近方法的优点, 多结点样条函数在通常的样条函数中引入更多的附加结点, 通过增加结点带来的自由度来构造原结点上插值的高精度样条逼近格式。多结点样条基函数是基数型的, 使得插值过程无须求解方程组, 同时, 多结点样条基函数具有有界支集, 保证了局部性和有效性。多结点样条以其良好的局部性、插值性等优越性, 已被成功地应用于飞机外形、机翼、海洋、地质的数据处理以及动画片的计算机制作等领域<sup>[11-13]</sup>。

本文首先介绍混合型多结点样条函数; 其次, 由数字图像构造混合型多结点样条插值曲面, 提出一种利用混合型多结点样条插值曲面的图像放大方法; 同时为了提高该方法的效率, 描述了一种加速算法; 最后是实验结果与结论。

## 1 混合型多结点样条

### 1.1 混合型多结点样条函数

多结点样条曲线是建立在样条理论基础上的—种插值曲线, 文献 [8-10] 对其性质进行了充分讨论。多结点样条是通过等距样条基函数的平移和迭加变换而得到的, 它不仅能对插值点点点通过, 并且保持了曲线样条的局部性、显式表达和容易交互的性质。

这里讨论另一类多结点样条基本函数, 记为  $p_k(x)$ , 它与一般基本函数  $\Omega_k(x)$  具有相同的跨度  $(-\xi_k, \xi_k)$ ,  $\xi_k = (k+1)/2, k \in \mathbf{Z}^{[8]}$ 。用基本样条函数的组合形成多结点样条基本函数, 令

$$p_k(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} d_j \Omega_{k-j}(x), k \in \mathbf{Z}$$

其中  $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$  表示小于等于  $\frac{k+1}{2}$  的最大整数。从插值样条条件考虑, 令  $p_k(0) = 1, p_k(m) = 0$ 。当  $m \in \mathbf{Z}, m \neq 0$  得到  $d_j$  的线性方程组, 由  $\{ \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} d_j \Omega_{k-j}(x) \}$  的线性独立性质, 可知这样的解存在且唯一, 当  $k=3$  时, 所求得的基函数为

$$p_3(x) = -3\Omega_3(x) + 4\Omega_2(x)$$

基函数图形如图 1 所示。

### 1.2 混合型多结点样条插值曲面

一般地, 混合型多结点样条的插值函数可写为

$$g(x) = \sum_i p_k(x-i)f(x_i), x \in [0, n] \quad (4)$$

其中  $f(x_i) (i=0, 1, \dots, n)$  是采样值;  $p_k$  为混合型

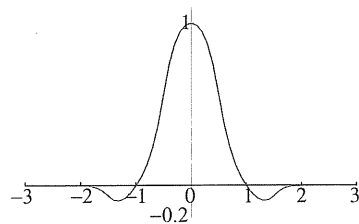


图 1 混合型多结点样条基函数

Fig. 1 Basic function of mixed many-knot spline

多结点样条。

相应地, 混合型多结点曲面插值公式为

$$g(u, v) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_k(u-m) p_l(v-n) P_{i,j}, \quad 0 \leq u \leq m, 0 \leq v \leq n \quad (5)$$

其中  $p_k$  为  $u$  方向上的混合型多结点样条基函数,  $p_l$  为  $v$  方向上的混合型多结点样条基函数,  $P_{i,j}$  为控制顶点, 根据上式可以张成  $k \times l$  阶混合型多结点样条曲面。

## 2 由数字图像构造混合型多结点样条插值曲面算法

不妨设  $P(x, y)$  是一个  $m$  行  $n$  列的数字图像, 它提供了图像色彩的 3 个离散信息阵列, 每个色彩

分量对应于一个阵列。即  $P(x, y) = \begin{bmatrix} R(x, y) \\ G(x, y) \\ B(x, y) \end{bmatrix}$ 。

插值方法的价值在于, 将有限的离散信息扩展为一个连续的信息系统, 或者说, 为离散信息补充了各种中间信息。不妨以红色分量来说明。

1) 设  $R_{i,j} (1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n)$  是  $P(x, y)$  中第  $i$  行第  $j$  列像素的红色分量, 它与像素平面上的二维点  $(i, j)$  相对应, 构造一个二元函数  $Q(s, t) (0 \leq s \leq m, 0 \leq t \leq n)$ , 使  $Q(i, j) = R_{i,j}$ , 并且  $Q(s, t)$  在任一点处达到连续。

2) 函数构造方法。

将矩阵  $R_1 = \{R_{i,j}; 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  扩充为  $R_2 = \{R_{i,j}; 0 \leq i \leq m+1, 0 \leq j \leq n+1\}$ , 即续上  $R_{i,j} (i=0, m+1 \text{ 或 } j=0, n+1)$  的值, 这里采用外向插值法, 取  $R_{0,j} = 2R_{1,j} - R_{2,j} (1 \leq j \leq n), R_{m+1,j} = 2R_{m,j} - R_{m-1,j} (1 \leq j \leq n), R_{i,0} = 2R_{i,1} - R_{i,2} (1 \leq i \leq m), R_{i,n+1} = 2R_{i,n} - R_{i,n-1} (1 \leq i \leq m), R_{0,0} = R_{0,1} + R_{1,0} - R_{1,1}, R_{0,n+1} = R_{0,n} + R_{1,n+1} - R_{1,n}, R_{m+1,0} = R_{m,0} + R_{m+1,1} - R_{m,1}, R_{m+1,n+1} = R_{m+1,n} + R_{m,n+1} - R_{m,n}$ 。然后将  $R_2$  扩充为  $R_3$ , 其扩充方法与  $R_2$  的方法相同。得到  $(m+4) \times (n+4)$  的矩阵  $R'$ 。由混合

型多结点样条的曲面插值公式:

$$Q(s, t) = \sum_{i=1}^{m+4} \sum_{j=1}^{n+4} p_3\left(\frac{s-x_i}{l_1}\right) p_3\left(\frac{t-y_j}{l_2}\right) R'_{ij}$$

式中  $x_i = 1, 2, \dots, m+4, y_j = 1, 2, \dots, n+4, l_1, l_2$  为样点间距, 这里设两个相邻像素点间距为 1, 即  $l_1 = l_2 = 1$ 。

曲面插值公式简化为

$$F(u, v) = \sum_{i=1}^{m+4} \sum_{j=1}^{n+4} p_3(u-x_i) p_3(v-y_j) R'_{ij}$$

3) 用同样的方法可以为  $P(x, y)$  的绿色分量  $G(x, y)$  和蓝色分量  $B(x, y)$  构造三次混合型多结点样条插值曲面。

$Q(s, t)$  在整体上是连续的, 因此,  $Q(s, t)$  是  $P(x, y)$  信息的一种连续表示, 由于多结点样条的局部性, 每段曲面只依赖于附近  $4 \times 4$  个像素点的值, 这就是下面加速方法的理论基础。另外一方面, 插值曲面  $Q(s, t)$  具有一次严格性, 当所有  $R_{i,j}$  共面时,  $Q(s, t)$  便是一个平面。如果  $P(x, y)$  表示一张色彩均匀变化的图像, 任意放大, 它仍然是均匀的。

使用上文方法, 可以产生质量较好的图像, 但因其每个像素点都需要通过周围的像数点计算得到, 即  $F(u, v) = \sum_{i=1}^{m+4} \sum_{j=1}^{n+4} p_3(u-x_i) p_3(v-y_j) R'_{ij}$  中对于任意  $u, v, p_3(u-x_i) p_3(v-y_j)$ , 的值都不同, 因此需要很大的计算量, 速度较慢。为此, 提出如下加速方法。

### 3 加速方法

由于多结点样条具有良好的局部性, 像素点  $(i, j)$  的计算只依赖于其附近的  $4 \times 4$  个像素点的值, 即

$$F(u, v) = \sum_{i=[u]-2}^{[u]+2} \sum_{j=[v]-1}^{[v]+2} p_3(u-x_i) p_3(v-y_j) R'_{ij} = L \times R$$

式中  $R = R'_{ij} ([u] - 2 \leq i \leq [u] + 3, [v] - 1 \leq j \leq [v] + 2)$  是已知量,  $L = p_3(u-x_i) p_3(v-y_j) ([u] - 2 \leq i \leq [u] + 3, [v] - 1 \leq j \leq [v] + 2)$  对于每个  $u, v$ , 系数  $L$  都需要重新计算; 因此计算时间主要消耗在矩阵  $L$  计算系数上, 为了解决这个问题, 将  $(i, j)$  像素沿  $i$  方向和  $j$  方向均匀地划分为若干部分, 如分成 8 个部分, 这样便把  $(i, j)$  像素均匀地划分成 64 个小块, 分别用  $(0, 0), (0, 1), \dots, (7, 7)$  标记这些小块, 如图 2 所示。

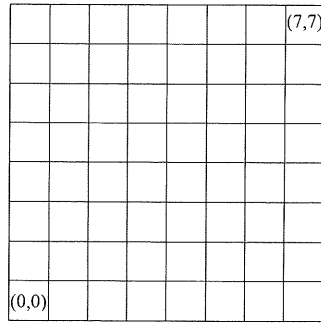


图 2 图像分块  
Fig. 2 Image Sub-block

可以看出, 块  $(x, y)$  的右上角顶点的坐标为  $(\frac{x}{8}, \frac{y}{8})$ , 可以预先计算出这些顶点的系数矩阵  $M_{x,y}$ , 当图像放大时, 若需要计算  $P(i, j)$  在  $F(u, v)$  曲面上的值, 则首先通过映射公式判断出  $(u, v)$  所属的块为  $([\frac{u}{8}], [\frac{v}{8}])$ , 然后用该块的右上角的系数矩阵  $M_{[\frac{u}{8}], [\frac{v}{8}]}$  近似  $(u, v)$  坐标所对应的系数矩阵, 用该矩阵中的元素作为系数, 代入公式  $F(u, v) = \sum_{i=[u]-1}^{[u]+2} \sum_{j=[v]-1}^{[v]+2} p_3(u-x_i) p_3(v-y_j) R'_{ij}$ , 将其结果作为  $(u, v)$  处色彩分量值。

试验表明, 该方法可以提高计算速度, 而且由系数矩阵近似所导致的误差较小, 对图像质量的影响不大。

### 4 试验结果与分析

实验中从标准图像数据库里选取以下 7 副  $512 \times 512$  测试图像 (依次为 Lena、House、Bird、Peppers、Avion、Butfish、Frog) 来测试 (见图 3)。

分别先将图像降采样为  $256 \times 256$  大小的图像, 采用不同的算法分别进行 2 倍系数的放大, 生成  $512 \times 512$  的结果图像。本文对四种算法进行了对照实验。第一种方法为邻近插值 (Nearest), 第二种为双线性插值 (Bilinear), 第三种为双三次插值 (Bicubic), 第四种为混合型多结点样条插值 (Many-knot)。采用信噪比 (PSNR)、均值误差 (ME) 与梯度 (Grads) 来量化比较算法的优劣。从表 1-3 可以看出: 除了在梯度方面, 混合型多结点样条插值 (Many-knot) 略低于邻近插值 (Nearest) 外, 混合型多结点样条插值 (Many-knot) 均优于其它三种算法。

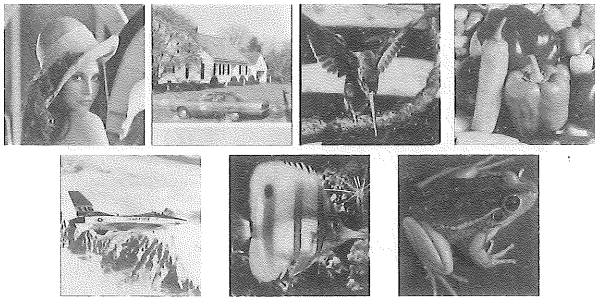


图 3 512 × 512 测试图像

Fig. 3 512 × 512 Tested Images

表 1 各种算法 PSNR 的比较

Table 1 Comparing PSNR of each method

Image	PSNR			
	Nearest	Bilinear	Bicubic	Many-knot
Lena	28.327 3	30.168	30.046 5	33.443
House	24.871 8	26.607 8	26.480 7	29.323 6
Bird	26.490 8	28.47	28.445 4	31.444
Peppers	26.380 5	28.129 2	27.647	30.437 9
Avion	27.076	29.008 3	28.942 9	32.731 7
Butfish	22.271 2	23.936 6	23.663 6	25.473 3
Frog	28.289 3	29.933 6	29.634 2	31.487 2

表 2 各种算法 ME 的比较

Table 2 Comparing ME of each method

Image	ME			
	Nearest	Bilinear	Bicubic	Many-knot
Lena	4.767 7	4.598 2	4.611 4	2.925 6
House	6.810 2	6.696 8	6.679 8	4.269 5
Bird	6.379 7	6.022 4	6.034 3	4.048 7
Peppers	5.713 4	5.568 4	5.712 2	4.186 6
Avion	4.542 7	4.4	4.371 3	2.617 9
Butfish	10.931 0	10.496 9	10.641 1	7.842 8
Frog	4.175 3	4.073 2	4.135 0	3.105 4

表 3 各种算法 Grads 的比较

Table 3 Grads of each method

Image	Grads			
	Nearest	Bilinear	Bicubic	Many-knot
Lena	5.530 1	3.759 4	4.626	4.784 7
House	8.076 5	5.664 7	6.984 7	7.219 1
Bird	7.506 8	5.329 3	6.414 9	6.594 7
Peppers	5.814 9	4.154 5	5.011 4	5.117 2
Avion	5.508 6	3.954 6	4.795 7	4.927 2
Butfish	11.864 3	7.600 5	9.765 8	10.143 5
Frog	4.503 8	2.947 3	3.744	3.867 9

从以下两幅图像中分别取其一小块 A, B。对

小块图像 A, B 分别采用混合型多结点样条的加速方法与未加速方法将其放大 4 倍 (见图 4)。表 4 给出了多结点样条算法与加速算法时间上进行了对比, 表明加速算法能提高 10 倍以上的速度。

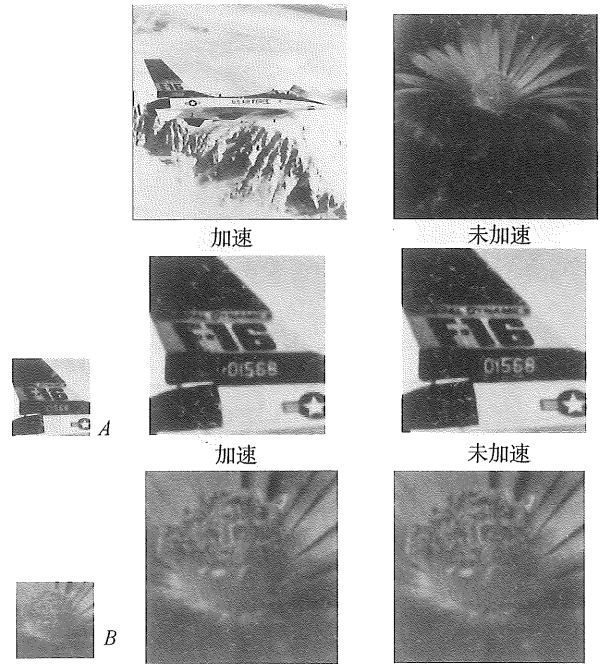


图 4 多结点样条算法与加速算法结果比较

Fig. 4 Comparing mixed many-knot spline with its fast algorithm

表 4 多结点样条算法与加速算法的时间对比

Table 4 Comparing consumed time of many-knot spline with its fast algorithm

	时间/s	
	多结点算法	加速算法
图像 A	29.536 4	1.773 0
图像 B	67.612 6	4.291 8

## 5 结 论

本文引入多结点样条的混合型式, 并将其应用于图像放大, 该方法为数字图像的每一个色彩分量构造一个分块混合型多结点样条插值曲面。试验结果表明该方法对图像的放大质量较高。为了提高该方法的效率, 提出一种加速算法。该加速算法在数字漫游系统与动画制作等方面可得到应用。今后, 将多结点样条函数结合图像的梯度特征、各向异性及轮廓特征, 开展进一步深入的研究。

(下转第 24 页)

$$C\lambda^{1/2} \left\{ \int |f(y)| d\mu(y) \right\}^{1/2}$$

结合 I、II、式 (8) 和式 (9) 的估计, 我们便得到式 (7) 的证明, 从而得到定理 1 的证明。

#### 参考文献:

- [1] FEFFERMAN C. Inequalities for strongly singular convolution operators [J]. Acta Math, 1970, 124(1): 9 - 36.
- [2] CHRIST M. Weak - type (1,1) bounds for rough operators [J]. Ann Math, 1988, 128(1): 19 - 42.
- [3] CHRIST M, RUBIO DE FRANCIA J L. Weak - type (1, 1) bounds for rough operators II [J]. Invent Math, 1988, 93(1): 225 - 237.
- [4] HOFMANN S. Weak (1,1) boundedness of singular integrals with nonsmooth kernel [J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 103(1): 260 - 264.
- [5] SEEGER A. Singular integral operators with rough convolution kernels [J]. J Amer Math Soc, 1996, 9(1): 95 - 105.
- [6] DUONG X T, MCINTOSH A. Singular integral operators with non - smooth kernels on irregular domains [J]. Rev Mat Iber, 1999, 15(2): 233 - 265.
- [7] TOLSA X. A proof of the weak (1,1) inequality for singular integrals with non doubling measures based on a Calderon - Zygmund decomposition [J]. Publ Mat, 2001, 45(1): 163 - 174.
- [8] GARCIA - CUERVA J, MARTELL J M. Weighted inequalities and vector - valued Calderon - Zygmund operators on nonhomogeneous spaces [J]. Publications Matemàtiques, 2000, 44: 613 - 640.
- [9] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderon - Zygmund operators in nonhomogeneous spaces [J]. Int Math Res Not, 1998, 9: 463 - 487.
- [10] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Cauchy integral and Calderon - Zygmund operators on nonhomogeneous spaces [J]. Int Math Res Not, 1997, 15: 703 - 726.
- [11] TOLSA X. L<sub>2</sub> - boundedness of the Cauchy integral operator for continuous measures [J]. Duke Math J, 1999, 98(2): 703 - 726.
- [12] TOLSA X. Littlewood - Paley Theory and the T(1) Theorem with Non - doubling Measures [J]. Adv in Math, 2001, 164(1): 57 - 116.

(上接第 19 页)

#### 参考文献:

- [1] VÁRADY T, MARTIN R R, COX J. Reverse engineering of geometric models and introduction [J]. Computer-aided Design, 1997, 29(4): 255 - 268.
- [2] MEIJRING E, UNSER M. A note on cubic convolution interpolation [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12(4): 477 - 479.
- [3] HWANG J W, LEE H S. Adaptive image interpolation based on local gradient features [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(3): 359 - 362.
- [4] ALY H A, DUBOIS E. Image up-sampling using total-variation regularization with a new observation model [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2005, 14(10): 1647 - 1659.
- [5] PARK S C, PARK M K, KANG M G. Super-resolution image reconstruction: a technical review [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 5: 21 - 36.
- [6] THEVNAZ P, BLUR T, UNSER M. Interpolation revisited [J]. IEEE Trans on Medical Imaging, 2000, 19(7): 739 - 758.
- [7] 孙庆杰, 张晓鹏, 吴恩华. 一种基于 Bézier 插值曲面的图像放大方法 [J]. 软件学报, 1999, 10(6): 570 - 574.
- [8] 齐东旭. 关于多结点基函数  $\delta$ -spline 插值 (I), (II), (III) [J]. 吉林大学学报: 自然科学版, 1975(2): 70 - 81; 1976(2): 36 - 44; 1979(3): 1 - 8.
- [9] LI H S, DING W, QI D X. Many-knot spline interpolation and any-scale refinement algorithm [J]. Journal of Image and Graphics, 1997, 2(10): 701 - 706.
- [10] QI D X, LI H S. Many-knot spline technique for approximation of data [J]. Science in China (Series E), 1999, 29(4): 334 - 387.
- [11] 齐东旭, 田自贤, 张玉心, 等. 样条函数在飞机理论外形设计中的应用 [J]. 飞机设计, 1982, 4: 45 - 51.
- [12] 北方工业大学 CAD 研究中心与北京电视台. 计算机卡通片《咪咪钓鱼》[CP]. 北京: 北京电视台, 1991.
- [13] 北方工业大学 CAD 研究中心与北京科学教育电影制片厂. 计算机电影片《相似》[CP]. 北京: 广播电影电视部电影发行局, 1992.