第 49 卷 第 5 期　　　　中山大学学报（自然科学版）　　　　Vol. 49 No. 5
2010 年 9 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Sep. 2010

推导引力场传播子的一种对称性方法*

方锡岩，冯开喜，江云峰，黄伟聪，张宏浩
（中山大学 物理科学与工程技术学院，广东 广州 510275）

摘　要：利用在拉氏量中引力场的二次型内核以及引力场传播子的对称性，构造出一些基本的对称性模块，它们构成了满足该组对称性的完备空间。推导求得了这些模块两两之间的乘积关系，并由此简便地推导得到了有质量的 Kaluza-Klein 引力场与零质量的引力场的传播子。

关键词：引力场传播子；对称性方法；Kaluza-Klein 理论
中图分类号：O412　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529-6579（2010）05-0052-04

Derivation of Graviton Propagator by a Symmetric Method

FANG Xiyan, FENG Kaixi, JIANG Yunfeng, HUANG Weicong, ZHANG Honghao
(School of Physics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: According to the symmetry of the kernal of the quadratic term in the graviton Lagrangian and the symmetry of the graviton propagator, a complete basis set of building blocks satisfying this symmetry and obtain their product relations is constructed. Using these building blocks, the propagator expressions of the massive Kaluza-Klein graviton and the massless graviton is easily derived, respectively.

Key words: graviton propagator; symmetric method; Kaluza-Klein theory

最近 10 多年来，额外维模型成为粒子物理与宇宙学领域的一个重要热点研究课题[1-5]。作为超出标准模型的新物理模型候选者之一，额外维模型具有如下的一些优点：①它能提供统一引力与基本粒子的规范相互作用的理论框架。早在 20 世纪 20 年代，Kaluza 和 Klein 就先后独立地注意到 5 维的引力理论可以统一 4 维引力与电磁相互作用。后来人们发现非阿贝尔规范相互作用与 4 维引力也可以被高维的引力理论所统一描述。②它为引力的量子化所需要。引力的量子化是一项非常困难的非平庸的工作。目前量子引力理论的很有希望的候选者之一，超弦理论（或 M 理论），只有在 10 维（或 11 维）时空下才能自恰地建立。③它可以解释标准模型中的等级（hierarchy）问题。等级问题指的是假如标准模型一直在大统一能标或者 Plank 能标之下都仍然成立的话（即超出标准模型的新物理的能标至少在 10^{15}GeV 左右），那么 Higgs 标量粒子质量的一圈图辐射修正就需要精确调节来得到其物理质量，然而在最近的额外维模型中可以避免这种情况出现，例如在文献［1］提出的大的额外维模型中，4 维时空的有效的 Plank 质量可以降低到 TeV（即 10^3GeV）左右的能标（即在 TeV 能标就会出现新物理），这样 Higgs 粒子质量的辐射修正就不再需要精确调节，因而解决了等级问题。④此外，它还可以解释宇宙学常数等问题。

在额外维模型中，额外的空间维度往往是紧致化的。通过文献中的维数消减（dimension reduction）方法，可以从高维时空的作用量推导得到在四维时空的有效作用量，这样得到的有效作用量所包含的物理自由度不单含有通常的零质量的自旋为 2 的引力子，也有一系列的有质量的自旋为 2 的引力子（文献中通常称之为 Kaluza-Klein 引力子，以

* 收稿日期：2009-12-07
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10747165）；教育部博士点新教师基金资助项目（200805581030）；中央高校基本科研业务费专项资金资助项目；中山大学物理学基地资助项目；中山大学教学改革资助项目
作者简介：方锡岩（1965 年生），男，博士，副教授；通讯作者：张宏浩；E-mail：zhh98@mail.sysu.edu.cn

下简称为 KK 引力子)，并且这一系列的 KK 引力子的质量一般按照等差序列递增的。今天之所以尚未观测到 KK 引力子，人们一般认为是因为最轻的 KK 引力子的质量已经很重，超出了当前对撞机实验的探测范围，但它们很有可能在已经开始运行的大型强子对撞机（LHC）上被探测到。有质量的 KK 引力子一旦被实验探测到，将是支持额外维模型的证据，这将成为物理学革命性的发现，并将极大地推动人类社会科技的进步。在国内外的一些广义相对论著名教材中[6-9]，对 KK 引力子甚至零质量引力子的传播子的讨论都尚未涉及，在文献［10］中对此虽然有所讨论，但所用到的方法比较繁琐，本文将给出一种新的简明的推导一般的引力场传播子的对称性方法，分别应用于推导有质量的 KK 引力子和通常的零质量引力子的传播子，并与文献［10］所得结果进行对比。

1　有质量的 KK 引力场的传播子

我们这里只考虑额外维模型所导致的在 4 维时空中的有效作用量中所包含的有质量的 KK 引力场，即本文直接从 4 维时空中的有效作用量的含 KK 引力场的部分出发，而不去追究从额外维模型如何推导出 4 维时空的有效作用量来。为了方便比较结果，采取与文献［10］相同的符号约定，即取 4 维闵氏时空的度规为 $\delta_{\mu\nu}=\mathrm{diag}\,(1,\ 1,\ 1,\ 1)$，而 4 维矢量的第 4 分量为虚数，例如：4 维坐标 $x_\mu = x^\mu = (\vec{x}, it)$，4 维动量 $p_\mu = p^\mu = (\vec{p}, iE)$。对于弱引力场，可将度规 $g_{\mu\nu}$ 在闵氏度规 $\delta_{\mu\nu}$ 为背景场作微扰展开：$g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$，其中 $h_{\mu\nu}$ 为小量，它在物理上用以描述自旋为 2 的引力场。对于有质量的自旋为 2 的 KK 引力场，它的拉氏量可以写为动能项与质量项两部分[10]：

$$L = L_{\mathrm{kin}} + L_{\mathrm{mass}} \tag{1}$$

其中

$$L_{\mathrm{kin}} = -\frac{1}{2}(\partial_\lambda h_{\lambda\mu})(\partial_\mu h_{\nu\nu}) + \frac{1}{2}(\partial_\lambda h_{\lambda\mu})(\partial_\nu h_{\nu\mu}) - \frac{1}{4}(\partial_\lambda h_{\mu\nu})(\partial_\lambda h_{\mu\nu}) + \frac{1}{4}(\partial_\lambda h_{\mu\mu})(\partial_\lambda h_{\nu\nu}) \tag{2}$$

$$L_{\mathrm{mass}} = \frac{1}{4}m^2(h_{\mu\mu}h_{\nu\nu} - h_{\mu\nu}h_{\mu\nu}) \tag{3}$$

这里使用了爱因斯坦求和法则，即重复指标代表求和。通过 Fourier 变换并对张量指标作对称化，还可以将（1）式写成在动量空间的对称的二次型的形式：

$$L = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}V_{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \tag{4}$$

其中二次型的内核（kernel）为

$$V_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{4}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})(k^2 + m^2) - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}(k^2 + m^2) - \frac{1}{4}(\delta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha + \delta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta + \delta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta + \delta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha) + \frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta + \delta_{\alpha\beta}k_\mu k_\nu) \tag{5}$$

由量子场论中的知识可知，KK 引力场 $h_{\mu\nu}$ 的传播子就是 $V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 的逆算符 $V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}$。对于求解 $V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}$，文献［10］采取的做法是将 $h_{\mu\nu}$ 进行编号，将 $h_{\mu\nu}$ 的 10 个独立分量分别记为 $\psi_i(i = 1,\cdots,10)$，对应如表 1 所示。

表 1　$h_{\mu\nu}$ 与 ψ_i 的指标对应

Table 1　The index correspondence between $h_{\mu\nu}$ and ψ_i

h	11	22	33	44	12	13	14	23	24	34
ψ	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

再设法将（4）式改写为 ψ_i 的二次型形式：$L = -\frac{1}{2}\psi_i V_{ij}\psi_j$，然后求 V_{ij} 的逆算符。但这种方法有两点不足：首先，它需要求解 10 × 10 矩阵的逆，是一种暴力求解方法，计算量较大；其次，从（5）式可知 $V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 含有 $\delta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha$ 这一类的项，如何将这种涉及到动量的指标 $(\mu\nu,\alpha\beta)$ 翻译为指标 (i,j) 并不容易，可能需要进一步的处理技巧。可见，文献［10］提出的计算方案事实上并不方便。我们将依据 $V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 的对称性提出一种新的简明的计算方案。通过观察（5）式，发现 $V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 具有如下 3 组对称性：①关于 $\mu\leftrightarrow\nu$ 对称；②关于 $\alpha\leftrightarrow\beta$ 对称；③关于 $(\mu\nu)\leftrightarrow(\alpha\beta)$ 对称。由于恒等算符 $I_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha})$ 也具有这 3 组对称性，而据定义，$V_{\mu\nu,\rho\sigma}V^{-1}_{\rho\sigma,\alpha\beta} = I_{\mu\nu,\alpha\beta}$，因此，$V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 的逆算符 $V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 也应该具有这 3 组对称性。可将所有满足这 3 组对称性的模块列出来，再求得它们之间的乘法关系，然后用待定系数法便可将 $V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 求出来。满足这 3 组对称性的模块共有以下 5 个：

$$I_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}) \tag{6}$$

$$A_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} \tag{7}$$

$$B_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \frac{1}{4}(\delta_{\mu\alpha}k_\nu k_\beta + \delta_{\nu\beta}k_\mu k_\alpha + \delta_{\mu\beta}k_\nu k_\alpha + \delta_{\nu\alpha}k_\mu k_\beta) \tag{8}$$

$$C_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta + \delta_{\alpha\beta}k_\mu k_\nu) \tag{9}$$

$$D_{\mu\nu,\alpha\beta} \equiv k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta \tag{10}$$

显然恒等算符 $I_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 与其它模块的乘积都是其它模块本身，即 $IA = A$，$IB = B$，$IC = C$，$ID = D$。还需要求出其它模块之间的乘积关系。例如：

$$\begin{aligned} A_{\mu\nu,\rho\sigma}B_{\rho\sigma,\alpha\beta} &= \delta_{\mu\nu}\delta_{\rho\sigma}\frac{1}{4}(\delta_{\rho\alpha}k_\sigma k_\beta + \delta_{\sigma\beta}k_\rho k_\alpha + \\ &\delta_{\rho\beta}k_\sigma k_\alpha + \delta_{\sigma\alpha}k_\rho k_\beta) = \\ &\delta_{\mu\nu}k_\alpha k_\beta = C_{\mu\nu,\alpha\beta}(\text{经对称化后}) \end{aligned} \tag{11}$$

从量子场论的路径积分语言来看，$V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 出现拉氏量中的形式总是 $-\frac{1}{2}h_{\mu\nu}V_{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\alpha\beta}$，而传播子 $V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 出现在生成泛函中的形式则总是 $-\frac{1}{2}J_{\mu\nu}V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}J_{\alpha\beta}$（其中 $J_{\mu\nu}$ 是与引力场耦合的外源），这种对称性的形式保证了出现在 $V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 或 $V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 任何非对称性的项都等价于经对称化后的项。在（11）式所求的关系只须保证在经对称化的意义下成立即可。当然，（11）式也可以严格的写为

$$\frac{1}{2}(A_{\mu\nu,\rho\sigma}B_{\rho\sigma,\alpha\beta} + B_{\mu\nu,\rho\sigma}A_{\rho\sigma,\alpha\beta}) = C_{\mu\nu,\alpha\beta} \tag{12}$$

为简化符号，可将（11）式或（12）式记为

$$AB = C \tag{13}$$

同理，还可以求出其它的乘积关系（在经对称化的意义成立）如下：

$$AA = 4A \tag{14}$$

$$AC = 2C + \frac{k^2}{2}A \tag{15}$$

$$AD = k^2C \tag{16}$$

$$BB = \frac{k^2}{2}B + \frac{1}{2}D \tag{17}$$

$$BC = \frac{1}{2}D + \frac{k^2}{2}C \tag{18}$$

$$BD = k^2D \tag{19}$$

$$CC = \frac{k^2}{2}C + \frac{k^4}{4}A + D \tag{20}$$

$$CD = \frac{k^4}{2}C + \frac{k^2}{2}D \tag{21}$$

$$DD = k^4D \tag{22}$$

现在可将（5）式给出的 $V_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 写为这些模块的线性组合：

$$V = \frac{k^2 + m^2}{2}I - \frac{k^2 + m^2}{2}A - B + C \tag{23}$$

设传播子 $V^{-1} = xI + aA + bB + cC + dD$，其中 x,a,b,c,d 是待定系数。根据 $V^{-1}V = I$ 以及前面推导得到的对称性模块之间的乘积关系，可求得：

$$x = \frac{2}{k^2 + m^2} \tag{24}$$

$$a = -\frac{2}{3(k^2 + m^2)} \tag{25}$$

$$b = \frac{4}{m^2(k^2 + m^2)} \tag{26}$$

$$c = -\frac{4}{3m^2(k^2 + m^2)} \tag{27}$$

$$d = \frac{4}{3m^4(k^2 + m^2)} \tag{28}$$

代入这些待定系数，就得到了传播子 V^{-1}，它的显式是

$$\begin{aligned} V^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta} &= \frac{1}{k^2 + m^2}\Big[(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}) - \frac{2}{3}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} + \\ &\left(\delta_{\mu\alpha}\frac{k_\nu k_\beta}{m^2} + \delta_{\nu\beta}\frac{k_\mu k_\alpha}{m^2} + \delta_{\mu\beta}\frac{k_\nu k_\alpha}{m^2} + \delta_{\nu\alpha}\frac{k_\mu k_\beta}{m^2}\right) - \\ &\frac{2}{3}\left(\delta_{\mu\nu}\frac{k_\alpha k_\beta}{m^2} + \delta_{\alpha\beta}\frac{k_\mu k_\nu}{m^2}\right) + \frac{4}{3}\frac{k_\mu k_\nu k_\alpha k_\beta}{m^4}\Big] \end{aligned} \tag{29}$$

上式即是有质量的 KK 引力场的传播子表达式，这与文献［10］给出的结果完全一致。从上面的推导过程可看出，对称性方法比该文献所介绍的改写指标的方法要简便得多。

2 零质量的引力场的传播子

对于零质量的引力场，由于动能项 L_{kin} 在规范变换 $h_{\mu\nu} \to h_{\mu\nu} + \partial_\mu\theta_\nu + \partial_\nu\theta_\mu$（其中 θ_μ 是 4 个任意的函数）下保持不变，因此仅仅由动能项 L_{kin} 所构成的 $h_{\mu\nu}$ 的二次型中的内核 $V'_{\mu\nu,\alpha\beta}$ 是奇异的，即不存在逆算符。为了克服这一困难，文献［10］为零质量的引力场的拉氏量添加了一个规范固定项。因此，零质量的引力场的拉氏量由动能项和规范固定项两部分组成：

$$L = L_{\text{kin}} + L_{\text{gauge-fixing}} \tag{30}$$

其中动能项仍然由（2）式给出，而规范固定项为

$$L_{\text{gauge-fixing}} = -\frac{1}{2}C_\mu^2 \tag{31}$$

其中 $C_\mu \equiv \partial_\nu h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\partial_\mu h_{\nu\nu}$。可将（30）式写为对称的二次型形式

$$L = -\frac{1}{2}h_{\mu\nu}\tilde{V}_{\mu\nu,\alpha\beta}h_{\alpha\beta} \tag{32}$$

其中

$$\tilde{V}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{k^2}{4}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha}) - \frac{k^2}{4}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta} \tag{33}$$

上式也可以用前面定义的对称性模块简写为：$\tilde{V} =$

$\frac{k^2}{2}I - \frac{k^2}{4}A$。现在设传播子 $\tilde{V}^{-1} = \tilde{x}I + \tilde{a}A + \tilde{b}B + \tilde{c}C + \tilde{d}D$，其中 $\tilde{x},\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c},\tilde{d}$ 是待定系数。根据 $\tilde{V}^{-1}\tilde{V} = I$ 以及前面推导得到的对称性模块之间的乘积关系，可求得：$\tilde{x} = \frac{2}{k^2}$，$\tilde{a} = \frac{1}{k^2}$，$\tilde{b} = \tilde{c} = \tilde{d} = 0$。代入这些待定系数，得到了传播子 $\tilde{V}^{-1}$ 的显式：

$$\tilde{V}^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{k^2}(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} - \delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}) \qquad (34)$$

上式与文献［10］给出的零质量的引力场的传播子结果也完全一致。(34）式是在 4 维时空推导得到的结果，事实上我们还可以用同样的方法推导得到 n 维时空的零质量的引力场传播子。注意到，在 n 维时空情形，上面的（13 – 22）式应相应地推广，例如（14）式应推广为：$AA = nA$，由此导致 $\tilde{a} = \frac{2}{2-n}\frac{1}{k^2}$，而其它待定系数可证明不变，因此 n 维时空的零质量的引力场传播子为

$$\tilde{V}^{-1}_{\mu\nu,\alpha\beta} = \frac{1}{k^2}\left(\delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\mu\beta}\delta_{\nu\alpha} - \frac{2}{n-2}\delta_{\mu\nu}\delta_{\alpha\beta}\right) \qquad (35)$$

这一结果也与文献［10］给出的结果吻合。

3 结　语

通过对称性构造出（6 – 10）式的 5 个基本模块，并求出它们两两之间的乘积关系，再将在拉氏量中的引力场二次型的内核写成这 5 个基本模块的线性组合，并根据传播子（即内核的逆算符）也满足相同的对称性，因此它也可以写成这些基本模块的线性组合，可通过待定系数法求出来。我们通过这种对称性方法分别推导得到了有质量的 KK 引力场和零质量的引力场的传播子，所求得的结果与文献［10］中的结果一致，该方法要比文献［10］提到的将引力场的独立分量进行重新编号再求 10 × 10 矩阵的逆的方法要简单得多，可操作性也好很多，因为文献［10］提到的那种方法对于内核中含有动量分量指标的时候将遇到一些困难。此外，这里介绍的推导传播子的对称性方法也可用以求解其它自旋的粒子（如自旋为 1 的规范场）的传播子。除了零质量的引力子之外，有质量的 KK 引力子的存在是从额外维模型约化到 4 维时空的有效理论的后果之一，而额外维模型作为可以统一引力相互作用与基本粒子的规范相互作用的候选者，它不单有美学的欣赏价值，而且很有可能是真实存在的，它在 LHC 上将有可能得到验证。本文讨论的引力场传播子仅限于其在动量空间的形式，进一步探讨其在坐标空间的解析表达式可参照文献［11］的作法。

参考文献：

［1］ ARKANI-HAMED N, DIMOPOULOS S, DVALI G R. The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter［J］. Phys Lett B, 1998, 429: 263 – 272.

［2］ RANDALL L, SUNDRUM R. An alternative to compactification［J］. Phys Rev Lett, 1999, 83: 4690.

［3］ HAN T, LYKKEN J D, ZHANG R J. Kaluza-Klein states from large extra dimensions［J］. Phys Rev D, 1999,59:105006.

［4］ RUBAKOV V A. Large and infinite extra dimensions［J］. Phys Usp,2001, 44: 871 – 893.

［5］ DVALI G R, GABADADZE G, PORRATI M. 4 – D gravity on a brane in 5 – D Minkowski space［J］. Phys Lett B,2000, 485: 208 – 214.

［6］ 刘辽，赵峥. 广义相对论［M］. 2 版. 北京：高等教育出版社，2004.

［7］ 俞允强. 广义相对论引论［M］. 2 版. 北京：北京大学出版社，1997.

［8］ WEINBERG S. Gravitation and cosmology［M］. New York: John Wiley & Sons, 1972.

［9］ MISNER C W, THORNE K S, WHEELER J A. Gravitation［M］. San Francisco: W. H. Freeman and Company, 1973.

［10］ VELTMAN M J G. Quantum theory of gravitation［M］. France:Les Houches,1975.

［11］ 方锡岩,冯开喜,丘斯伟,等. 关联函数解析式的另一种推导方法［J］. 中山大学学报:自然科学版,2010, 49(3):152 – 154.