第49卷 第5期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 5
2010年 9月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Sep. 2010

一类二阶非线性差分方程边值问题的多重解*

连福云[1,2]，徐远通[2]
（1. 中国海洋大学数学系，山东 青岛 266100；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要：非线性差分方程已经广泛应用于研究计算机科学、经济学、神经网络、生态学及控制论等学科中出现的离散模型。研究非线性差分方程边值问题解的存在性的方法主要有上下解方法，不动点定理，拓扑度理论等。值得注意的是，近几年来已有许多作者用临界点理论研究非线性差分方程边值问题解的存在性，这是很有力的工具。利用临界点理论研究一类二阶非线性差分方程边值问题多重解的存在性，提出一个新的判别方法。

关键词：差分方程；边值问题；临界点；多重解
中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2010）05-0030-04

Multiple Solutions for A Class of Second-Order Nonlinear Difference Boundary Value Problems

LIAN Fuyun[1,2], *XU Yuantong*[2]
(1. Department of Mathematics, Ocean University of China, Qingdao 266100, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Nonlinear difference equations have been widely studied in many fields such as computer science, economics, neural network, ecology, cybernetics, etc. Nonlinear difference boundary value problems have been studied by many various methods, such as the upper and lower solution method, fixed point theorems, and topological degree theory. Also, in recent years, the critical point theory has played an important role in dealing with the existence and multiple results for nonlinear difference boundary value problems. By using critical point theory, the existence of multiple solutions for a class of second-order nonlinear difference boundary value problems is studied and a new sufficient condition is obtained

Key words: difference equation; boundary value problem; critical point; multiple solutions

记 $\mathbb{Z}$，$\mathbb{R}$ 分别为整数集与实数集。对于任意的 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $a\leqslant b$，记 $\mathbb{Z}[a,b]=\{a,a+1,\cdots,b-1,b\}$。对于任意给定的正整数 N 且 $N>2$，我们考虑如下二阶非线性差分方程边值问题（简记为BVP）

$$\begin{cases}\Delta[p_{k-1}\Delta u_{k-1}]+q_ku_k+f(k,u_k)=0,\ k\in\mathbb{Z}[1,N]\\ u_0=u_N,p_0\Delta u_0=p_N\Delta u_N\end{cases}\tag{1}$$

其中 $f:\mathbb{Z}[1,N]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 关于第二个变量连续，$p_k\in\mathbb{R}(k\in\mathbb{Z}[0,N])$，$q_k\in\mathbb{R}(k\in\mathbb{Z}[1,N])$，$\Delta u_k=u_{k+1}-u_k$，$\Delta[p_{k-1}\Delta u_{k-1}]=p_k\Delta u_k-p_{k-1}\Delta u_{k-1}$，$k\in\mathbb{Z}$。方程（1）可看作如下方程的离散形式

$$(p(t)x'(t))'+q(t)x(t)+f(t,x(t))=0,\ t\in\mathbb{R}$$

该方程是广义的 Emden-Fowler 方程，关于广义的 Emden-Fowler 方程的知识可参阅综述文章[1]。非线性差分方程已经广泛应用于研究计算机科学、

* 收稿日期：2009-06-24
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10871213）；广东省自然科学基金资助项目（8151027501000053）
作者简介：连福云（1979年生），女，博士生；E-mail：lianliann@yahoo.com.cn

经济学、神经网络、生态学及控制论等学科中出现的离散模型，关于差分方程的一般背景及基本理论可参阅文献 [2-3]。许多作者已经对差分方程边值问题解的存在性应用不同的方法进行了深入的研究，这些方法主要有上下解方法[4-5]、不动点定理[5-6]，拓扑度理论等[7]。值得注意的是，近几年来已有许多作者用临界点理论研究 BVP 解的存在性，这是很有力的工具，可参阅文献 [8-11]。目前关于 BVP (1) 多解性的研究结果较少，可见参考文献 [10-11]。文献 [10] 中作者在满足条件

$$\liminf_{|z|\to+\infty}\frac{f(k,z)}{z}\geqslant\delta>4\max_{k\in\mathbb{Z}[0,N]}\{|p_k|\}-\min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{q_k\},\ \forall k\in\mathbb{Z}[1,N] \tag{2}$$

的前提下得到了 BVP (1) 至少有两个非零解的充分条件。文献 [11] 中作者在满足条件

$$\text{存在}\beta_k\in\mathbb{R}\text{，使得}\lim_{z\to\infty}\frac{f(k,z)}{z}\geqslant\beta_k,\quad\forall k\in\mathbb{Z}[1,N] \tag{3}$$

的前提下得到了 BVP (1) 至少有 $2N$ 个解的充分条件。

本文利用临界点理论对 BVP (1) 的多重解的存在性提出新的判别准则，该结果对条件 (2) 或者 (3) 不满足的情况下仍然可以判断某些 BVP (1) 的多重解的存在性。

1　基本引理及变分框架

设 E 是一个 Banach 空间，$I\in C^1(E,\mathbb{R})$。如果 $u_0\in E$ 满足 $I'(u_0)=0$，则称 u_0 为 I 的临界点，$I(u_0)=c$ 称为 I 的临界值。如果 $u^{(n)}\subset E$，$I'(u^{(n)})$ 有界，$I'(u^{(n)})\to0$ $(n\to\infty)$ 蕴含 $u^{(n)}$ 有收敛子列，则称 I 满足 Palais-Smale 条件，简称 P. S. 条件。令 θ 表示 Banach 空间 E 的零元素，S^{n-1} 表示 $(n-1)$ 维单位球面。关于临界点理论的基本知识可参阅文献 [12-13]。

引理 1[13]　设 E 是实 Banach 空间，$I\in C^1(E,\mathbb{R})$ 是有下界的偶泛函且满足 P. S. 条件。假设 $I(\theta)=0$，存在集合 $K\subset E$ 使得 K 通过奇映射同胚于 S^{n-1}，并且 $\sup_K I<0$。则 I 至少有 n 对不同的临界点。

对 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_N)\in\mathbb{R}^N$，令 $\|u\|_{\max}=\max\{|u_1|,|u_2|,\cdots,|u_N|\}$，其中 $|u_i|$ 表示 u_i 的绝对值。对任意 $k\in\mathbb{Z}[1,N]$，假设

(H_1) 存在 $\alpha>0$ 使得 $f(k,\alpha)\leqslant0$ 并且 $q_k\alpha+f(k,\alpha)<0$ 成立；

(H_2) $\min_{k\in\mathbb{Z}[0,N]}\{p_k\}>0$ 且 $q_k\leqslant0$；

(H_3) $f(k,u)$ 关于 u 是奇函数。

定义

$$h(k,s)=\begin{cases}\dfrac{s}{\alpha}f(k,\alpha), & s>\alpha\\ f(k,s), & |s|\leqslant\alpha\\ -\dfrac{s}{\alpha}f(k,-\alpha), & s<-\alpha\end{cases}$$

引理 2　假设 (H_1)、(H_2)、(H_3) 对任意 $k\in\mathbb{Z}[1,N]$ 成立，并且存在 $(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_N,u_{N+1})\in\mathbb{R}^{N+2}$ 使得

$$\begin{cases}\Delta[p_{k-1}\Delta u_{k-1}]+q_ku_k+h(k,u_k)=0,\ k\in\mathbb{Z}[1,N]\\ u_0=u_N,p_0\Delta u_0=p_N\Delta u_N\end{cases} \tag{4}$$

则 $\|u\|_{\max}\leqslant\alpha$，从而 $(u_0,u_1,u_2,\cdots,u_N,u_{N+1})$ 是 BVP (1) 的解。

证明　反证法。假设存在 $k_0\in\mathbb{Z}[1,N]$ 使得 $|u_{k_0}|>\alpha$ 及 $|u_k|\leqslant\alpha$，$k\in\mathbb{Z}[1,k_0-1]$。

(I) 如果 $u_{k_0}>\alpha$ 且 $k_0>1$，则 $u_1\leqslant\alpha$。由 (H_1) 及 h 的定义知 $h(k_0,u_{k_0})\leqslant0$。

一方面，由 (4) 及 (H_2)，有 $p_{k_0}\Delta u_{k_0}=p_{k_0-1}\Delta u_{k_0-1}-q_{k_0}u_{k_0}-h(k_0,u_{k_0})\geqslant p_{k_0-1}\Delta u_{k_0-1}>0$。从而 $u_{k_0+1}>u_{k_0}>\alpha$ 并且 $h(k_0+1,u_{k_0+1})\leqslant0$。因此

$$p_{k_0+1}\Delta u_{k_0+1}=p_{k_0}\Delta u_{k_0}-q_{k_0+1}u_{k_0+1}-h(k_0+1,u_{k_0+1})\geqslant p_{k_0}\Delta u_{k_0}>0$$

从而 $u_{k_0+2}>u_{k_0+1}>\alpha$ 且 $h(k_0+2,u_{k_0+2})\leqslant0$。重复上述过程，得到 $u_N>u_{N-1}>\cdots>u_{k_0+1}>u_{k_0}>\alpha$。

另一方面，根据 (4) 的边界条件，有 $p_0u_1=p_0u_0+p_Nu_{N+1}-p_Nu_N>p_0u_0=p_0u_N$。从而 $u_N<u_1\leqslant\alpha$，得出矛盾。

(II) 如果 $u_{k_0}>\alpha$ 且 $k_0=1$，分以下三种情形考虑。

(i) 如果 $u_0<u_1$ 且 $u_1>\alpha$，则由 (H_1) 及 h 的定义知 $h(1,u_1)\leqslant0$。由 (4) 及 (H_2)，有

$p_1\Delta u_1=p_0\Delta u_0-q_1u_1-h(1,u_1)\geqslant p_0\Delta u_0>0$，从而 $u_2>u_1>\alpha$ 且 $h(2,u_2)\leqslant0$。因此

$p_2\Delta u_2=p_1\Delta u_1-q_2u_2-h(2,u_2)\geqslant p_1\Delta u_1>0$，从而 $u_3>u_2>\alpha$。重复上述过程，得到 $u_N>u_{N-1}>\cdots>u_1$。

再由 (4) 的边界条件 $u_0=u_N$ 知 $u_0>u_1$，因此得出矛盾。

(ii) 如果 $u_0=u_1$ 且 $u_1>\alpha$，类似于情形 (i)，有 $u_{N+1}\geqslant u_N\geqslant u_{N-1}\geqslant\cdots\geqslant u_1$。再由 (4) 的边界

条件 $u_0 = u_N$，$p_0\Delta u_0 = p_N\Delta u_N$，得到 $u_k \equiv u_0$，$\forall k \in \mathbb{Z}[0,N+1]$。从而由（4）及 h 的定义可得

$$q_k u_0 = -h(k,u_0) = -\frac{u_0}{\alpha}f(k,\alpha),\ \forall k \in \mathbb{Z}[1,N]$$

，因此 $q_k\alpha + f(k,\alpha) = 0$，与（$H_1$）矛盾。

（iii）如果 $u_0 > u_1$ 且 $u_1 > \alpha$，则由（4）的边界条件、（H_1）及 h 的定义知 $h(N,u_N) = h(N,u_0) \leqslant 0$。

一方面，由（4）及（H_2），有

$$0 > p_0\Delta u_0 = p_N\Delta u_N = p_{N-1}\Delta u_{N-1} - q_N u_N - h(N,u_N) \geqslant p_{N-1}\Delta u_{N-1}$$

从而 $u_{N-1} > u_N > \alpha$ 且 $h(N-1,u_{N-1}) \leqslant 0$。因此

$$0 > p_{N-1}\Delta u_{N-1} = p_{N-2}\Delta u_{N-2} - q_{N-1}u_{N-1} - h(N-1,u_{N-1}) \geqslant p_{N-2}\Delta u_{N-2}$$

从而 $u_{N-2} > u_{N-1} > \alpha$。重复上述过程，有 $u_0 > u_1 > u_2 > \cdots > u_{N-1} > u_N$。

另一方面，根据（4）的边界条件，$u_0 = u_N$，因此得出矛盾。

（III）如果 $u_{k_0} < -\alpha$，由（H_3）及 h 的定义，类似于（I）、（II）的证明过程可得出矛盾。证毕。

现在我们建立 BVP（4）的变分泛函。令

$$E = \{u \mid u = (u_0,u_1,\cdots,u_N,u_{N+1}) \in \mathbb{R}^{N+2},\ u_0 = u_N, p_0\Delta u_0 = p_N\Delta u_N\}$$

定义 E 上的内积为 $\langle u,v\rangle = \sum_{k=1}^{N} u_k v_k$，$\forall u,v \in E$。由此内积可以诱导出空间 E 上的范数为 $\|u\| = [\sum_{k=1}^{n} |u_k|^2]^{1/2}$，$\forall u \in E$。考虑定义在 E 上的泛函

$$I(u) = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{p_{k-1}}{2}|\Delta u_{k-1}|^2 - \frac{q_k}{2}|u_k|^2 - H(k,u_k)\right]$$

其中 $H(k,z) = \int_0^z h(k,s)\mathrm{d}s$。易知 $I(\theta) = 0$。因为 $h:\mathbb{Z}[1,N]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是连续有界奇泛函，因此 $I \in C^1(E,\mathbb{R})$ 是偶泛函。通过简单的计算可得 $u = (u_0,u_1,\cdots,u_N,u_{N+1}) \in E$ 是 I 的临界点当且仅当它是 BVP（4）的解，这样就把 BVP（4）的解的存在性转化为泛函 I 的临界点的存在性。

2 主要结论

定理 1 假设（H_1）、（H_2）、（H_3）对任意 $k \in \mathbb{Z}[1,N]$ 成立，且存在常数 $\mu_k(k \in \mathbb{Z}[1,N])$ 使得 $\lim_{u\to 0}\frac{f(k,u)}{u} = \mu_k$。若 $\min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{\mu_k\} > 4\max_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{p_{k-1}\} - \min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{q_k\}$。则（1）至少有 N 对不同的解，而且每个解 $u = (u_0,u_1,\cdots,u_N,u_{N+1}) \in E$ 满足 $|u_k| \leqslant \alpha$，$k \in \mathbb{Z}[1,N]$。

证明 记 $c := \int_0^\alpha |f(k,s)|\mathrm{d}s$，$C := \left[c - \frac{f(k,\alpha)\alpha}{2}\right]N$，$m := -\frac{1}{2\alpha}\max_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}[q_k\alpha + f(k,\alpha)]$。

则由（H_1）知 $C > 0, m > 0$。由（H_3）及 h 的定义可知对任意的 $k \in \mathbb{Z}[1,N]$，$h(k,s)$ 关于 s 是奇函数，从而对任意的 $k \in \mathbb{Z}[1,N]$，$H(k,s) = \int_0^s h(k,z)\mathrm{d}z = -\int_0^{-s}h(k,-z)\mathrm{d}z = \int_0^{-s}h(k,z)\mathrm{d}z = H(k,-s)$，即 $H(k,s)$ 关于 s 是偶函数。

若 $u_k > \alpha$，则由 h 的定义，

$$H(k,u_k) = \int_0^\alpha h(k,s)\mathrm{d}s + \int_\alpha^{u_k}h(k,s)\mathrm{d}s = \int_0^\alpha f(k,s)\mathrm{d}s + \frac{f(k,\alpha)}{\alpha}\int_\alpha^{u_k}s\mathrm{d}s \leqslant c + \frac{f(k,\alpha)}{2\alpha}(|u_k|^2 - \alpha^2)$$

若 $u_k < -\alpha$，则 $H(k,u_k) = H(k,-u_k) \leqslant c + \frac{f(k,\alpha)}{2\alpha}(|u_k|^2 - \alpha^2)$。

若 $|u_k| \leqslant \alpha$，则 $H(k,u_k) = \int_0^{u_k}h(k,s)\mathrm{d}s \leqslant \int_0^\alpha |h(k,s)|\mathrm{d}s = \int_0^\alpha |f(k,s)|\mathrm{d}s = c \leqslant c + \frac{f(k,\alpha)}{2\alpha}(|u_k|^2 - \alpha^2)$。

因此对任意 $u = (u_0,u_1,\cdots,u_N,u_{N+1}) \in E$，

$$I(u) = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{p_{k-1}}{2}|\Delta u_{k-1}|^2 - \frac{q_k}{2}|u_k|^2 - H(k,u_k)\right] \geqslant \sum_{k=1}^{N}\left[-\frac{q_k}{2}|u_k|^2 - c - \frac{f(k,\alpha)}{2\alpha}(|u_k|^2 - \alpha^2)\right] \geqslant -\frac{1}{2\alpha}\max_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}[q_k\alpha + f(k,\alpha)]\|u\|^2 - \left[c - \frac{f(k,\alpha)\alpha}{2}\right]N = m\|u\|^2 - C \tag{5}$$

从而 I 在 E 上有下界。

设对序列 $\{u^{(n)}\}_{n=1}^{\infty} \subset E$，存在常数 c_1,c_2 使得 $c_1 \leqslant I(u^{(n)}) \leqslant c_2$，$n = 1,2,\cdots$。由（5）知 $\|u^{(n)}\| \leqslant \left[\frac{I(u^{(n)}) + C}{m}\right]^{1/2} \leqslant \left[\frac{c_2 + C}{m}\right]^{1/2}$。

因此，$\{u^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ 在 E 上有界，从而有收敛子列，即 I 满足 P. S. 条件。

设 $0 < \varepsilon < \min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{\mu_k\} - 4\max_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{p_{k-1}\} + \min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{q_k\}$，则存在 $\delta > 0$ 使得 $|s| \leqslant \delta$ 时，$|f(k,s) - \mu_k s| \leqslant \varepsilon|s|$。令 $0 < \rho < \min\{\alpha,\delta\}$，

定义

$$K = \{(u = (u_0, u_1, u_2, \cdots, u_N, u_{N+1}) \in E \mid \|u\| = \rho\}$$

易知 $K \subset E$ 且 K 通过奇映射同胚于 S^{N-1}。对 $k \in \mathbb{Z}[1,N]$ 并且 $u \in K$，有 $|u_k| \leqslant \|u\| = \rho < \min\{\alpha, \delta\}$。因此，对 $k \in \mathbb{Z}[1,N]$ 并且 $u \in K$，

$$H(k,u_k) = \int_0^{u_k} h(k,s)\,\mathrm{d}s = \int_0^{u_k} f(k,s)\,\mathrm{d}s \geqslant \frac{1}{2}(\mu_k - \varepsilon)\,|u_k|^2$$

当 $\min\limits_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{\mu_k\} > 4\max\limits_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{p_{k-1}\} - \min\limits_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{q_k\}$ 时，对 $u \in K$，

$$I(u) = \sum_{k=1}^{N}\left[\frac{p_{k-1}}{2}|\Delta u_{k-1}|^2 - \frac{q_k}{2}|u_k|^2 - H(k,u_k)\right] \leqslant \max_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{p_{k-1}\}\sum_{k=1}^{N}[\,|u_k|^2 + |u_{k-1}|^2] - \frac{1}{2}[\min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{q_k\} + \min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{\mu_k\} - \varepsilon]\,\|u\|^2 = \frac{1}{2}[4\max_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{p_{k-1}\} - \min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{q_k\} - \min_{k\in\mathbb{Z}[1,N]}\{\mu_k\} + \varepsilon]\,\|u\|^2 < 0$$

由引理 1，I 至少有 N 对不同的临界点。从而 BVP（4）至少有 N 对不同的解。再由引理 2，BVP（1）至少有 N 对不同的解且每个解 $u = (u_0, u_1, u_2, \cdots, u_N, u_{N+1}) \in E$ 满足 $|u_k| \leqslant \alpha$，$k \in \mathbb{Z}[1,N]$。

例 1　考虑如下边值问题

$$\begin{cases}\Delta^2 u_{k-1} - u_k + 6u_k + u_k^2 \sin u_k = 0,\ k \in \mathbb{Z}[1,N] \\ u_0 = u_N, \Delta u_0 = \Delta u_N\end{cases} \tag{6}$$

也就是说，对 BVP（1），取 $p_k = 1(k \in \mathbb{Z}[0,N])$，$q_k = -1$，$f(k,s) = 6s + s^2\sin s(k \in \mathbb{Z}[1,N])$。对任意的 $k \in \mathbb{Z}[1,N]$，任取 $\alpha > 0$ 使得 $6 + \alpha\sin\alpha \leqslant 0$，从而 $f(k,\alpha) = 6\alpha + \alpha^2\sin\alpha \leqslant 0$，$q_k\alpha + f(k,\alpha) = 5\alpha + \alpha^2\sin\alpha < 0$，并且 $\lim\limits_{s\to 0}\frac{f(k,s)}{s} = 6 > 5$。

于是定理 1 的所有条件均满足，故 BVP（6）至少有 N 对不同的解且每个解 $u = (u_0, u_1, u_2, \cdots, u_N, u_{N+1}) \in E$ 满足 $|u_k| \leqslant \alpha$，$k \in \mathbb{Z}[1,N]$。由于 $\frac{f(k,s)}{s} = 6 + s\sin s$，从而 $\lim\limits_{s\to\infty}\frac{f(k,s)}{s}$ 不存在并且 $\liminf\limits_{s\to\infty}\frac{f(k,s)}{s} = -\infty$，即条件（2）和（3）都不满足。因此文献［10－11］中的结论无法得出 BVP（6）的多重解的存在性。

参考文献：

［1］ WONG J S. On the generalized Emden-Fowler equation［J］. SIAM Rev, 1975, 2 (17): 339－360.

［2］ AGRAWAL R P. Difference equations and inequalities［M］. New York: Marcal Dekker, 1992.

［3］ ELAYDI S. An introduction to difference equations［M］. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1999.

［4］ AGRAWAL R P, O'REGAN D. Boundary value problems for discrete equations［J］. Appl Math Lett, 1997, 10: 83－89.

［5］ HENDERSON J, THOMPSON H B. Existence of multiple solutions for second-order discrete boundary value problems［J］. Comput Math Appl, 2002, 43: 1239－1248.

［6］ ATICI F M, CABADA A. Existence and uniqueness results for discrete second-order periodic boundary value problems［J］. Comput Math Appl, 2003, 45: 1417－1427.

［7］ THOMPSON H B, TISDELL C. Systems of difference equations associated with boundary value problems for second-order systems of ordinary differential equations［J］. J Math Anal Appl, 2000, 248: 333－347.

［8］ AGARWAL R P, PERERA K, O'REGAN D. Multiple positive solutions of singular and nonsingular discrete problems via variational methods［J］. Nonlinear Anal, 2004, 58: 69－73.

［9］ BAI D Y, XU Y T. Nontrivial solutions of boundary value problems of second-order difference equations［J］. J Math Anal Appl, 2007, 326: 297－302.

［10］ HE X M, WU X. Existence and multiplicity of solutions for nonlinear second order difference boundary value problems［J］. Comput Math Appl, 2009, 57: 1－8.

［11］ LIANG H H, WENG P X. Existence and multiple solutions for a second-order difference boundary value problem via critical point theory［J］. J Math Anal Appl, 2007, 326: 511－520.

［12］ CHANG K C. Critical point theory and applications［M］. Shanghai: Shanghai Science and Technical Press, 1986.

［13］ RABINOWITZ P. Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations［C］// CBMS Reg Conf, 65, Amer Math Soc, 1986.