第 49 卷 第 6 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 6
2010 年 11 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 2010

有限集合上封闭集族的计数*

唐保祥[1,2]，任 韩[2]
（1. 天水师范学院数学与统计学院，甘肃 天水 741001；
2. 华东师范大学数学系，上海 200062）

摘 要：设集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，$f(n,m)$ 表示 X 的含 m 个元素的不同封闭集族的数目。证明了

$$f(n,m)=\begin{cases}3^n-2^n, m=2;\\ 4^n-2\cdot 3^n+2^n, m=3;\\ 5^n-\dfrac{5}{2}\cdot 4^n+2\cdot 3^n-2^{n-1}, m=4;\\ 6^n-3\cdot 5^n+3\cdot 4^n-3^n, m=5\end{cases}$$

其中 $n=1,2,3,\cdots$。

关键词：子集；幂集；封闭集族
中图分类号：O157.5 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2010）06-0011-04

Enumeration of Closed Family of Finite Sets

TANG Baoxiang[1,2]，*REN Han*[2]
（1. School of Mathematics and Statistics Institute，Tianshui Normal University，Tianshui 741001，China；
2. Department of Mathematics，East China Normal University，Shanghai 200062，China）

Abstract：Let $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$ be a finite set and $f(n,m)$ the number of closed family of sets with m elements of X. Then we show that：

For every integer $n\geqslant 1$，
$$f(n,m)=\begin{cases}3^n-2^n, m=2;\\ 4^n-2\cdot 3^n+2^n, m=3;\\ 5^n-\dfrac{5}{2}\cdot 4^n+2\cdot 3^n-2^{n-1}, m=4;\\ 6^n-3\cdot 5^n+3\cdot 4^n-3^n, m=5.\end{cases}$$

Key words：subset；power set；closed family of sets

本文所用术语均是标准的，所用概念或符号均采用文献［1-4］。

有限集合元素的计数问题，在许多实际问题中有重要应用。但是，面对一个具体问题往往很难找到系统和有力的工具来统一解决。因此，解决计数问题往往需要问题解决者创造一些特殊的方法[5-12]，而这些方法又为解决另外一些新问题提供了重要思想。

1 若干定义

定义 1 设 X 是一个集合，令 $2^X=\{A\mid A\subseteq X\}$，称 2^X 为集合 X 的幂集[1-4]。

定义 2 设集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，$S\subseteq 2^X$，若 $\forall A_1,A_2\in S$，$A_1\cap A_2$，$A_1\cup A_2\in S$，则称 S 为 X 上的一个封闭集族。

对一般的 n，具有 n 个元素的集合 X 上关于交

* 收稿日期：2009-12-04
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671073）；上海市自然科学基金资助项目（07XD14011）；上海市重点学科建设基金资助项目（B407）
作者简介：唐保祥（1961 年生），男，副教授；E-mail：tbx0618@sina.com

与并运算封闭的子集族的数目有多少，至今未见有相关结果的文献。本文给出了 n 个元素的集合上关于集合的交与并运算封闭的部分集族的数目。

2 结果及其证明

设集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，本文用 $f(n,m)$ 表示 X 上有 m 个元素的所有不同的封闭集族的数目。对任意正整数 n，为了得到 $m=2,3,4,5$ 时 $f(n,m)$ 的值，首先给出下面的定理。

定理1 设 $\mathbb{Z}^+$ 为正整数集合，$\forall m,n,i,j,k,l\in\mathbb{Z}^+$，则下面结论成立：

1) $\sum\limits_{i=1}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}=3^n-2^{n+1}+1$；

2) $\sum\limits_{i=2}^{n-1}\sum\limits_{j=1}^{i-1}\sum\limits_{k=0}^{j-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=4^n-3^{n+1}+3\cdot 2^n-1$；

3) $\sum\limits_{i=3}^{n-1}\sum\limits_{j=2}^{i-1}\sum\limits_{k=1}^{j-1}\sum\limits_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}=5^n-4^{n+1}+2\cdot 3^{n+1}-2^{n+2}+1$；

4) $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}=3^n-2^n$；

5) $\sum\limits_{i=2}^{n}\sum\limits_{j=1}^{i-1}\sum\limits_{k=0}^{j-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=4^n-2\cdot 3^n+2^n$；

6) $\sum\limits_{i=3}^{n}\sum\limits_{j=2}^{i-1}\sum\limits_{k=1}^{j-1}\sum\limits_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}=5^n-3\cdot 4^n+3^{n+1}-2^n$；

7) $\sum\limits_{i=4}^{n}\sum\limits_{j=3}^{i-1}\sum\limits_{k=2}^{j-1}\sum\limits_{l=1}^{k-1}\sum\limits_{m=0}^{l-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\binom{l}{m}=6^n-4\cdot 5^n+6\cdot 4^n-4\cdot 3^n+2^n$。

证明

1) 因为 $(m+1)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot m^i$ [1-4]，所以当 $n\geqslant 3$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}=\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}\Big[\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}-\binom{i}{i}\Big]=$$
$$\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}(2^i-1)=3^n-2^{n+1}+1$$

2) 由1) 有

$$\sum_{i=2}^{n-1}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=\sum_{i=2}^{n-1}\binom{n}{i}\Big[\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\Big]=$$
$$\sum_{i=2}^{n-1}\binom{n}{i}(3^i-2^{i+1}+1)=4^n-3^{n+1}+3\cdot 2^n-1$$

3) 由2) 有

$$\sum_{i=3}^{n-1}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}=$$
$$\sum_{i=3}^{n-1}\binom{n}{i}(4^i-3^{i+1}+3\cdot 2^i-1)=$$
$$5^n-4^{n+1}+2\cdot 3^{n+1}-2^{n+2}+1$$

4)

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=0}^{i-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\Big[\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}-\binom{i}{i}\Big]=$$
$$\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}(2^i-1)=\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}\cdot 2^i-\sum_{i=1}^{n}\binom{n}{i}=3^n-2^n$$

5) 由1) 有

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=$$
$$\sum_{i=2}^{n}\binom{n}{i}(3^i-2^{i+1}+1)=4^n-2\cdot 3^n+2^n$$

6) 由2) 有

$$\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}=$$
$$\sum_{i=3}^{n}\binom{n}{i}(4^i-3^{i+1}+3\cdot 2^i-1)=$$
$$5^n-3\cdot 4^n+3^{n+1}-2^n$$

7) 由3) 有

$$\sum_{i=4}^{n}\sum_{j=3}^{i-1}\sum_{k=2}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{l-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\binom{l}{m}=$$
$$\sum_{i=4}^{n}\binom{n}{i}(5^i-4^{i+1}+2\cdot 3^{i+1}-2^{n+2}+1)=$$
$$6^n-4\cdot 5^n+6\cdot 4^n-4\cdot 3^n+2^n$$

易验证上述7个式子对 $n\geqslant 1$ 的整数都成立。证毕。

定理2 设集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，则

1) $f(n,2)=3^n-2^n$；

2) $f(n,3)=4^n-2\cdot 3^n+2^n$；

3) $f(n,4)=5^n-\frac{5}{2}\cdot 4^n+2\cdot 3^n-2^{n-1}$；

4) $f(n,5)=6^n-3\cdot 5^n+3\cdot 4^n-3^n$。

证明 设 $S\subseteq 2^X$，$S=\{A_1,A_2,A_3,\cdots,A_m\}$ 是 X 的任一具有 m 个元素的封闭集族，$m\geqslant 2$。因为 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i$，$\bigcap\limits_{i=1}^{m}A_i\in S$，存在 $A_k,A_l\in S$ 使得 $\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=A_k$，$\bigcap\limits_{i=1}^{m}A_i=A_l$，不妨设 $\bigcap\limits_{i=1}^{m}A_i=A_1$，$\bigcup\limits_{i=1}^{m}A_i=A_m$。从而，$\forall A_i\in S$ 都有 $A_1\subseteq A_i\subseteq A_m, i=2,3,\cdots,m-1$。

1) 当 $m=2$ 时，有上述证明可知，$A_1\subset A_2$。注意到空集是任何集合的子集，因此

由定理1知，X 中有2个元素的封闭集族共有 $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=0}^{i-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}=3^n-2^n$ 个，故 $f(n,2)=3^n-2^n$。

2) 当 $m=3$ 时，S 中的3个元素满足 $A_1\subset A_2\subset$

A_3 。所以定理 1 有

$$f(n,3)=\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=4^n-2\cdot 3^n+2^n$$

3）当 $m=4$ 时，$S=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 是 X 的任一具有 4 个元素的封闭集族，由上面证明知，$A_1\subset A_i\subset A_4,i=2,3$ 。此时，S 分如下两类情形：

（Ⅰ）$A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4$，或 $A_1\subset A_3\subset A_2\subset A_4$；

（Ⅱ）$A_1=A_2\cap A_3$，$A_4=A_2\cup A_3$ 。

事实上，由于 $A_1\subset A_2,A_1\subset A_3$，所以 $A_2\cup A_3\neq A_1$。

情形 1　$A_2\cup A_3\neq A_4$

由于 $A_2\cup A_3\neq A_4$，所以 $A_2\cup A_3=A_2$ 或 A_3，从而 $A_3\subset A_2$ 或 $A_2\subset A_3$ 。如果 $A_3\subset A_2$，那么 $A_1\subset A_3\subset A_2\subset A_4$；如果 $A_2\subset A_3$，那么 $A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4$。所以当 $A_2\cup A_3\neq A_4$ 时，S 是第（Ⅰ）类的封闭集族。这类共有 $\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}$ 个。

情形 2　$A_2\cup A_3=A_4$

由于 $A_2\cup A_3=A_4$，所以 $A_2\cap A_3\neq A_4$，且 $A_2\cap A_3\neq A_2$，且 $A_2\cap A_3\neq A_3$ 。否则，若 $A_2\cap A_3=A_4$，则 $A_2=A_3=A_4$，出现矛盾。若 $A_2\cap A_3=A_2$，则 $A_2=A_4$，出现矛盾。若 $A_2\cap A_3=A_3$，则 $A_3=A_4$，出现矛盾。因此，当 $A_2\cup A_3=A_4$ 时，必有 $A_2\cap A_3=A_1$ 。设 $A\subseteq X,|A|=i,2\leqslant i\leqslant n;B\subset A,|B|=j,1\leqslant j\leqslant i-1$；$C\subset B,|C|=k,0\leqslant k\leqslant j-1$ 。令 $D=A-B,E=D\cup C$，则 $S=\{C,B,E,A\}$ 就是第（Ⅱ）类的封闭集族，其中 $A=B\cup E$，$C=B\cap E$. 注意到对上述 $B\subset A,C\subset B$，有唯一 $D=A-B,E=D\cup C$，而当 C 固定，B 取 D，对应的 E 恰好就是 B。因此，这类共有 $\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}$ 个。由定理 1 知，

$$f(n,4)=\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}+\frac{1}{2}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}\sum_{k=0}^{j-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}=$$

$$(5^n-3\cdot 4^n+3^{n+1}-2^n)+\frac{1}{2}(4^n-2\cdot 3^n+2^n)=$$

$$5^n-\frac{5}{2}\cdot 4^n+2\cdot 3^n-2^{n-1},n\geqslant 1$$

4）当 $m=5$ 时，$S=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ 是 X 的任一具有 5 个元素的封闭集族，由上面证明知，$A_1\subset A_i\subset A_5,i=2,3,4$ 。此时，S 分如下三类情形：

（Ⅰ）$A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4\subset A_5$，或 $A_1\subset A_3\subset A_2\subset A_4\subset A_5$；

（Ⅱ）$A_1=A_2\cap A_3,A_4=A_2\cup A_3,A_4\subset A_5,A_1\subset A_i\subset A_5,i=2,3,4$；

（Ⅲ）$A_2\cup A_4=A_5,A_3=A_2\cap A_4,A_1\subset A_i\subset A_5,i=2,3,4$。

情形 1　$\forall A_i,A_j\in\{A_2,A_3,A_4\}$，如果当 $A_i\neq A_j$ 时，总有 $A_1\subset A_i\cup A_j\subset A_5$ 。因为 $A_i\cup A_j\in S$，所以 $A_i\cup A_j\in\{A_2,A_3,A_4\}$ 。因此，存在 $A_i,A_j\in\{A_2,A_3,A_4\},A_i\neq A_j$，使得 $A_i\subset A_j$ 。不妨设 $A_3\subset A_4$ 。

(i) $A_2\cup A_3\neq A_4$

因为 $A_2\cup A_3\neq A_4,A_2\cup A_3\subset A_5$，所以 $A_2\cup A_3=A_2$ 或 A_3 。若 $A_2\cup A_3=A_3$，则由 $A_2\subset A_3$ 知，$A_1\subset A_2\subset A_3\subset A_4\subset A_5$，故 S 是第（Ⅰ）类的。若 $A_2\cup A_3=A_2$，则 $A_3\subset A_2$。由 $A_3\subset A_2,A_3\subset A_4$ 知，$A_2\cup A_4=A_2$ 或 A_4 。若 $A_2\cup A_4=A_2$，由 $A_2\cup A_3=A_2$ 知，$A_3=A_4$，出现矛盾。若 $A_2\cup A_4=A_4$，则 $A_2\subset A_4$ 。因此，$A_1\subset A_3\subset A_2\subset A_4\subset A_5$，故 S 也第（Ⅰ）类的。

(ii) $A_2\cup A_3=A_4$

若 $A_2\cup A_3=A_4$，则 $A_2\cap A_3=A_1$. 事实上，因为 $A_2\cap A_3=A_1$ 或 A_2 或 A_3 。若 $A_2\cap A_3=A_2$，则 $A_2\subset A_3$，故 $A_3=A_4$，矛盾。若 $A_2\cap A_3=A_3$，则 $A_3\subset A_2$，于是 $A_2=A_4$，矛盾。故 $A_2\cap A_3=A_1$ 。因此，S 是第（Ⅱ）类的。

情形 2　存在不同 $A_i,A_j\in\{A_2,A_3,A_4\}$，使得 $A_i\cup A_j=A_5$ 。不妨设 $A_2\cup A_4=A_5$，则 $A_2\cap A_4\neq\phi$ 。否则，若 $A_2\cap A_4=\phi$，则 $\{A_2,A_4\}$ 是 A_5 的一个划分。此时，如果 $A_2\cap A_3\neq\phi$ 且 $A_3\cap A_4\neq\phi$，那么 $A_2,A_3,A_4,A_2\cap A_3,A_3\cap A_4,A_5$ 是 S 中 6 个互不相同的元素。这与 S 仅有 5 个元素矛盾。故当 $A_2\cap A_4=\phi$ 时，$A_2\cap A_3=\phi$，或 $A_3\cap A_4=\phi$ 。不妨设 $A_2\cap A_3=\phi$，则 $A_3\subset A_4$，于是 $A_1,A_2,A_3,A_2\cup A_3,A_4,A_5$ 是 S 中 6 个互不相同的元素。这与 S 中仅有 5 个元素矛盾。所以当 $A_2\cup A_4=A_5$ 时，有 $A_2\cap A_4\neq\phi$ 。又因 $A_1\subset A_2\cap A_4$，故 $A_3=A_2\cap A_4$ 。因此，S 是第（Ⅲ）类的。

下面分别计算这三类 S 的数目。

显然第（Ⅰ）类封闭集族共有 $\sum_{i=4}^{n}\sum_{j=3}^{i-1}\sum_{k=2}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{l-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\binom{l}{m}$ 个。由定理 1 知

$$\sum_{i=4}^{n}\sum_{j=3}^{i-1}\sum_{k=2}^{j-1}\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{m=0}^{l-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\binom{l}{m}=$$

$$6^n-4\cdot 5^n+6\cdot 4^n-4\cdot 3^n+2^n$$

对 X 的每一个第（Ⅱ）类的封闭集族 $S=$

$\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$，因为 $A_1=A_2\cap A_3,A_4=A_2\cup A_3,A_4\subset A_5,A_1\subset A_i\subset A_5,i=2,3,4$，所以 $S_1=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ 是集合 A_5 的满足 $A_4\subset A_5$ 的一个4个元素的第（Ⅱ）类封闭集族。反之，任意给定 X 的一个满足 $|A_4|\leqslant n-1$ 的有4个元素的第（Ⅱ）类封闭集族 $S_1=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$，对 $\forall B\subseteq X-A_4$，且 $B\neq\phi$，令 $A_5=A_4\cup B$，则 $S=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ 是 X 的一个5个元素的封闭集族。因此第2）类的封闭集族的数目为 $\sum_{i=3}^{n}\left[\binom{n}{i}\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\right]$ 个。由定理1的6）知

$$\sum_{i=3}^{n}\left[\binom{n}{i}\frac{1}{2}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}\right]=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}=$$
$$\frac{1}{2}(5^n-3\cdot4^n+3^{n+1}-2^n)$$

取 $A_5\subseteq X,|A_5|=i,3\leqslant i\leqslant n;A_2\subset A_5,|A_2|=j,2\leqslant j\leqslant i-1$；$Y=A_5-A_2$，$A_3\subset A_2$，$|A_3|=k,1\leqslant k\leqslant j-1;A_4=Y\cup A_3;A_1\subset A_3,|A_1|=l,0\leqslant l\leqslant k-1$。于是 $A_2\cup A_4=A_5,A_3=A_2\cap A_4,A_1\subset A_i\subset A_5,i=2,3,4$。从而 $S=\{A_1,A_2,A_3,A_4,A_5\}$ 是 X 的第（Ⅲ）类封闭集族。注意到对上述的 $A_2\subset A_5$，有唯一的 $A_4=Y\cup A_3$。而当 A_2 取 A_4，A_3 不变时，对应的 A_4 恰是 A_2。因此，第（Ⅲ）类封闭集族的数目为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}\sum_{j=2}^{i-1}\sum_{k=1}^{j-1}\sum_{l=0}^{k-1}\binom{n}{i}\binom{i}{j}\binom{j}{k}\binom{k}{l}=$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i=3}^{n}\binom{n}{i}(4^n-3^{n+1}+3\cdot2^n-1)=$$
$$\frac{1}{2}(5^n-3\cdot4^n+3^{n+1}-2^n)$$

所以

$$f(n,5)=(6^n-4\cdot5^n+6\cdot4^n-4\cdot3^n+2^n)+\frac{1}{2}(5^n-3\cdot4^n+3^{n+1}-2^n)+\frac{1}{2}(5^n-3\cdot4^n+3^{n+1}-2^n)=6^n-3\cdot5^n+3\cdot4^n-3^n$$

证毕。

推论1 设集合 $X=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$，则上不多于5个元素的不同封闭集族的数目为 $6^n-2\cdot5^n+\frac{3}{2}\cdot4^n-2^{n-1}$。

证明 由定理2知，X 上不多于5个元素的不同封闭集族的数目为 $\sum_{i=2}^{5}f(n,i)=6^n-2\cdot5^n+\frac{3}{2}\cdot4^n-2^{n-1}$。证毕。

参考文献：

[1] 王元元，王庆瑞，黄纪麟，等. 组合数学理论与题解[M]. 上海:上海科学技术文献出版社,1989.
[2] 田秋成. 组合数学[M]. 北京:电子工业出版社,2006.
[3] 康庆德. 组合学笔记[M]. 北京:科学出版社,2009.
[4] 王天明. 近代组合学[M]. 大连:大连理工大学出版社,2008.
[5] RICHARD P STANLEY. 计数组合学[M]. 第一卷. 付梅,侯庆虎,辛国策等译. 北京:高等教育出版社,2009.
[6] 李磊. 关于几个组合计数公式的推广[J]. 工程数学学报,1996, 13(4):95－98.
[7] 陈宁宇,张武. 不相邻重排列的一种计数方法[J]. 上海大学学报:自然科学版,2005 (1):60－62.
[8] SPRUGNOLI R. Riordan arrays and the Abel－Gould identity [J]. Discrete Mathematics, 1995, 142(1－3):213－233.
[9] KRATTENTHALER C, MOHANTY S G. Counting Tableaux with row and column bounds [J]. Discrete Mathematics, 1995, 139:237－285.
[10] SU L C, PETER JAU－SHYONG SHIUE. On a combinatorial expression concerning Fermat's last theorem [J]. Advances in Applied Mathematics, 1997, 18:216－219.
[11] HE T X, HSU L C, SHIUE P J S, et al. A symbolic operator approach to several summation formulas for power series [J]. Journal of Computational and Applied Mathematics, 2005, 177 (1): 17－33.
[12] 龚日朝,廖基定,邹捷中. 一类带约束条件的集合之元素个数计数公式[J]. 应用数学学报,2008, 31(3):385－396.