一个二维纯林发展系统的古典解*

徐龙封，吴 慧
(安徽工业大学数理学院，安徽 马鞍山 243002)

摘 要：二维森林发展系统模型的研究还未见到任何结果。针对这类系统初始状态依赖于林木总量，而边界状态又依赖于初始状态，系统的边界不满足通常的三类条件之一的特点，采用在“树龄 - 直径”存在区域内引进一类特殊的曲线族，避开了提边界条件问题。再利用适当地选择林木直径尺度量纲的技巧，提出了一个适定的二维纯林发展系统模型，最后综合拉特征线、先验估计、构造初始状态积分方程、迭代等技巧证明了这个系统整体古典解的存在唯一性。

关键词：二维系统；特征线；古典解；积分方程

中图分类号：O175.12；O175.1 **文献标志码：**A **文章编号：**0529 - 6579 (2011) 04 - 0028 - 05

Classical Solution of a Two-Dimensional Dynamics System for Pure Forest

XU Longfeng, WU Hui
(School of Mathematics and Physics, Anhui University of Technology, Maanshan 243002, China)

Abstract: The research of two-dimensional forest dynamics system model is still open. First, for the peculiarity of two-dimensional forest dynamics systems with initial state depending only on total quantity of forest, and boundary condition depending only on initial state again, boundary of system not satisfying one of 3 kinds common conditions, by introducing a class of special family curves in presence region of “stand age-diameter”, the problem of boundary conditions is avoided. Secondly, using the technique of selecting measure dimension of lumber diameter properly, a well-posed two-dimensional forest dynamics system model is propounded. At last, colligating the technique of pulling characteristic curve, a prior estimate, structuring integral equation of initial state, iteration, the existence and uniqueness of the global classical solution are proved for this system.

Key words: two-dimensional systems; characteristic line; classical solution; integral equation

对森林发展系统的研究，吸引了很多科技工作者的兴趣。人们提出了很多森林发展系统模型[1-10]。但到目前为止，人们考虑的都只是一维模型，文献 [5] 中提出了一些多维模型，但没有作出进一步研究。下面我们考虑二维问题：设 x,y 分别表示林龄与林木的直径；l,d 分别是 x,y 的最大容许取值；直径对林龄的依赖关系 $k_1(x) \leq y \leq k_2(x)$，$k_1(x)$，$k_2(x)$ 都是 x 的严格单调增函数；$N(x,y,t)$ 表示时刻 t 林龄不超过 x 且直径不超过 y 的林分面积总数（林龄面积分布函数），当森林面积很大时，可以假定 $N(x,y,t)$ 对于 x,y 和 t 都是连续的，并认为它的偏导数 $\frac{\partial^2 N(x,y,t)}{\partial x \partial y} = p(x,y,t)$，$\frac{\partial N(x,y,t)}{\partial t}$ 都是连续的，$p(x,y,t)$ 称为纯林面积的林龄分布密度函数。定义相对采消率为 $\mu(x,y,t)$，表示在时刻 t 林龄为 x 直径为 y 的林木在单位时间内平均采消面积与剩余的面积之比。$\varphi_1(x,y)$，

* **收稿日期：**2010 - 07 - 28
基金项目：国家自然科学基金资助项目 (90410011)；安徽省教育厅重点自然科学基金资助项目 (KJ2010A043)；安徽工业大学研究生创新研究基金资助项目
作者简介：徐龙封 (1952 年生)，男，教授；E-mail：sampsonlfxu@163. com

$\varphi_2(x,y)$ 分别表示林木随林龄生长和随直径生长的平均速度。$p_0(x,y,0)$ 表示初始状态。$\beta(t) \geqslant \beta_0 > 0$ 表示造林更新面积与采消面积之比，$\gamma(t)$ 表示林木的成活率。

1　模型与假设

下列模型描述了一类纯林（即仅含一种树木的森林）林龄和直径密度结构发展过程。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial p}{\partial t} + \dfrac{\partial(\varphi_1(x,y)p)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varphi_2(x,y)p)}{\partial y} = \\ -\mu(x,y,t)p, \quad 0 < x < l, \\ \qquad k_1(x) \leqslant y \leqslant k_2(x), \quad 0 < t \leqslant T, \\ p(0,0,t) = \beta(t)\gamma(t)\displaystyle\int_0^l \mathrm{d}x \int_{k_1(x)}^{k_2(x)} \mu(x,y,t) \cdot \\ \qquad p(x,y,t)\,\mathrm{d}y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ p(x,y,0) = p_0(x,y) \geqslant 0, \ 0 \leqslant x \leqslant l, \\ \qquad k_1(x) \leqslant y \leqslant k_2(x), \\ N(t) = \displaystyle\int_0^l \mathrm{d}x \int_{k_1(x)}^{k_2(x)} p(x,y,t)\,\mathrm{d}y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\varphi_1(x,y)$，$\varphi_2(x,y)$ 也分别表示林龄量纲和直径量纲与时间量纲的比率[5]。根据常识，x 与 t 量纲相同，因此 $\varphi_1(x,y) \equiv 1, k'_1(x) \leqslant \varphi_2(x,y) \leqslant k'_2(x), k_1(0) = k_2(0) = 0$，且 $y = k_i(x)$ 时，$\varphi_2(x,y) = k'_i(x), i = 1,2$。为了叙述简单起见，不妨设 $\gamma(t) \equiv 1$，并适当选择 y 的计量单位，使 $d = k_2(l) = l$。记 $\varphi_2(x,y) = \varphi(x,y)$，由 $y = k_1(x), y = k_2(x), x = l - \varepsilon$ 围成的曲边三角形区域为 Ω^ε（见图 1），$Q_T^\varepsilon = \Omega^\varepsilon \times (0,T], \Omega^0 = \Omega, Q_T^0 = Q_T$。

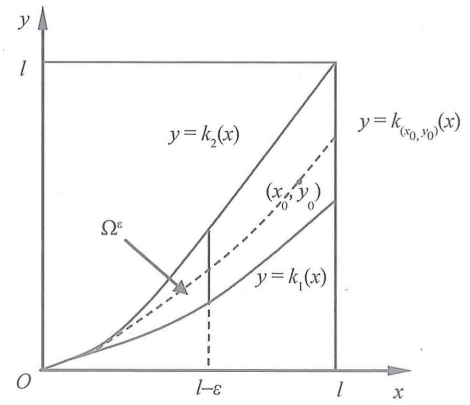

图 1　系统的二维存在区域

Fig. 1　Occur region of two-dimensional system

从而（1）可化为

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \varphi(x,y)\frac{\partial p}{\partial y} = -\mu(x,y,t)p - \frac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y}p, (x,y) \in \Omega, t \in (0,T] \tag{2a}$$

$$p(0,0,t) = \beta(t)\int_0^l \mathrm{d}x \int_{k_1(x)}^{k_2(x)} \mu(x,y,t)p(x,y,t)\,\mathrm{d}y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2b}$$

$$p(x,y,0) = p_0(x,y) \geqslant 0, (x,y) \in \bar{\Omega} \tag{2c}$$

$$N(t) = \int_0^l \mathrm{d}x \int_{k_1(x)}^{k_2(x)} p(x,y,t)\,\mathrm{d}y, \quad 0 \leqslant t \leqslant T \tag{2d}$$

由系统定义，在任何时刻 t，只有林龄达到 l，或直径达到 l 的林木才全部采伐，而且必须全部采伐，但保持森林中具有林龄在 0 到 l 之间，且直径在 0 到 l 之间的各种林木。因此，对系统的资料，特别是 $\varphi(x,y)$ 和 μ 需要作如下假设（参考图 1）。

（H_1）$\dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \in C^1(\bar{\Omega})$；对任意点 $(x_0,y_0) \in \bar{\Omega}$，存在唯一的光滑曲线 $y = k_{(x_0,y_0)}(x)$，$k_{(x_0,y_0)}(x_0) = y_0$，$k_{(x_0,y_0)}(0) = 0$，且满足 $k'_{(x_0,y_0)}(x) = \varphi(x, k_{(x_0,y_0)}(x))$。易算出沿着此曲线 $\dfrac{\partial \varphi(x,y)}{\partial y} \equiv 0$。

（H_2）存在常数 $a_0, a_1, a_2 > 0, \alpha > 1$，充分小的正数 ε_0 和函数 $a(x,y,t) \in O^{1,1}(\bar{Q}_T^{\varepsilon_0})$，$a(x,y,t) \geqslant a_0$，$\| a(x,y,t) \|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T - Q_T^{\varepsilon_0})} \leqslant a_1$。对任意 $t \in [0,T]$，$l - x < \varepsilon_0$ 时，$\mu(x,y,t) = a(x,y,t)/(l-x)^\alpha$，$\mu \in O^{1,1}(\bar{Q}_T^{\varepsilon_0})$ 且 $\| \mu \|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T^{l-\varepsilon_0})} \leqslant a_2$。

（H_3）存在一个很小的正数 δ，当 $x \in [0,\delta]$ 时，$k_1(x) = k_2(x) = kx$，其中 k 是正的常数。对任意 $\xi \in [0,l]$，$(x,y) \in \bar{\Omega}$，$\left| \dfrac{\partial k'_{(x,y)}(\xi)}{\partial x} \right| \leqslant L$，$\left| \dfrac{\partial k'_{(x,y)}(\xi)}{\partial y} \right| \leqslant L$，其中 L 是常数。

注：文中出现的 $p \in O^{1,1}(\bar{Q}_T)$ 指函数 p 关于空间变量 (x,y) 和时间变量 t 都有一致有界的偏导数[11]。

本文我们致力于讨论问题（2）解的存在唯一性，得到如下的主要结论。

定理 1　设 $p_0 \in O^1(\bar{\Omega})$，$\beta(\cdot) \in O^1([0,T])$，并满足边界相容条件 $p_0(0,0) = \beta(0)\displaystyle\int_0^l \mathrm{d}x \int_{k_1(x)}^{k_2(x)} \mu(x,y,0)p_0(x,y)\,\mathrm{d}y$。另外，存在常数 M 使得 $\| \varphi(x,y) \|_{O^1(\bar{Q}_T)} \leqslant M$。则系统（2）存在唯一非负解 $p(x,y,t) \in O^{1,1}(\bar{Q}_T)$。如果在 Ω 上均有 $p_0(x,y) > 0$，则存在常数 $m_0 > 0$，在 Q_T 上，$p(x,y,t) > 0, p(l,y,t) = 0, p(x,l,t) = 0$，且对任意 $t \in [0,T]$，$N(t) \geqslant m_0$。

2 主要定理的证明

引理1 对任意 $(x,y,t)\in Q_T\cap\{x\geqslant t\}$，记动点 $P(s)=(x-t+s,k'_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s),s)$ 设 $\Phi(x,y,t)=\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]$，则 $\|\Phi(x,y,t)\|_{C^{1,1}(\bar{Q}_T\cap\{x\geqslant t\})}\leqslant C_0$，$\mu(x,y,t)\Phi(x,y,t)\leqslant C_0$ 以及 $\mu(x,y,t)\left|\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right|\leqslant C_0$，其中是 C_0 常数。

证明 由 $(\mathrm{H}_1)-(\mathrm{H}_3)$，若 $x\leqslant l-\varepsilon_0$，结论显然成立。故设 $x>l-\varepsilon_0$，有

$$\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x}=\int_0^t\{\mu_1(P(s))+\mu_2(P(s))\cdot\left[\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial x}+k''_{(x,y)}(x-t+s)\right]\cdot(x-t+s)+\mu_2(P(s))k'_{(x,y)}(x-t+s)\}\mathrm{d}s\cdot\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]=$$

$$\int_0^{l-\varepsilon_0-x+t}\{\mu_1(P(s))+\mu_2(P(s))\cdot\left[\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial x}+k''_{(x,y)}(x-t+s)\right]\cdot(x-t+s)+\mu_2(P(s))k'_{(x,y)}(x-t+s)\}\mathrm{d}s\cdot\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]+$$

$$\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t\frac{\partial[a(P(s))/(l-x+t-s)^\alpha]}{\partial x}\mathrm{d}s\cdot\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]$$

其中 $\mu_1(P(s))$，$\mu_2(P(s))$ 分别表示 $\mu(P(s))$ 对点 $P(s)$ 第一坐标，第二坐标求导。注意到

$$\left|\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial x}\right|\leqslant L,\ |k'_{(x,y)}(x-t+s)|\leqslant M,\ |k''_{(x,y)}(x-t+s)|\leqslant M$$

因此

$$\left|\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial x}\right|\leqslant\exp[-\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]\cdot\{a_2[1+(L+M)(l-\varepsilon_0)+M](l-\varepsilon_0)+a_1[1+(L+M)(l-\varepsilon_0)+M]\cdot\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t(l-x+t-s)^{-\alpha}\mathrm{d}s+a_1\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t(l-x+t-s)^{-\alpha-1}\mathrm{d}s\}\leqslant$$

$$\{a_2[1+(L+M)(l-\varepsilon_0)+M](l-\varepsilon_0)+a_1[\frac{1+(L+M)(l-\varepsilon_0)+M}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha(l-x)^\alpha}]\}\cdot a_0\exp(\frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon_0^{\alpha-1}})\exp(-\frac{1}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}});$$

$$\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial y}=\int_0^{l-\varepsilon_0-x+t}\mu_2(P(s))(x-t+s)\cdot\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial y}\mathrm{d}s\cdot\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]+\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t\mu_2(P(s))(x-t+s)\frac{\partial k'_{(x,y)}(x-t+s)}{\partial y}\mathrm{d}s\cdot\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s],$$

$$\left|\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial y}\right|\leqslant\{a_2L(l-\varepsilon_0)^2+L\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t a_1[(l-x+t-s)^{-\alpha}+(l-x+t-s)^{-\alpha-1}]\mathrm{d}s\}\cdot\exp[-\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t\frac{a_0\mathrm{d}s}{(l-x+t-s)^\alpha}]\leqslant$$

$$\{a_2L(l-\varepsilon_0)^2+a_1[\frac{1}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha(l-x)^\alpha}]\}\cdot a_0\exp(\frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon_0^{\alpha-1}})\exp(-\frac{1}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}});$$

$$\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}=-\mu(x,y,t)\cdot\exp\{-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s\}-\int_0^{l-\varepsilon_0-x+t}\{\mu_1(P(s))+\mu_2(P(s))\cdot[k''_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s)+k'_{(x,y)}(x-t+s)]\}\mathrm{d}s\cdot\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]-$$

$$\int_{l-\varepsilon_0-x+t}^t\{\frac{\partial[a(P(s))/(l-x+t-s)^\alpha]}{\partial(x-t+s)}+\frac{\partial[a(P(s))/(l-x+t-s)^\alpha]}{\partial[k'_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s)]}\cdot[k''_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s)+k'_{(x,y)}(x-t+s)]\}\mathrm{d}s\cdot\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s],$$

$$\left|\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right|\leqslant\left\{\frac{a_1}{(l-x)^\alpha}+a_2l(1+Ml+M)+a_1\left[\frac{1}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}}+\frac{1}{\alpha(l-x)^\alpha}+\frac{(l+1)M}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}}\right]\right\}\cdot a_0\exp(\frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon_0^{\alpha-1}})\exp(-\frac{1}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}})$$

再注意到 $\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}$ 表达式的第一项正是 $-\mu(x,y,t)\Phi(x,y,t)$，所以

$$\mu(x,y,t)\Phi(x,y,t)\leqslant\frac{a_1}{(l-x)^\alpha}\cdot a_0\exp(\frac{1}{(\alpha-1)\varepsilon_0^{\alpha-1}})\exp(-\frac{1}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}})$$

另外，显然 $\mu(x,y,t)\left|\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right|\leqslant\frac{a_1}{(l-x)^\alpha}\left|\frac{\partial\Phi(x,y,t)}{\partial t}\right|$。最后，因为对任意常数 $\lambda\geqslant0$，$\lim\limits_{x\to l^-}$

$\frac{1}{(l-x)^{\lambda}}\exp(-\frac{1}{(\alpha-1)(l-x)^{\alpha-1}})=0$，所以存在适当的常数 C_0 使得引理 1 结论成立。

引理 2　在定理 1 条件下，设 (H_1)，(H_2) 成立，$0<T<l-\varepsilon_0$。则系统 (2) 有唯一非负解 $p\in O^{1,1}(\bar{Q}_T)$，且存在仅依赖于 $\|\mu\|_{O^1(\bar{Q}_T)}$，$\|p_0\|_{O^1(\bar{\Omega})}$，$C_0$ 的常数 M_0，使得 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T)}\leqslant M_0$。

证明　对任意点 $B(x,y,t)\in\bar{Q}_T$，当 $t\geqslant x$ 时，由假设 (H_2)，存在过点 B 沿 t 轴反方向引的特征线

$$\xi=t-x-s,\zeta=\varphi(t-x-s,\zeta)(t-x-s)=k'_{(x,y)}(t-x-s)(t-x-s)$$

与 t 轴交于点 $A(0,0,t-x)$，在式 (2a) 两边同乘以

$$\exp\int_{t-x}^{s}\mu(t-x-b,k'_{(x,y)}(t-x-b)(t-x-b),b)\mathrm{d}b$$

并沿此特征线从 A 到 B 积分，得到非负函数

$$\begin{aligned}p(x,y,t)&=p(0,0,t-x)\exp\{-\int_{t-x}^{t}\mu[x-t+s,k'_{(x,y)}(x-t+s)(x-t+s),s]\mathrm{d}s\}=\\&p(0,0,t-x)\exp\{-\int_0^x\mu[\xi,k'_{(x,y)}(\xi)\xi,t-x+\xi]\mathrm{d}\xi\}\end{aligned}\tag{3}$$

同样地，当 $t\leqslant x$ 时，有

$$p(x,y,t)=p_0(x-t,k_{(x,y)}(x-t))\cdot\exp\{-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s\}\tag{4}$$

由假设 $(H_1)-(H_3)$ 易知 (4) 确定的 $p(x,y,t)\in O^{1,1}(\bar{Q}_T\cap\{t\leqslant x\})$ 是 (2a)－(2c) 在 $\{t\leqslant x\}\cap\bar{Q}_T$ 上的唯一非负解。且 $\lim\limits_{x\to l}p(x,y,t)=0$，$\|p\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T\cap\{t\leqslant x\})}$ 仅依赖于 $\|p_0(x,y)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$ 和 a_1，a_2，C_0。

再将 (3) 和 (4) 代入 (2b)，并记 $p(0,0,t)\overset{\Delta}{=}u(t)$ 得积分方程

$$u(t)=\int_0^t g(\tau,t)u(\tau)d\tau+h(t)\tag{5}$$

其中

$$\begin{cases}g(\tau,t)=\beta(t)\int_{k_1(t-\tau)}^{k_2(t-\tau)}\mu(t-\tau,y,t)\cdot\\\qquad\exp[-\int_0^{t-\tau}\mu(\xi,k'_{(x,y)}(\xi)\xi,\tau+\xi)\mathrm{d}\xi]\mathrm{d}y\\h(t)=\beta(t)\int_t^l\mathrm{d}x\int_{k_1(x)}^{k_2(x)}\mu(x,y,t)\cdot\\p_0(x-t,k_{(x,y)}(x-t))\exp[-\int_0^t\mu(P(s))\mathrm{d}s]\mathrm{d}y\end{cases}\tag{6}$$

注意到 (5) 是一个第二型 Volterra 积分方程，$t-\tau<l-\varepsilon_0$。

首先，由假设 $(H_1)-(H_3)$，并注意到 $x\leqslant t\leqslant l-\varepsilon_0$ 易见存在仅依赖于 a_2，C_0 的常数 C_2 使得 $\|g(\tau,t)\|_{O^1([0,T]\times[0,T])}\leqslant C_2$。其次，由引理 1 可以看出让 C_2 适当的大，还有 $\|h(t)\|_{O^1([0,T])}\leqslant C_2$。由文献［12］中定理 4.1.1 知，方程 (5) 有唯一非负连续解 $u\in O^1([0,T])$，且 $\|u\|_{O^1([0,T])}$ 仅依赖于 $\|\beta(\cdot)\|_{O^1([0,T])}$，$\|p_0(x,y)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$，$a_2$，$C_2$。从而 (3) 能确定唯一的 $p(x,y,t)\in O^{1,1}(\bar{Q}_T\cap\{t\geqslant x\})$ 作为 (2a)－(2c) 的非负解，且 $\lim\limits_{x\to l}p(x,y,t)=0$，$\|p\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T\cap\{t\geqslant x\})}$ 仅依赖于 $\|\beta(\cdot)\|_{O^1([0,T])}$，$\|p_0(x,y)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$ 和 a_2，C_0。由边界相容性条件，不难推出当 $t=x$ 时，(3) 和 (4) 确定的 $p(x,y,t)$，$\frac{\partial p}{\partial t}$，$\frac{\partial p}{\partial x}$ 都相等。从而引理 2 得证。

如果记引理 2 中的 $T=T_0$，则系统 (2) 有唯一非负解 $p\in O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[T_0,2T_0])$，且存在一个仅依赖于 $\|\mu\|_{O^{1,1}(\bar{Q}_T)}$，$\|p(x,y,T_0)\|_{O^{1,1}(\bar{\Omega})}$，$C_0$ 的常数 M_1，使得 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[T_0,2T_0])}\leqslant M_1$. 类似地，系统 (2) 有唯一非负解 $p\in O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[2T_0,3T_0])$，且存在一个仅依赖于 $\|\mu\|_{O^1(\bar{Q}_T)}$，$\|p(x,y,2T_0)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$，$C_0$ 的常数 M_2，使得 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[2T_0,3T_0])}\leqslant M_2$。设有自然数 n 满足 $0<T\leqslant nT_0$，则系统 (2) 有唯一非负解 $p\in O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[(n-1)T_0,nT_0])$，且存在一个仅依赖于 $\|\mu\|_{O^1(\bar{Q}_T)}$，$\|p(x,y,(n-1)T_0)\|_{O^1(\bar{\Omega})}$，$C_0$ 的常数 M_{n-1}，使得 $\|p\|_{O^{1,1}(\bar{\Omega}\times[(n-1)T_0,nT_0])}\leqslant M_{n-1}$。至此，定理的存在唯一性得证。

现在可以完成定理 1 的最后证明了。如果在 Ω 上均有 $p_0(x,y)>0$，由 (4) 可见，对任意 $0\leqslant t\leqslant T_0$，当 $t\leqslant x<l,y<l$，时，均有 $p(x,y,t)>0$。从而 (6) 中 $h(t)>0$．再由 (5)，$u(t)>0$。利用 (3)，可得对任意 $0\leqslant t\leqslant T_0$，当 $t\leqslant x$ 同时 $<l$，$y<l$，均有 $p(x,y,t)>0$。于是，对任意 $0\leqslant t\leqslant T_0$，由 (2d)，$N(t)>0$。进一步，不难得到对任意 $0\leqslant t\leqslant T$，$N(t)>0$。记 $N(t)$ 在 $[0,T]$ 上的最小值为 m_0，定理证毕。

参考文献：

［1］ 陆征一，周义仓．数学生物学进展[M]．北京：科学出版社，2006：251－264．

［2］ 于景元，王文蔚，魏礼平，等．林龄面积转移方程解的性质[J]．应用数学学报，1994，17(4)：606－612．

（下转第 36 页）

地震响应趋于一致激励，并随着视波速的递增，最终趋于恒定值。

参考文献：

[1] 邹和平，刘玉亮，郑单，等. 5. 12 汶川大地震极震区灾害致因初析[J]. 中山大学学报：自然科学版，2009，48(2)：131－135.

[2] 徐兆. 多自由度线性阻尼系统的随机振动分析[J]. 中山大学学报：自然科学版，1984(1)：77－82.

[3] 苏敏邦，戎海武. Vander Pol-Duffing 单边约束系统的随机响应[J]. 中山大学学报：自然科学版，2009，48(2)：20－26.

[4] LU Z H, GE H B, Tsutomu Usami. Applicability of push-over analysis－based seismic performance evaluation procedure for steel arch bridges[J]. Engineering Structures, 2004, 26: 1957－1977.

[5] LU Z H, GE H, USAMI T. Applicability of pushover analysis-based seismic performance evaluation procedure for steel arch bridges[J]. Engineering Structures, 2004, 26: 1957－1977.

[6] 刘爱荣，张俊平，禹奇才，等. 多点激励下大跨度连续刚架拱组合桥的空间地震响应分析[J]. 暨南大学学报，2007，28(3)：246－250.

[7] LIU Airong, ZHANG Junping, YUQicai1. Study of seismic response of long span continuous rigid-frame arch bridge [J]. Journal of Shenzhen University, 2007, 24(4): 228－233.

[8] LIU Airong, ZHANG Junging, YU Qicai, et al. Study on dynamic properties and traveling wave effeit of Xinguang Bridge [J]. Journal of Guangzhou University, 2007, 6(4): 74－80.

[9] 李正英，李正良. 空间地震动作用下大跨度拱桥地震响应分析[J]. 重庆大学学报，2009，32(8)：920－924.

[10] 丁阳，林伟，李忠献. 大跨度空间结构多维多点非平稳随机地震反应分析[J]. 工程力学，2007，24(3)：6－14.

[11] RUIZ P, PENZIEN J. Probabilistic study of the behavior of structures during earthquakes [C]//Report No. EERC 69－03. California: Earthquake Engineering Center University of California, 1969.

[12] 屈铁军，王君杰，王前信. 空间变化的地震动功率谱的实用模型[J]. 地震学报，1996，18(1)：55－62.

（上接第 31 页）

[3] 王定江. 非线性种群发展方程解的性质[J]. 高校应用数学学报，1998，13(1)：25－30.

[4] 李留瑜，付秀山，郑治刚. 论森林的数量分布结构[J]. 系统工程理论与实践，1996，16(4)：82－89.

[5] 郑治刚. 同龄纯林的林龄分布结构变化方程[J]. 系统工程理论与实践，1996，16(4)：90－98.

[6] 张启敏，聂赞坎. 森林发展系统强解的存在唯一性及稳定性分析[J]. 生物数学学报，2004，19(4)：51－56.

[7] WANG D J, ZHANG Y F. The property of solution of a nonstationary forest evolution system[J]. Systems Science and Systems Engineering, 1993, 2: 281－288.

[8] XU L F, WU H B. A free-boundary problem to dynamic system for pure forest[J]. Ann of Diff Eqs, 2010, 20(2): 227－233.

[9] ANGEL C, JOAN S. Global dynamics and optimal life history of a structured population model[J]. SIAM J Appl Math, 1999, 59(5): 1667－1685.

[10] BALLINGER G, LIU X. Permanence of population growth models with impulsive effects[J]. Math Comp Modeling, 1997, 26: 59－72.

[11] LADYZENSKAYA O A. Linear and quasilinear equations of parabolic type[M]. Translations of Mathematical Monographs, AMS Providence, Provience Rhode Island Translated from the Russian by S Smith, 1968.

[12] 沈以淡. 积分方程[M]. 2 版，北京：北京理工大学出版社，2002：18－22.