第 49 卷 第 1 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 1
2010 年 1 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2010

具有临界增长边界条件的 p-Laplace 方程解的存在性*

赵继红，冯兆永
（中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要： 考虑了具有临界增长边界条件的拟线性椭圆方程，得到的主要结果如下：若 f 关于 u 是超线性次临界增长，则当 $p < r < p^*$ 时，应用“山路引理”证明了方程至少存在一个非平凡的弱解；当 $1 < r < p$ 时，应用“对偶喷泉定理”和“集中紧性原理”证明了方程无穷多弱解的存在性。

关键词： p-Laplace 方程；弱解；临界指数；变分原理
中图分类号： O175.25；O176 **文献标志码：** A **文章编号：** 0529－6579（2010）01－0001－04

Existence of Weak Solutions for the p-Laplace Equation with Critical Growth in Boundary Conditions

ZHAO Jihong, FENG Zhaoyong
(School of Mathematics and Computional Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: To consider the critical growth in boundary conditions for the quasilinear problem, the main results are obtained that if f has superlinear but subcritical growth with respect to u, then as $p<r<p^*$, there exists at least one nontrivial weak solution by using "mountain pass theorem"; as $1 < r < p$, there exists infinitely many weak solutions by using "dual fountain theorem" and "concentration-compactness principle".

Key words: p-Laplace equation; weak solutions; critical exponent; variational principle

文献［1－2］主要考虑了具有非线性边界条件的拟线性椭圆方程

$$\begin{cases} -\Delta_p u + a(x)|u|^{p-2}u = f(x,u), x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial v} = g(x,u), x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ 是一个具有光滑边界的有界区域，$\dfrac{\partial}{\partial v}$ 是单位外法向量导数，$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$ 是 p-Laplace 算子，$1 < p < N$，$a(x) \in L^\infty(\Omega)$ 且满足 $\operatorname*{essinf}_{x\in\Omega} a(x) > 0$。文献［1－2］主要研究了上述方程中非线性项 f 和 g 关于 u 在不同增长情况下其弱解的存在性与多重性，但他们并没有考虑当 g 关于 u 临界增长时上述方程解的情况。本文主要考虑 g 关于 u 临界增长但具有次临界扰动的情形，即 $g(x,u) = |u|^{p^*-2}u + \lambda|u|^{r-2}u$，其中 $p^* = (N-1)p/(N-p)$，$r > 1$，λ 是一个正参数。

近几年来对形如（1）式的具有非线性边界条件的 p-Laplace 方程展开了广泛的讨论与研究并得到了很多结果[3-6]。这主要是因为在很多实际应用中都会遇到这类方程，诸如：非牛顿流体力学，反应扩散方程以及非线性共振等问题（见［5，7］中的参考文献）。另外在研究 Sobolev 迹嵌入定理中的最佳常数时会很自然的遇到这类问题。

在阐述本文主要结论之前我们先对非线性项 f 做如下假设：

* 收稿日期：2009－09－09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10771223）；中山大学青年教师科研启动基金资助项目（3171914）；教育部留学回国人员科研启动基金资助项目
作者简介：赵继红（1982 年生），男，博士生；通讯作者：冯兆永；E-mail：fzhaoy@mail.sysu.edu.cn

(F_1) $f(x,t)$ 是 Carathéodory 函数。对于某个 q 满足 $p < q < Np/(N-p)$，存在 $C>0$ 使得

$|f(x,t)| \leqslant C(1+|t|^{q-1}), x \in \Omega, t \in \mathbb{R}$。

(F_2) 存在 $\alpha > p$ 使得 $0 < \alpha F(x,t) \leqslant tf(x,t)$ 对 $x \in \Omega$，$t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ 成立，其中 $F(x,t) = \int_0^t f(x,s)\mathrm{d}s$ 是 $f(x,t)$ 的原函数。

(F_3) $f(x,t)$ 是关于的 t 奇函数，即 $f(x,-t) = -f(x,t)$，$x \in \Omega$。

(F_4) $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(x,t)}{|t|^{p-1}} = 0$。

定义空间 $W^{1,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega): \int_\Omega |\nabla u|^p \mathrm{d}x < \infty\}$。易知赋予范数 $\|u\|_{1,p}:=\left(\int_\Omega(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p)\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$，则 $W^{1,p}(\Omega)$ 是 Banach 空间。利用变分方法，相应于方程（1）的变分泛函为

$$\varphi(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega(|\nabla u|^p + a(x)|u|^p)\mathrm{d}x - \int_\Omega F(x,u)\mathrm{d}x - \frac{1}{p^*}\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S - \frac{\lambda}{r}\int_{\partial\Omega}|u|^r\mathrm{d}S \quad (2)$$

其中 $u \in W^{1,p}(\Omega)$，$\mathrm{d}S$ 是边界测度。由（F_1）易知 $\varphi \in C^1(W^{1,p}(\Omega),\mathbb{R})$，并且对于所有的 $u,v \in W^{1,p}(\Omega)$，

$$<\varphi'(u),v> = \frac{1}{p}\int_\Omega(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\nabla v + a(x)|u|^{p-2}uv)\mathrm{d}x - \int_\Omega f(x,u)v\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega}|u|^{p^*-2}uv\mathrm{d}S - \lambda\int_{\partial\Omega}|u|^{r-2}uv\mathrm{d}S$$

定义 1 若 u 是泛函 φ 在空间 $W^{1,p}(\Omega)$ 上的临界点，则称 u 是方程（1）的弱解。

主要结果如下：

定理 1 设 f 满足假设（F_1），（F_2），（F_3）和（F_4），则当 $p<r<p^*$ 时，存在仅依赖于 p，r，N 和 $|\Omega|$ 的 $\lambda_0>0$，使得对任何 $\lambda>\lambda_0$，方程（1）在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中至少有一个非平凡弱解。

定理 2 设 f 满足假设（F_1），（F_2），（F_3）和（F_4），则当 $1<r<p$ 时，存在仅依赖 p，r，N 和 $|\Omega|$ 的 $\tilde{\lambda}>0$，使得对任何 $0<\lambda<\tilde{\lambda}$，方程（1）有一列弱解 $u_k \in W^{1,p}(\Omega)$ 使得 $\varphi(u_k)<0$，并当 $k\to\infty$ 时，$\varphi(u_k)\to 0$。

注 根据文献［8］中二阶椭圆型方程的边界正则性结果（Thm. 2），若 $\partial\Omega$ 是 $C^{1,\alpha}(\alpha \leqslant 1)$，则方程（1）的每一个弱解其实都属于 $C^{1,\beta}_{loc}(\bar{\Omega})$，其中 $0<\beta<1$。

关于定理 1 和定理 2 的证明，从文献［1－2］中可知泛函 φ 满足“对偶喷泉定理”中所有的几何条件，故仅需验证 $(PS)_c$ 条件成立。关于“对偶喷泉定理”、$(PS)_c$ 条件以及一些符号的约定读者可以在文献［1－2］中可以找到，这里不再重复。

1 临界情形 I

当方程（1）中 g 关于 u 具有临界增长时，注意到 Sobolev 嵌入：$W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\partial\Omega)$ 仅仅为连续嵌入而非紧嵌入，所以不能期望一般的 $(PS)_c$ 条件成立。感谢文献［9－10］中提出的“集中紧性原理”，我们可以证明对于 φ 在某一确定的能量值之下局部 $(PS)_c$ 条件是成立的。现设 $p<r<p^*$。

引理 1[9-10] 设在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中序列 $\{u_j\}$ 弱收敛到 u，在测度收敛的意义下 $|\nabla u_j|^p \rightharpoonup \mathrm{d}\mu$，$|u_j|^{p^*} \rightharpoonup \mathrm{d}\sigma$（$\mathrm{d}\sigma$ 是支集在 $\partial\Omega$ 上的测度）。那么存在 $x_1, x_2, \cdots, x_l \in \partial\Omega$ 使得

$$\mathrm{d}\sigma = |u|^{p^*} + \sum_{j=1}^{l}\sigma_j\delta_{x_j}, \quad \sigma_j > 0,$$

$$\mathrm{d}\mu \geqslant |\nabla u|^p + \sum_{j=1}^{l}\mu_j\delta_{x_j}, \quad \mu_j > 0,$$

$$(\sigma_j)^{\frac{p}{p^*}} \leqslant \frac{\mu_j}{S}, \quad j = 1,\cdots,l$$

其中 S 是 Sobolev 嵌入 $W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\partial\Omega)$ 中的最佳常数。

现在利用引理 1 来证明局部 $(PS)_c$ 条件成立。

引理 2 设 $\{u_j\} \subset W^{1,p}(\Omega)$ 是泛函 φ 在能量水平 c 处的 $(PS)_c$ 序列。若 $c < \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}$，则存在 $\{u_j\}$ 的子序列在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中是强收敛的。

证明 设 $\{u_j\}$ 为 $(PS)_c$ 序列，由文献［1］中的引理 3.4 可知 $\{u_j\}$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中是有界的。又由引理 4.1，存在 $\{u_j\}$ 的子序列（仍记为 $\{u_j\}$），使得 $u_j \rightharpoonup u$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中；

$$u_j \to u \quad 在 L^r(\partial\Omega) 中, 1 < r < p^*;$$

$$u_j \to u \text{ a.e. } 在 \partial\Omega 中;$$

$$|\nabla u_j|^p \rightharpoonup \mathrm{d}\mu \geqslant |\nabla u|^p + \sum_{k=1}^{l}\mu_k\delta_{x_k}, \mu_k > 0 \quad (3)$$

$$|u_j|^{p^*} \rightharpoonup \mathrm{d}\sigma = |u|^{p^*} + \sum_{k=1}^{l}\sigma_k\delta_{x_k}, \sigma_k > 0 \quad (4)$$

选取 $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ 使得 $\phi = 1, x \in B(x_k,\varepsilon)$；$\phi = 0, x \in B(x_k, 2\varepsilon)^c$，$|\nabla\phi| \leqslant 2/\varepsilon$，这里 x_k 属于 $\mathrm{d}\sigma$ 的支集。考虑序列 $\{u_j\phi\}$，易知其在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中是有界的。而由于在 $(W^{1,p}(\Omega))^*$ 中当 $j\to\infty$ 时，

有 $\varphi'(u_j)\to 0$，因此可得

$$\lim_{j\to\infty}<\varphi'(u_j);\phi u_j>=0 \tag{5}$$

故由（3）和（4）式，得到

$$\lim_{j\to\infty}\int_\Omega|\nabla u_j|^{p-2}\nabla u_j\nabla\phi u_j\mathrm{d}x=\int_{\partial\Omega}\phi\mathrm{d}\sigma+\lambda\int_{\partial\Omega}|u|^r\phi\mathrm{d}S+\int_\Omega uf(x,u)\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega a(x)|u|^p\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega\phi\mathrm{d}\mu$$

现在，利用 Hölder 不等式和 $\{u_j\}$ 的弱收敛性，当 $\varepsilon\to 0$ 时有

$$0\leqslant\lim_{j\to\infty}\left|\int_\Omega|\nabla u_j|^{p-2}\nabla u_j\nabla\phi u_j\mathrm{d}x\right|\leqslant\lim_{j\to\infty}\left(\int_\Omega|\nabla u_j|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_\Omega|\nabla\phi|^p|u_j|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla\phi|^p|u|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|\nabla\phi|^N\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{N}}\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|u|^{\frac{Np}{N-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{Np}}\leqslant C\left(\int_{B(x_k,2\varepsilon)\cap\Omega}|u|^{\frac{Np}{N-p}}\mathrm{d}x\right)^{\frac{N-p}{Np}}\to 0$$

再由（5）式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{\partial\Omega}\phi\mathrm{d}\sigma+\lambda\int_{\partial\Omega}|u|^r\phi\mathrm{d}S+\int_\Omega uf(x,u)\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega a(x)|u|^p\phi\mathrm{d}x-\int_\Omega\phi\mathrm{d}\mu\right)=\sigma_k-\mu_k=0 \tag{6}$$

而由引理 1，可知 $(\sigma_k)^{\frac{p}{p^*}}S\leqslant\mu_k$。因此从（6）式得到 $(\sigma_k)^{\frac{p}{p^*}}S\leqslant\sigma_k$。从而要么 $\sigma_k=0$，要么

$$\sigma_k\geqslant S^{\frac{p^*}{p^*-p}} \tag{7}$$

假若（7）式对于某个 k_0 成立，由于 $\{u_j\}$ 是 $(PS)_c$ 序列和条件（F_2），则可知

$$c=\lim_{j\to\infty}\varphi(u_j)=\lim_{j\to\infty}\left[\varphi(u_j)-\frac{1}{p}<\varphi'(u_j);u_j>\right]\geqslant\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}+\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\int_{\partial\Omega}|u|^r\mathrm{d}S\geqslant\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}$$

这和引理 2 的假设相矛盾。从而 $\sigma_k=0$ 且当 $c<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}$，有 $\int_{\partial\Omega}|u_j|^{p^*}\mathrm{d}S\to\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S$ $(j\to\infty)$。即在 $L^{p^*}(\partial\Omega)$ 中 $u_j\to u$ $(j\to\infty)$。类似于文献［1］中引理 3.4 的证明，可知 $\{u_j\}$ 在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中是强收敛的。证毕。

定理 1 的证明　利用“山路引理”来证明定理 1。首先从假设（F_1）和（F_4）可知，$F(x,u)\leqslant\varepsilon|u|^p+C_1|u|^q$，这里当 $|u|\to 0$ 时有 $\varepsilon\to 0$。再由 Sobolev 嵌入定理和迹嵌入定理得到，

$$\varphi(u)\geqslant\frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p-\frac{1}{p^*}\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S-\frac{\lambda}{r}\int_{\partial\Omega}|u|^r\mathrm{d}S-\varepsilon\int_\Omega|u|^p\mathrm{d}x-C_1\int_\Omega|u|^q\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{p}\|u\|_{1,p}^p-\frac{1}{p^*}\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S-\frac{\lambda}{r}\int_{\partial\Omega}|u|^r\mathrm{d}S-\varepsilon C_2\|u\|_{1,p}^p-C_3\|u\|_{1,p}^q\geqslant\left(\frac{1}{p}-\varepsilon C_2\right)\|u\|_{1,p}^p-\frac{1}{p^*}S^{p^*}\|u\|_{1,p}^{p^*}-\frac{\lambda}{r}C_4\|u\|_{1,p}^r-C_3\|u\|_{1,p}^q$$

选取充分小的 $\varepsilon>0$，使得 $\frac{1}{p}-\varepsilon C_2>0$，并且令 $g(t)=\left(\frac{1}{p}-\varepsilon C_2\right)t^p-\frac{1}{p^*}S^{p^*}t^{p^*}-\frac{\lambda}{r}C_4t^r-C_3t^q$。注意到 $p<\min\{r,p^*,q\}$，容易验证对于充分小的 $R>0$ 有 $g(R)>r>0$。另一方面，固定 $\omega\in W^{1,p}(\Omega)$ 满足 $\omega|_{\partial\Omega}\neq 0$，则 $\lim_{t\to\infty}\varphi(t\omega)=-\infty$。从而存在 $v_0\in W^{1,p}(\Omega)$ 使得 $\|v_0\|_{1,p}>R$，并且 $\varphi(v_0)<r$。根据“山路引理”，我们知道 φ 存在临界值 $c:=\inf_{\psi\in\Gamma}\sup_{t\in[0,1]}\varphi(\psi(t))$，其中 $\Gamma=\{\psi:[0,1]\to W^{1,p}(\Omega)$ 是连续的且 $\psi(0)=0,\psi(1)=v_0\}$。现在关键的问题是为了要使得局部 $(PS)_c$ 条件成立我们需要证明 $c<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}$。为此固定 $\omega\in W^{1,p}(\Omega)$，使 $\|\omega\|_{L^{p^*}(\partial\Omega)}=1$。定义 $h(t)=\varphi(t\omega)$。由 $\lim_{t\to\infty}h(t)=-\infty$，可知存在 $t_\lambda>0$ 使得 $\sup_{t>0}\varphi(t\omega)=h(t_\lambda)$。对 h 进行求导，

$$0=h'(t_\lambda)=t_\lambda^{p-1}\|\omega\|_{1,p}^p-t_\lambda^{p^*-1}-t_\lambda^{r-1}\lambda\|\omega\|_{L^r(\partial\Omega)}^r-\int_\Omega f(x,t_\lambda\omega)\omega\mathrm{d}x \tag{8}$$

由假设（F_2）和（8）式可知，$t_\lambda^{p-1}\|\omega\|_{1,p}^p-t_\lambda^{p^*-1}-t_\lambda^{r-1}\lambda\|\omega\|_{L^r(\partial\Omega)}^r\geqslant 0$。那么，

$$t_\lambda^{p^*-p}+t_\lambda^{r-p}\lambda\|\omega\|_{L^r(\partial\Omega)}^r\leqslant\|\omega\|_{1,p}^p \tag{9}$$

因此，$t_\lambda\leqslant\|\omega\|_{1,p}^{\frac{p}{p^*-p}}$。由（9）式，当 $\lambda\to\infty$ 时，$t_\lambda^{p^*-r}+\lambda\|\omega\|_{L^r(\partial\Omega)}^r+C_3t_\lambda^{q-r}\|\omega\|_{1,p}^q\to\infty$。则得到 $\lim_{\lambda\to\infty}t_\lambda=0$。另一方面，很容易检验存在 $\bar{\lambda}>0$，若 $\lambda>\bar{\lambda}$ 则 $\varphi(t_{\bar{\lambda}}\omega)\geqslant\varphi(t_\lambda\omega)$。从而可得 $\lim_{\lambda\to\infty}\varphi(t_\lambda\omega)=0$。此恒等式意味着存在常数 $\lambda_0>0$ 使得若 $\lambda>\lambda_0$，那么 $\sup_{t\geqslant 0}\varphi(t\omega)<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}$。选择 $v_0=t_0\omega$ 并使 t_0 充分大以保证 $\varphi(t_0\omega)<0$。利用“山路引理”便可得定理 1 的结论。证毕。

2 临界情形 II

研究方程（1）中 g 关于 u 具有临界增长但具有次线性扰动的情形，即 $1<r<p$。首先利用引理1来证明局部 $(PS)_c$ 条件成立。

引理3 设 $\{u_j\}\subset W^{1,p}(\Omega)$ 为 φ 在能量水平 c 处的 $(PS)_c$ 序列。若 $c<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}-K\lambda^{\frac{p^*}{p^*-r}}$，这里 K 仅仅依赖于 p，r，N 和 $|\Omega|$，那么存在 $\{u_j\}$ 的子序列在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中强收敛。

证明 设 $\{u_j\}$ 是 $(PS)_c$ 序列，即 $\varphi(u_j)\to c$，$\varphi'(u_j)\to 0$ 当 $j\to\infty$。由文献［1］中的引理3.4知 $\{u_j\}\subset W^{1,p}(\Omega)$ 是有界序列。那么存在 $\{u_j\}$ 的子序列（仍记为 $\{u_j\}$）使得其在 $W^{1,p}(\Omega)$ 中弱收敛到 u。我们仅需证明 $\{u_j\}$ 在 $L^{p^*}(\partial\Omega)$ 中强收敛到 u。用反证法，$\{u_j\}$ 不在 $L^{p^*}(\partial\Omega)$ 中强收敛到 u，则由假设 (F_2) 可知

$$c=\lim_{j\to\infty}\varphi(u_j)=$$
$$\lim_{j\to\infty}\left[\varphi(u_j)-\frac{1}{p}<\varphi'(u_j);u_j>\right]\geqslant$$
$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}+$$
$$\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)\int_{\partial\Omega}|u|^r\mathrm{d}S$$

利用Hölder不等式，得到

$$c\geqslant\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}+$$
$$\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)|\partial\Omega|^{1-\frac{r}{p^*}}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S\right)^{\frac{r}{p^*}}=$$
$$\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\|u\|^{p^*}_{L^{p^*}(\partial\Omega)}+\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}+$$
$$\lambda\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{r}\right)|\partial\Omega|^{1-\frac{r}{p^*}}\left(\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S\right)^{\frac{r}{p^*}}$$

令 $g(x)=C_1x^{p^*}-\lambda C_2x^r$。注意到函数 g 在点 $x_0=\left(\frac{\lambda rC_2}{p^*C_1}\right)^{\frac{1}{p^*-r}}$ 达到了它的最小值，即 $g(x)\geqslant g(x_0)=-K\lambda^{\frac{p^*}{p^*-r}}$，这里 $K=K(p,r,N,|\Omega|)$。因此有，$c\geqslant\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}-K\lambda^{\frac{p^*}{p^*-r}}$，而这与假设相矛盾。故当 $j\to\infty$ 时有 $\int_{\partial\Omega}|u_j|^{p^*}\mathrm{d}S\to\int_{\partial\Omega}|u|^{p^*}\mathrm{d}S$，即在 $L^{p^*}(\partial\Omega)$ 中 $u_j\to u$。剩下的证明如同引理2，略。证毕。

引理4 若 $0<\lambda<\tilde{\lambda}=K^{-\frac{p^*-r}{p^*}}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)^{\frac{p^*-r}{p^*}}S^{\frac{p^*-r}{p^*-p}}$，则 φ 对于 $c\leqslant 0$ 满足局部 $(PS)_c$ 条件。

证明 仅需验证 $(PS)_c$ 条件满足。显然对于泛函 φ 的具有能量水平 $c\leqslant 0$ 的每一个 $(PS)_c$ 序列都是有界的，因此由引理3可知若 λ 满足 $0<\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)S^{\frac{p^*}{p^*-p}}-K\lambda^{\frac{p^*}{p^*-r}}$，则局部 $(PS)_c$ 条件是成立的。证毕。

定理2的证明 利用引理3和引理4便可知泛函 φ 对于 $c\leqslant 0$ 满足局部 $(PS)_c$ 条件，又由文献［1］可知其满足"对偶喷泉定理"的几何条件，从而定理2得证。证毕。

参考文献：

［1］ ZHAO J H, ZHAO P H. Infinitely many weak solutions for a p-Laplacian equation with nonlinear boundary condition[J]. Electron J Differential Equations, 2007, 90: 1-14.

［2］ ZHAO J H, ZHAO P H. Existence of infinitely many weak solutions for the p-Laplacian with nonlinear boundary condition[J]. Nonlinear Analysis: TMA, 2008, 69: 1343-1355.

［3］ BONDER J F, MARTÍNEZ S, ROSSI J D. The behavior of the best Sobolev trace constant and extremals in thin domains[J]. J Differential Equations, 2004, 198 (1): 129-148.

［4］ BONDER J F, ROSSI J D. Existence results for the p-Laplacian with nonlinear boundary conditions[J]. J Math Anal Appl, 2001, 263 (1): 195-223.

［5］ MARTÍNEZ S, ROSSI J D. Weak solutions for the p-Laplacian with a nonlinear boundary condition at resonance[J]. Electron J Differential Equations, 2003, 27: 1-14.

［6］ PFLÜGER K. Existence and multiplicity of solutions to a p-Laplacian equation with nonlinear boundary condition [J]. Electron J Differential Equations, 1998, 10: 1-13.

［7］ DRÁBEK P, ROBINSON S B. Resonance problem for the p-Laplacian[J]. J Funct Anal, 1999, 169: 189-200.

［8］ LIEBERMAN G M. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations [J]. Nonlinear Analysis: TMA, 1988, 12: 1203-1219.

［9］ LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case part 1[J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985, 1 (1): 145-201.

［10］ LIONS P L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case part 2[J]. Rev Mat Iberoamericana, 1985, 1 (2): 45-121.