第 49 卷 第 4 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 4
2010 年 7 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jul. 2010

一类高阶奇异积分方程的快速小波解法*

李松华
（湖南理工学院数学学院，湖南 岳阳 414006）

摘 要：利用一类三角小波作为基函数 Galerkin 方法，将一类高阶奇异积分方程离散化，得到的刚度矩阵是一个对称循环矩阵，并由此获得了一个基于 FFT 和 IFFT 的快速算法。该算法不但不需要计算刚度矩阵的值，而且还避免了求广义逆矩阵所带来的麻烦。数值算例表明：当积分方程的真实解几乎具有奇性时，该数值方法仍然十分有效。

关键词：高阶奇异积分方程；三角小波；矩阵分解；FFT

中图分类号：O241.83 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2010）04-0144-03

A Fast Wavelet Method for a Kind of Hypersingular Integral Equation

LI Songhua
(Department of Mathematics, Hunan Institute of Science and Technology, Yueyang 414006, China)

Abstract: Using trigonometric wavelets as trial functions and Galerkin method, the obtained stiffness matrix from discretization the hypersingular integral equation is symmetrical and circulant, which leads us to a fast numerical method based on fast Fourier transform. Furthermore, this method don't need to compute the entries of the stiffness matrix and overcome the drawback to solve generalized inverse matrix. The example states that it still has good accuracy when the accurate solution is almost singular.

Key words: hypersingular integral equation; trigonometric wavelets; matrix decomposition; FFT

许多科学和工程计算问题都归化为积分方程。这些积分方程往往是奇异的，有时甚至是超奇异的。超奇异积分被定义为 Hadamard 有限部分。它是经典的 Riemann 积分及 Cauchy 主值积分的推广。在 20 世纪 70 年代末 80 年代初，冯康院士及他的学生余得浩利用超奇异积分，提出了自然边界元方法求解一些偏微分方程，该方法比经典的边界元法有更多的优点[1-4]。而当在圆内或圆外区域归化时，大都会导致求解如下超奇异积分方程

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4\pi\sin^2\dfrac{\theta-\theta'}{2}}\right)u_0(\theta')\mathrm{d}\theta' = g(\theta) \qquad (1)$$

其中 $u_0(\theta)$ 是未知的待求函数。

余得浩和他的一些学生以及林伟和他的一些学生分别利用多项式和小波以及 Galerkin 方法求解方程（1）的数值解。在离散积分方程时，他们不但都需要计算对应系数矩阵的值，而且还需要求对应的广义逆矩阵，这样需要花大量的计算时间[4-6]。

本文利用文［7］中构造的一类三角小波作为基底和 Galerkin 方法来研究超奇异积分方程（1）的数值解，得到一种快速数值方法：一是不需要计算对应系数矩阵的值，而只基于快速傅里叶变换（FFT）和快速傅里叶逆变换（IFFT）；二是避免直接求广义逆矩阵。

1 Galerkin 方法及其误差分析

余得浩在文［4］中指出高阶奇异积分方程（1）解的性质，即

* 收稿日期：2009-08-01
基金项目：湖南省教育厅科研资助项目（07C335，07A025）；湖南省自然科学基金资助项目（07JJ3006）；湖南省“十一五”重点学科建设资助项目
作者简介：李松华（1973 年生），男，博士，副教授；E-mail：songhuali01@yahoo.com.cn

定理 1[4]　若奇异积分方程（1）中 $g(\theta)\in H^{-\frac{1}{2}}$ 且满足相容性条件，即 $\int_0^{2\pi}g(\theta)\mathrm{d}\theta=0$，那么积分方程（1）在商空间 $V=H^{\frac{1}{2}}/P_0$ 上存在唯一解 u_0，其中 P_0 是常数集，且 u_0 连续依赖于已知函数 $g(\theta)$。

在文［7］中，我们构造了一类三角小波。

定义 1（尺度函数）　设 N 表示所有正整数构成的集合，对于 $j\in\mathbb{N}$，尺度函数 $\varphi_{j,0}(\theta)$ 定义为

$$\phi_{j,0}(\theta)=\frac{1}{2^{\frac{j}{2}}\sqrt{\pi}}\left(\frac{1}{2}+\sum_{l=1}^{2^j-1}\cos l\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2^j\theta\right)\tag{2}$$

对于 $n=0,1,2,\cdots,2^{j+1}-1$，定义

$$\phi_{j,n}(\theta)=\phi_{j,0}(\theta-\frac{n\pi}{2^j})$$

定理 2[7]　对于任意的 $m,n=0,1,\cdots,2^{j+1}-1$，$j\in\mathbb{N}$，有

$$\int_0^{2\pi}\phi_{j,m}(\theta)\phi_{j,n}(\theta)\mathrm{d}\theta=\delta_{m,n}\tag{3}$$

其中 $\delta_{m,n}$ 表示 Kronecker 符号，即

$$\delta_{m,n}=\begin{cases}1, & m=n\\0, & m\neq n\end{cases}$$

定理 3[7]　任给 $j\in\mathbb{N}$，则尺度函数空间 $V_j=\mathrm{span}\{\varphi_{j,n}(\theta):n=0,1,\cdots,2^{j+1}-1\}$ 满足

$$V_j=\mathrm{span}\{1,\sin\theta,\sin2\theta,\cdots,\sin(2^j-1)\theta,\cos\theta,\cos2\theta,\cdots,\cos2^j\theta\}$$

从而 $\dim V_j=2^{j+1}$。

定理 4[7]　对于任意 $m,j\in\mathbb{N},n=0,1,2,\cdots,2^{j+1}-1$，则

$$\int_0^{2\pi}\varphi_{j,n}(\theta)\cos m\theta\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2^j}}\left(\sum_{\ell=1}^{2^j-1}\cos\ell\theta_{j,n}\delta_{m,\ell}+\frac{(-1)^n}{\sqrt{2}}\delta_{m,2^j}\right)$$

$$\int_0^{2\pi}\phi_{j,n}(\theta)\sin m\theta\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2^j}}\sum_{\ell=1}^{2^j-1}\sin\ell\theta_{j,n}\delta_{m,\ell}$$

$$\int_0^{2\pi}\phi_{j,n}(\theta)\mathrm{d}\theta=\sqrt{\frac{\pi}{2^j}}$$

下面我们利用 Galerkin 方法来求解高阶奇异积分方程（1）。明显尺度函数空间 V_j 是 $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ 的线性子空间，故有：

求 $u_0^{(j)}\in V_j$，使得

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4\pi sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)u_0(\theta')\mathrm{d}\theta'v^{(j)}(\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^{2\pi}g(\theta)v^{(j)}(\theta)\mathrm{d}\theta,\tag{4}$$

也就是说，设 $u_0^{(j)}(\theta)=\sum_{\ell=0}^{2^{j+1}-1}x_\ell^{(j)}\varphi_{j,\ell}(\theta)$，则（4）可化为如下等价的线性方程组

$$K_jx_j=b_j\tag{5}$$

其中 $x_j=(x_0^{(j)},x_1^{(j)},\cdots,x_{2^{j+1}-1}^{(j)})^{\mathrm{T}}$ 是待求的未知向量，向量 $b_j=(b_0^{(j)},b_1^{(j)},\cdots,b_{2^{j+1}-1}^{(j)})^{\mathrm{T}}$，且

$$b^{(j)}=\int_0^{2\pi}g(\theta)\phi_{j,\ell}(\theta)\mathrm{d}\theta,\quad \ell=0,1,\cdots,2^{j+1}-1$$

系数矩阵 $K_j=(k_{st}^{(j)})_{2^{j+1}\times2^{j+1}}$ 中元素为

$$k_{st}^{(j)}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4\pi\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)\phi_{j,s}(\theta')\phi_{j,t}(\theta)\mathrm{d}\theta'\mathrm{d}\theta\tag{6}$$

利用文［4］中的公式

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4\pi\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)\cos k\theta'\mathrm{d}\theta'=k\cos k\theta$$

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4\pi\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)\sin k\theta'\mathrm{d}\theta'=k\sin k\theta$$

其中 $k=0,1,2,\cdots$ 代入（6）式可得

$$k_{st}^{(j)}=\frac{1}{2^j}\left(\sum_{\ell=1}^{2^j-1}\ell\cos\frac{\ell(s-t)\pi}{2^j}+(-1)^{s-t}2^{j-1}\right)$$

设 $r=|s-t|$，记

$$k_r^{(j)}=\frac{1}{2^j}\left(\sum_{\ell=1}^{2^j-1}\ell\cos\frac{\ell r\pi}{2^j}\right)+\frac{(-1)^r}{2},\quad r=0,1,2,\cdots,2^{j+1}-1\tag{7}$$

则 $k_r^{(j)}=k_{2^{j+1}-r}^{(j)}(r=1,2,\cdots,2^{j+1}-1)$。这表明矩阵 K_j 是一个对称循环矩阵，因此矩阵 K_j 可分解为

$$K_j=\overline{F_j}\Lambda_jF_j,\tag{8}$$

其中矩阵 $F_j=(2^{-\frac{j+1}{2}}e^{\frac{i2st\pi}{2^{j+1}}})_{s,t=0,1,\cdots,2^{j+1}-1}$，对角矩阵 Λ_j 中对角线上的元素 $\lambda_r^{(j)}=\sum_{\ell=0}^{2^{j+1}-1}k_\ell^{(j)}e^{\frac{2\ell r\pi i}{2^{j+1}}}$，将（7）代入可得

$$\lambda_r^{(j)}=\begin{cases}0, & r=0\\ r, & 1\leqslant r\leqslant 2^j\\ 2^{j+1}-r, & 2^j+1\leqslant r\leqslant 2^{j+1}-1\end{cases}\tag{9}$$

由于 $F_j^{-1}=\overline{F_j}$，利用（8）可将（5）化为

$$\Lambda_jF_jx_j=F_jb_j\tag{10}$$

取向量 $\hat{b}_j=(\hat{b}_s^{(j)})_{s=0,1,\cdots,2^{j+1}-1}=F_jb_j$ 和向量 $a_j=(a_s^{(j)})_{s=0,1,\cdots,2^{j+1}-1}$，其中

$$a_s^{(j)}=\begin{cases}\hat{b}_s^{(j)}, & s=0\\ \dfrac{\hat{b}_s^{(j)}}{s}, & 1\leqslant s\leqslant 2^j\\ \dfrac{\hat{b}_s^{(j)}}{2^{j+1}-s}, & 2^j+1\leqslant s\leqslant 2^{j+1}-1\end{cases}\tag{11}$$

则（10）可化为

$$x_j = \overline{F_j} a_j \quad (12)$$

而 $\overline{F_j} a_j$ 和 $F_j b_j$ 计算分别可以利用快速 Fourier 变换（FFT）算法来完成。

注 1）从表达式（9）可知：对于 $2^{j+1} \times 2^{j+1}$ 的矩阵 K_j，它的秩 $R(K_j) = 2^{j+1} - 1$，因此矩阵 K_j 不是一个满秩矩阵，故 K_j 不是一个可逆矩阵，这一点使得在数值计算会导致矩阵的 K_j 的条件数非常大，而我们的方法完全避免了这一点。

2）从（10）－（12）式可知，我们的数值方法仅仅只需要求向量 $\boldsymbol{b}$ 的值，而无需计算刚度矩阵 K_j 值。

类似于［8］中的证明方法，我们容易证明如下误差估计。

定理 5 设 $u_0 \in C^m([0,2\pi])(m \geqslant 1)$，且 $\int_0^{2\pi}(u_0 - u_0^{(j)})\mathrm{d}\theta = 0$，则

$$\left(\int_0^{2\pi} |u_0 - u_0^{(j)}|^2 \mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_j 2^{-j(m-1)} \quad (12)$$

其中常数 C_j 满足 $C_j \to 0$（当 $j \to \infty$）。

2 数值例子

解高阶奇异积分方程

$$\int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{4\pi\sin^2\frac{\theta-\theta'}{2}}\right)u_0(\theta')\mathrm{d}\theta' = \frac{(1+a^2)\cos\theta - 2a}{(1+a^2-2a\cos\theta)^2},$$

a 为实常数。

上面积分方程的真实解为

$$u_0(\theta) = \frac{\cos\theta - a}{1+a^2-2a\cos\theta} + C \quad (13)$$

其中 C 为任意常数。此外由上式可知，当 $a=1$ 时解 $u_0(\theta)$ 有奇点。

为了保证解唯一，我们假设数值解还满足条件

$$\int_0^{2\pi}(u_0 - u_0^{(j)})\mathrm{d}\theta = 0$$

下面表1列出对于不同 a 值的相对误差 $\dfrac{\left(\int_0^{2\pi}|u_0 - u_0^{(j)}|^2\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(\int_0^{2\pi}|u_0|^2\mathrm{d}\theta\right)^{\frac{1}{2}}}$ 的计算结果。

表1 相对误差

Table 1 Relative error

	$a=0.9$	$a=0.95$	$a=0.99$	$a=0.995$
$j=4$	0.185 302 02	0.440 126 67	0.851 457 77	0.922 931 13
$j=6$	0.001 179 02	0.037 524 14	0.525 596 49	0.725 566 43
$j=8$	0.000 000 00	0.000 002 00	0.076 314 98	0.277 146 12
$j=10$	0.000 000 00	0.000 000 17	0.000 033 93	0.005 904 20
$j=12$	0.000 000 00	0.000 000 18	0.000 000 90	0.000 228 91

从表达式（13）以及以上表格可知：

1）当 a 的值接近1时，积分方程（1）的真实解 $u_0(\theta)$ 几乎有奇点的，但我们的数值方法仍然十分有效；

2）当 a 的值越接近1，为了获得比较精确的近似解，则需计算更大的 j，这时如果采用逆矩阵来运算几乎不可能。

致谢 作者万分感谢中山大学林伟教授对本文的悉心指导。

参考文献：

［1］ 冯康．微分和积分方程、有限和无限元［J］．计算科学，1980，2：100－105.

［2］ 冯康．Canonical boundary reduction and finite element method ［C］． Proceedings of International Invitational Symposium on the Finite Element Method（1981，合肥）．北京：科学出版社，1982.

［3］ 冯康．有限元方法与自然边界归化［C］//国际数学家大会论文集，1983：1439－1453.

［4］ 余得浩．自然边界元方法的数学理论［M］．北京：科学出版社，1993.

［5］ SHEN Y J. Numerical quadratures for Hadamard hypersingular integrals ［J］. Numerical Mathematics，A，journal of Chinese Universities：English Series，2006，15（1）：50－59.

［6］ CHEN W S，LIN W. Galerkin trigonometric wavelet methods for the natural boundary integral equations ［J］. Appl Math Comp，2001，121：75－92.

［7］ 李松华．小波在 Helmholtz 方程和采样问题中的应用［D］．广州：中山大学数学学院，2006.

［8］ LI S H. A fast numerical method for harmonic equation based on natural boundary integral ［J］. Appl Anal，2008，87（6）：667－676.