

Robin 反问题的 TV 正则化*

丁胜培, 杨宏奇

(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘要: 研究 Robin 反问题。先将 Robin 反问题化为边界积分方程, 并应用 TV 正则化方法求解。数值实验表明, TV 正则化更有效。

关键词: Robin 反问题; TV 正则化方法; 延迟扩散固定点迭代法

中图分类号: O175.3 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2010) 03-0024-05

TV Regularization of the Robin Inverse Problem

DING Shengpei, YANG Hongqi

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510725, China)

Abstract: To investigate the Robin inverse problem. Firstly, formulate the problem to a boundary equation, then apply TV regularization method to solve it. Lastly, present the numerical examples to demonstrate the efficiency of the TV regularization.

Key words: Robin inverse problem; TV regularization; lagged diffusivity fixed point iterative method

考虑拉普拉斯方程的 Robin 边界值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial v} + pu = g, & x \in \partial\Omega \end{cases} \quad (1)$$

其中, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ 为拉普拉斯算子, Γ 为区域 Ω 的边界, v 为 Γ 外单位法向量, p 为 Robin 系数并且其支集满足 $\text{supp}(p) \subset \Gamma_1 \subset \Gamma$ 。一般情况下, 我们将这个问题的求解视为正问题。关于正问题研究, 已有大量的结果^[1-3]。例如其唯一性、连续性, 以及可微和各种形式的稳定性。在此处, 我们不再详细介绍。

相对于正问题, 我们给出 Robin 反问题: 给定 u_0 (u_0 为 u 在 $\Gamma_0 \subset \Gamma$ 上的值) 且 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \phi$, 怎样重构 Robin 系数 p ? 这个反问题起源于各种不同的无损探伤 (由边界可接触部分的测量来重构不可接触部分的材料剖面), 在实际应用中有重要意义。例如, 在腐蚀检测中^[4-7], p 表示在一个不可接触边界上的腐蚀损伤剖面, u_0 则表示在可接触边界上的静电测量。在 MOSFET (金属氧化物半导体

场效应晶体管的英文缩写) 半导体器件研究中, Robin 系数 p 包含了关于质量和位置的信息, 而 u_0 则是可接触边界的电压测试值。

最近, 人们已经对 Robin 反问题已做一些研究, 但是研究中大部分关注的是它的正问题, 结果也大多数是对光滑区域和逐段光滑区域 (如在 R^2 中的长方形) 研究。因为这个问题涉及所有的量均在边界 Γ 上, 这里我们采用边界积分方程做法。相对其他做法, 边界积分方程可将区域维数降一维, 同时, 在计算上也比其他方法更具有优势。

针对 Robin 反问题, 也有一些求解方法。如先引入变量将求解的问题线性化, 然后基于线性最小二乘法来求解 Robin 反问题即 LS 方法^[8]。在本文中, 我们继续研究用边界积分方程重构 Robin 系数 p 的数值方法, 但是这里我们采用不同于以前的方法, 而是直接对边界积分方程 TV 正则化。这种做法相对于 LS 方法更直接。同时数值实验表明, 我们给出的这种方法比 LS 方法具有更好的效果。

* 收稿日期: 2009-04-10

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771224); 中国石化资助项目; 中山大学 985 工程资助项目

作者简介: 丁胜培 (1983 年生), 男, 博士生; E-mail: mcsyhq@mail.sysu.edu.cn

1 Robin 反问题的边界积分方程构造

在这一部分, 我们将 (1) 转化为一个边界积分方程。我们假定:

(i) 域 Ω 有一个光滑 (C^2) 的边界 Γ 或者是一个多边形。

(ii) Γ_0 和 Γ_1 为 Γ 的闭子集且 $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 = \emptyset$ 。

(iii) $p(t)$ 是一个非负连续函数且 $\text{supp}(p) \subset \Gamma_1$ 。

如果区域是多边形的情况, 内角都设其小于 π 。一般令 $\phi = \phi(x, y)$ 为拉普拉斯方程的基本解

$$\phi(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{|x - y|}, & d = 2 \\ \frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}, & d = 3 \end{cases}$$

其中 $x, y \in \Omega$ 且 $x \neq y, d$ 为维数。由格林公式, 可得到 (1) 的解 u 可表示为

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v_y} + p(y) \phi(x, y) \right) u(y) ds_y + \int_{\Gamma} \phi(x, y) g(y) ds_y, \quad x \in \Omega$$

因 u 在 Γ 上连续, 故令 $x \in \Omega$ 趋近 Γ 。可得到^[9-11]

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(1 - d_{\Gamma}(x))u(x) + \\ & \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v_y} + p(y) \phi(x, y) \right) u(y) ds_y = \\ & \int_{\Gamma} \phi(x, y) g(y) ds_y \end{aligned} \quad (2)$$

其中

$$d_{\Gamma}(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Omega \text{ 不是隅角点} \\ 1 - \frac{\gamma(x)}{\pi}, & x \in \Omega \text{ 是隅角点, } \gamma(x) \text{ 是内角} \end{cases}$$

定义算子

$$\begin{cases} (Du)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v_y} u(y) ds_y - \frac{1}{2} d_{\Gamma}(x) u(x) \\ (Su)(x) = \int_{\Gamma} \phi(x, y) u(y) ds_y \end{cases} \quad (3)$$

由 $u \equiv 1$ 是边值问题 (1) 当 $p \equiv g \equiv 0$ 时的解, 从 (2) 的关系中得到

$$\frac{1}{2}(1 - d_{\Gamma}(x)) + \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v_y} ds_y = 0 \quad (4)$$

于是, D 算子可表达为:

$$(Du)(x) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial v_y} (u(y) - u(x)) ds_y - \frac{1}{2} u(x) \quad (5)$$

算子 D, S 都是将 $C(\Gamma)$ 映射到 $C(\Gamma)$ 。当 Γ 光滑时,

算子 D 有一个连续的核, 从而是紧的。当 Ω 为多边形时, 算子 D 可写为一个紧算子和一个有界算子的和的形式且其范数小于 $1/2$ ^[9]。在以上情况下, $\frac{1}{2}I + D$ 都是 Fredholm 型。而算子 S 核是弱奇异的, 故为紧算子。由 D, S 的定义, (2) 可写为

$$\left(\frac{1}{2}I + D \right) u + S(pu) = Sg \quad (6)$$

满足方程 (6) 的 u 是 (1) 的解, 由 (1) 解的唯一性可得到算子 $\left(\frac{1}{2}I + D \right) + S(p)$ 有界且可逆。

2 TV 正则化方法

在上一部分中将 (1) 问题转化为问题 (6), 这个问题我们这里采用参数辨识中的最小二乘数据拟合项加 TV 正则项的方法直接求解 p 限制在 Γ_1 上的函数 p_1 。我们定义算子 C

$$(Cp_1)(x) = \begin{cases} p_1(x), & x \in \Gamma_1 \\ 0, & x \notin \Gamma_1 \end{cases}$$

从而我们有 $(Cp_1)(x) = p(x)$ 。同时引入记号

$$J_{\beta}(v) := \int_0^1 \sqrt{\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \beta^2} dx$$

此处的 $\beta > 0$ 为一个固定小参数。下面给出这种 TV 正则化。

为了直接求解, 我们需要极小化无约束 TV 正则化最小二乘泛函

$$\min_{p_1 \in Q} T(p_1)$$

这里 $T(p_1) := \frac{1}{2} \| F(p_1) - d \|_V^2 + \alpha J_{\beta}(p_1)$ 。其中

$F(p_1) := C_0 A(Cp_1)^{-1} f, A(Cp_1) := \left(\frac{1}{2}I + D \right) + S(Cp_1), f := Sg$, 而 $C_0: C(\Gamma) \rightarrow C(\Gamma_0)$ 为限制算子, $\alpha (\alpha > 0)$ 是正则化参数。

3 平面域离散

在这一部分中, 我们将如文 [8] 中所做, 讨论前面正则化方法的离散。这里的平面域离散具有矩形 (有角点) 边界。

我们先将边界参数化后再来描述边界积分方程 (6)。假定平面域的边界由参数 t 给出

$$(x_1, x_2) = (\phi(t), \psi(t)),$$

$$0 \leq t \leq L, \text{ 且 } (\phi(0), \psi(0)) = (\phi(L), \psi(L))$$

当 Ω 是一个 k 边形时, 我们标识这 k 顶点的参数为 $0 = t^{(0)} < t^{(1)} < \dots < t^{(k-1)} < L$, 相应的内部角我们记为 γ_i 且 $\gamma_i < \pi (i = 0, 1, 2, \dots, k - 1)$ 。

假设 $\varphi(\cdot)$ 和 $\psi(\cdot)$ 是 C^2 函数 (除去可能的角点)。对 $x = (\phi(t), \psi(t)), y = (\phi(s), \psi(s)) \in \Gamma, x \neq y$ 且 y 不是一个角点, 即 $s \neq t^{(i)} (i = 0, 1, 2, \dots, k-1)$ 时, 有

$$ds_y = \sqrt{(\phi'(s))^2 + (\psi'(s))^2} ds$$

定义

$$K_s(t, s) = \Phi(x, y) \sqrt{(\phi'(s))^2 + (\psi'(s))^2} = -\frac{1}{2\pi} (\ln \sqrt{(\phi(t) - \phi(s))^2 + (\psi(t) - \psi(s))^2}) \cdot$$

$$\sqrt{(\phi'(s))^2 + (\psi'(s))^2}$$

$$K_d(t, s) = \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v_y} \sqrt{(\phi'(s))^2 + (\psi'(s))^2} =$$

$$\frac{1}{2\pi} \frac{\psi'(s)(\phi(t) - \phi(s)) + \phi'(s)(\psi(t) - \psi(s))}{(\phi(t) - \phi(s))^2 + (\psi(t) - \psi(s))^2}$$

这样我们可以将算子 S 和 D 写为

$$(Su)(t) = \int_0^L K_s(t, s)u(s) ds, \\ (Du)(t) =$$

$$\begin{cases} \int_0^L K_d(t, s)u(s) ds, & \text{光滑域} \\ \int_0^L K_d(t, s)(u(s) - u(t)) ds - \frac{1}{2}u(t), & \text{多边形区域} \end{cases}$$

其中 $u(s) = u(\phi(s), \psi(s))$ 。当 $x = y$ 不是一个角点时, 在 $s = t$ 处 $K_d(t, s)$ 是连续的且

$$K_d(t, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\psi'(t)\phi''(s) + \phi'(s)\psi''(t)}{(\phi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}$$

在上面的参数化后, 我们用中点求积法来离散化积分。令区间 $[0, L]$ 分为 N 个相等的子区间 $[(i-1)h, ih] (i = 1, 2, \dots, N)$ 且 $h = L/N$, 则求积点为 $t_i = (i-1/2)h, i = 1, 2, \dots, N$ 。假定

$$\{t_i\}_{i=1}^N \cap \{t: (\phi(t), \psi(t)) \in \Gamma_0\} = \{t_{m_1+1}, \dots, t_{m_2}\}, \\ \{t_i\}_{i=1}^N \cap \{t: (\phi(t), \psi(t)) \in \Gamma_1\} = \{t_{m_3+1}, \dots, t_{m_4}\}$$

$u(t)$ 在 Γ 上的离散化记为 u , 而 $v(t)$ 和 $p(t)$ 在 Γ_1 上的离散化分别记为 $v, p: u = [u(t_1), \dots, u(t_N)]^T, v = [v(t_{m_3+1}), \dots, v(t_{m_4})]^T, p = [p(t_{m_3+1}), \dots, p(t_{m_4})]^T$ 。同时 $u|_{\Gamma_0}$ 离散数据 u_0 及 g 的离散数据 g 分别为 $u_0 = [u_0(t_{m_1+1}), \dots, u_0(t_{m_2})]^T, g = [g(t_1), \dots, g(t_N)]^T$ 。记核 K_d, K_s 分别为 D, S, D, S 均为 $N \times N$ 矩阵。算子 $(\frac{1}{2}I + D + \bar{S})^{-1} S_1$, 可由矩阵 $A = (\frac{1}{2}I + D + S\bar{p})^{-1} S_1$ 表示。其中 $\bar{p} = \text{diag}(p), S_1 = S(:, m_3 + 1:m_4)$, 这个矩阵是 $N \times (m_4 - m_3)$ 的。

在下面部分中, 我们特地讨论在矩形域上的参

数化、核以及矩阵 D, S , 这些在后面的数值计算中将被应用。假定 Ω 是 \mathbb{R}^2 中的矩形域: $\Omega = \{(x_1, x_2): 0 < x_1 < a, 0 < x_2 < b\}$ 并且 $a, b > 0$ 。在这种类型中, 我们用下面来参数化 Γ :

$$(x_1, x_2) = (\phi(t), \psi(t)) =$$

$$\begin{cases} (t, 0), t \in [0, a] \equiv T_1 \\ (a, t-a), t \in [a, a+b] \equiv T_2 \\ (2a+b-t, b), t \in [a+b, 2a+b] \equiv T_3 \\ (0, 2(a+b)-t), t \in [2a+b, L] \equiv T_4 \end{cases}$$

$(L = 2(a+b))$ 角点为 $t^{(0)} = 0, t^{(1)} = a, t^{(2)} = a + b, t^{(3)} = 2a + b, \gamma_i = \frac{\pi}{2}$ 。用上面的我们可以计算

核 $K_d^{rec}(t, s)$ 和 $K_s^{rec}(t, s)$ 。对 $(t, s) \in T_i \times T_j$, 有

$$\begin{cases} K_s^{rec}(t, s) = -\frac{1}{4\pi} \ln((a_{ij}^{(1)}t + a_{ij}^{(2)}s + a_{ij}^{(3)})^2 + \\ (a_{ij}^{(4)}t + a_{ij}^{(5)}s + a_{ij}^{(6)})^2) \\ K_d^{rec}(t, s) = -\frac{b_{ij}^{(7)} + b_{ij}^{(8)}t}{2\pi e} \end{cases} \quad (7)$$

其中 $e = (b_{ij}^{(1)}t + b_{ij}^{(2)}s + b_{ij}^{(3)})^2 + (b_{ij}^{(4)}t + b_{ij}^{(5)}s + b_{ij}^{(6)})^2 a_{ij}^{(k)}$ 和 $b_{ij}^{(k)}$ 为常数。特别是, 对每一个 i ,

当 $(t, s) \in T_i \times T_i$, 有 $K_s^{rec}(t, s) = -\frac{1}{2\pi} \ln |t - s|$,

$K_d^{rec}(t, s) \equiv 0$ 。 $K_s^{rec}(t, s)$ 在 $t = s$ 奇异, 在 $(t, s) = (a, b), (a+b, a+b), (2a+b, 2a+b), (0, L), (L, 0)$, $K_d^{rec}(t, s)$ 奇异。我们选择我们的剖分点是它们不是角点, 则 $d_r^{(rec)} = 0, i = 1, 2, \dots, N$ 。从而有

$\int_0^L K_d^{rec}(t_i, s) ds = -\frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, N$ 。因此, 通过简单的计算, 得到

$$D = \left[hK_d^{rec}(t_i, t_j) - \delta_{ij} \left(h \sum_{k=1}^N K_d^{rec}(t_i, t_k) + \frac{1}{2} \right) \right]_{i,j=1}^N, \\ S =$$

$$\left[hK_s^{rec}(t_i, t_j) - \delta_{ij} \left(h \sum_{k=1}^N K_s^{rec}(t_i, t_k) - \int_0^L K_s^{rec}(t_i, s) ds \right) \right]_{i,j=1}^N$$

上面最后一项中的积分, 我们不用任何求积逼近就能通过 (7) 精确估计它的值。

4 数值算法的实现及实验结果分析

TV 正则化方法的数值算法实现方法有很多, 例如最速下降法 (Steepest Descent Method)、延迟固定点迭代法 (Lagged Diffusivity Fixed Point Iterative Method)、主对偶法 (Primal-Dual Method)。这里我们采用文 [12] 中延迟扩散固定点迭代法求解的算法。

数值例子中, 我们这里用一个逐段光滑的 Robin 系数 p 。这已在文 [4, 8] 中测试过。我们的计算由 Matlab 来实现, 我们在 $[0, L]$ 上划分相等的小区间, 取 $h = 0.01$ 。在求解的过程中, 正则化的参数是通过几次尝试得到的, 此外没有其它好的办法来选取。

实验: 我们取矩形相关参数及 g 如下

$$\begin{aligned} (a, b) &= (1, 0.1), \Gamma_0 = \\ &\{(x_1, 0) : 0 \leq x_1 = t \leq a\} \text{ (底边)} \\ \Gamma_1 &= \{(x_1, b) : 0 \leq x_1 = \\ &2a + b - t \leq a\} \text{ (顶边)} \\ g(x_1, x_2) &= \begin{cases} 1 & (x_1, x_2) \in \Gamma_0 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

图 1 是无约束 TV 正则化最小二乘极小化方法与 LS 方法的比较, 图中的实线代表真实的函数 p , 而点划线表示有 LS 方法求得的 Robin 系数 p , 点线则代表无约束 TV 正则化最小二乘极小化方法求得的 Robin 系数 p 。另外, 其图 1 (a) (b) 是不同的 Robin 系数在无噪声的条件下重构 Robin 系数, 而图 1 (c) (d) 为加了相同扰动后重构的图。从图 1 (a) (b) 可以看出, 在不加噪音的条件下无约束 TV 正则化最小二乘极小化方法与 LS 方法都能较好的求得 Robin 系数 p , 但在加一定的扰动后, 图 1 (c) (d) 中两者明显表现出了不同效果, 无约束 TV 正则化最小二乘极小化方法要比以前的 LS 方法效果更好。

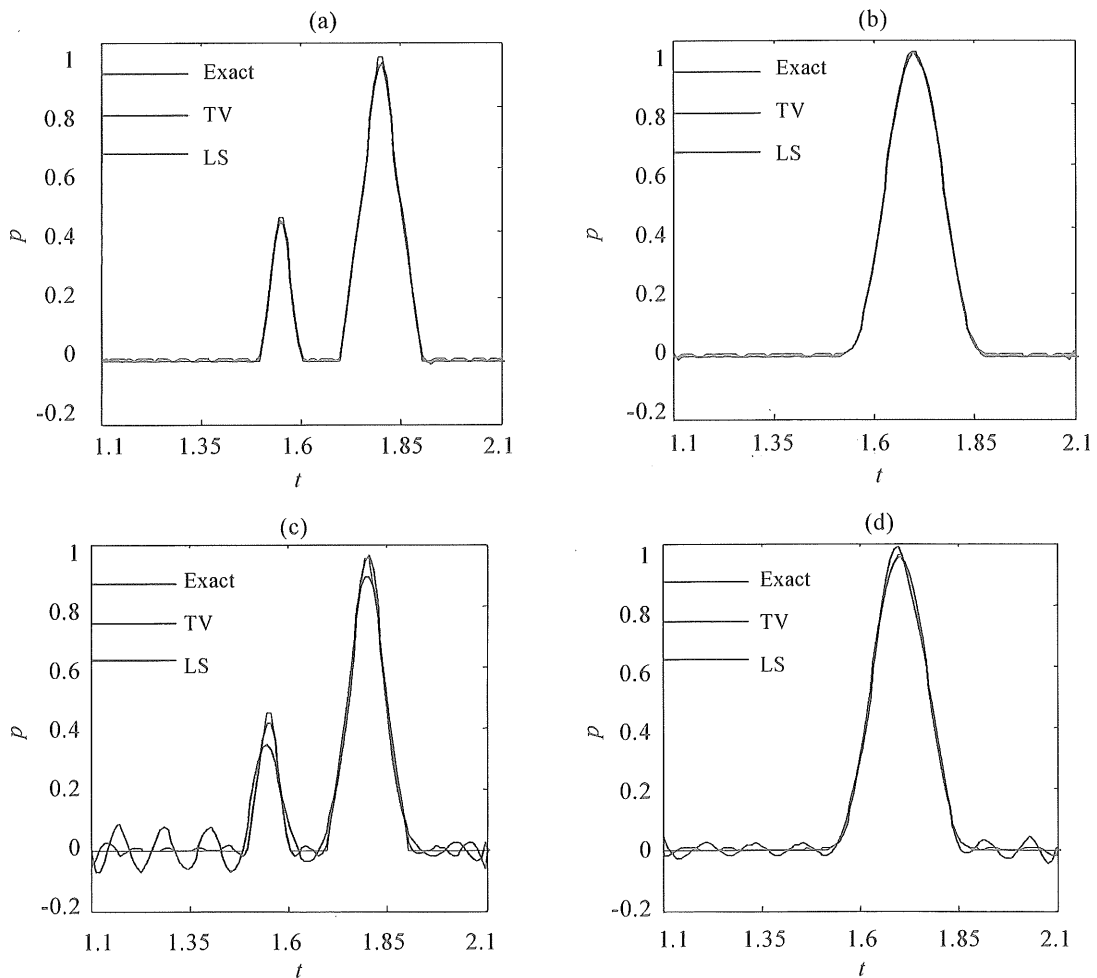


图 1 无约束 TV 正则化最小二乘极小化方法与 LS 方法的比较

Fig. 1 Comparison between nonconstraint TV regularized least square minimized method and LS method
(a) 与 (b) 是没有扰动的真实解和近似解的对比, (c) 与 (d) 是加了扰动的真实解和近似解的对比

- a one-dimensional quantum dot [J]. *Phys Rev B*, 1993, 47 (24): 16353 – 16357.
- [5] LIU Y M, HUANG G M, BAO C G. Phase diagram of a three-electron quantum dot with an impurity [J]. *Phys Rev B*, 2004, 70 (7): 073313 [4 pages].
- [6] MORIYAMA S, FUSE T, SUZUKI M. Four-electron shell structures and an interacting two-electron system in Carbon-nanotube quantum dots [J]. *Phys Rev Lett*, 2005, 94 (18): 186806 [4 pages].
- [7] XIE W F. Barrier D^- quantum dots in magnetic fields [J]. *J Phys: Condens Matter*, 2000, 12: 3849 – 3856.
- [8] TOSHIMASA F, DAVID G A, YASUHIRO T et al. Allowed and forbidden transitions in artificial hydrogen and helium atoms [J]. *Nature*, 2002, 419: 278 – 281.
- [9] HARJU A, SILJAMAKI S, NIEMINEN R M. Two-electron quantum dot molecule; composite particles and the spin phase diagram [J]. *Phys Rev Lett*, 2002, 88(22): 226804 [4 pages].
- [10] LIU Y M, HUANG G M. Effect of a charged impurity on quantum dot lithium [J]. *Modern Physics Letter B*, 2003, 17 (18): 973 – 981.
- [11] CONSTANTINE Y, UZI L. Formation and control of electron molecules in artificial atoms: Impurity and magnetic-field effects [J]. *Phys Rev B*, 2000, 61 (23): 15895 – 15904.
- [12] LEE C M, LAM C C. Polaron effect on low-lying energy spectrum of two electrons bound to a Coulomb impurity in a quantum dot [J]. *Phys Rev B*, 2000, 61 (15): 10376 – 10382.
- [13] XIE W F. Impurity effect on low-lying spectra in a two-electron quantum dot with parabolic confinement [J]. *Physica B: Condensed Matter*, 2003, 334 (3/4): 317 – 322.
- [14] BAO C G. Large regions of stability in the phase diagrams of quantum dots and the associated filling factors [J]. *Phys Rev Lett*, 1997, 79 (18): 3475 – 3477.
- [15] BAO C G. The symmetry background underlying the ring structures of quantum dots and a classification scheme [J]. *J Phys: Condens Matter*, 2002, 14 (36): 8549 – 8561.
- [16] 黄钢明, 刘益民. GaAs 量子点中电子结构和幻角动量的对称性分析 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2009, 48 (6): 33 – 37.

(上接第 27 页)

参考文献:

- [1] FASINO D, INGLESE G. An inverse problem for Laplace's equation; theoretical results and numerical methods [J]. *Inverse Problems*, 1999, 15: 41 – 48.
- [2] ALESSANDRINI G, DEL PIERO L, RONDI L. Stable determination of corrosion by single electrostatic boundary measurement [J]. *Inverse Problems*, 2003, 19: 973 – 984.
- [3] CHAABANE S, JAOUA M. Identification of Robin coefficients by means of boundary measurements [J]. *Inverse Problems*, 1999, 15: 1425 – 1438.
- [4] INGLESE G. An inverse problem in corrosion detection [J]. *Inverse Problems*, 1997, 13(4): 977 – 994.
- [5] KAUP P G, SANTOSA F. Nondestructive evaluation of corrosion damage using electrostatic measurements [J]. *J Nondestruct Eval*, 1995, 14: 127 – 136.
- [6] SANTOSA F, VOGELIUS M, XU J M. An effective nonlinear boundary condition for corroding surface. Identification of damage based on steady state electric data [J]. *Z Angew Math Phys*, 1998, 49: 656 – 679.
- [7] VOGELIUS M, XU J M. A nonlinear elliptic boundary value problem related to corrosion modeling [J]. *Q Appl Math*, 1998, 56: 479 – 505.
- [8] LIN F R, FANG W F. A linear integral equation approach to the Robin inverse problem [J]. *Inverse Problems*, 2005, 21: 1757 – 1772.
- [9] KRESS R. *Linear integral equations* [M]. 2nd ed. New York: Springer, 1999.
- [10] MAZYA V G. *Boundary integral equations* [M]. New York: Springer, 1991: 127 – 222.
- [11] ATKINSON K E. *The numerical solution of integral equations of second kind* [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1997.
- [12] VOGEL C R. *Computational methods for inverse problem* [C]. Society for Industrial Applied and Mathematics (SIAM), 2002.