

一类四阶 p -Laplace 微分方程周期解的存在性*

曹凤娟, 韩振来, 孙书荣
(济南大学理学院, 山东 济南 250022)

摘要: 利用广义 Mawhin 连续定理和一些不等式技巧, 通过构建恰当的算子, 研究一类四阶 p -Laplace 微分方程周期解的存在性. 运用一个改进的先验估计, 结合对 p 的分类讨论, 得到该类微分方程至少存在一个周期解的两个充分条件.

关键词: 广义 Mawhin 连续定理; 周期解; p -Laplace 微分方程

中图分类号: O175.11 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2010) 03-0018-06

Existence of Periodic Solutions for a Fourth-Order p -Laplacian Differential Equation

CAO Fengjuan, HAN Zhenlai, SUN Shurong

(School of Sciences, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract: By means of the generalized Mawhin's continuation theorem and some inequality skills, with constructing the appropriate operators, the existence of periodic solution for a fourth-order p -Laplacian differential equation is discussed. Using a improved priori estimate, combining the classify of p , two sufficient conditions are presented to guarantee the existence of at least one periodic solution for this kind of differential equations.

Key words: generalized Mawhin's continuation theorem; periodic solution; p -Laplacian differential equation

Mawhin 利用重合度理论在文献 [1] 中给出了抽象方程 $Lx = Nx$ 至少存在一个解的连续定理, 这里 L 为非可逆的线性算子, 后来这一理论成为研究边值问题及周期边值问题的有效工具. 近年来, 具 p -Laplace 算子的周期解存在性问题引起了众多学者的关注, 参见文献 [2-12].

Cheung 和任景莉在文献 [2] 中应用 Mawhin 连续定理研究了一类具有滞量的 p -Laplace 广义 Liénard 型方程

$$(\varphi_p(x'(t)))' + f(t, x(t))x'(t) + \beta(t)g(x(t - \tau(t))) = e(t) \quad (1)$$

给出了方程 (1) 至少存在一个 T -周期解的几个充分条件.

为了减弱 L 为线性算子这一限制, 将考虑用广义的 Mawhin 连续定理研究一类四阶 p -Laplace 微分方程

$$(\varphi_p(x''(t)))'' + f(t, x(t), x'(t), x''(t)) = e(t) \quad (2)$$

周期解的存在性, 这里函数 $f \in C(\mathbb{R}^4, \mathbb{R})$, 且关于第一变量是 T -周期的, 即 $f(t, \cdot, \cdot, \cdot) = f(t + T, \cdot, \cdot, \cdot)$, $e(t) = e(t + T) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

广义 Mawhin 连续定理的应用并不常见 (参见 [8-9, 13]). 本文通过应用葛渭高和任景莉在文献

* 收稿日期: 2009-05-15

基金项目: 山东省自然科学基金资助项目 (ZR2009AL003, Y2008A28); 济南大学博士基金资助项目 (B0621, XBS0843)

作者简介: 曹凤娟 (1983年生), 女, 硕士生; 通讯作者: 韩振来; E-mail: hanzhenlai@163.com

[8] 中获得的定理, 介绍一种研究 p -Laplace 微分方程周期解存在的新方法。此外验证周期解的先验界限也与其它文章不同。

1 相关引理及证明

为方便研究, 本节给出几个重要定义、引理及证明。

定义 1^[8] 令 X 和 Z 为两个 Banach 空间, 其中范数分别记为 $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Z$ 。连续算子 $M: X \cap \text{dom}M \rightarrow Z$ 满足: (i) $\text{Im}M := M(X \cap \text{dom}M) \subset Z$ 为闭集;

(ii) $\text{Ker}M := \{x \in X \cap \text{dom}M : Mx = 0\}$ 线性同胚于 $\mathbb{R}^n (n < \infty)$,

则称为拟线性算子。

定义 2^[8] 令 $\Omega \subset X$ 为一开有界集, 且有原点 $\theta \in \Omega, N_\lambda: \bar{\Omega} \rightarrow Z, \lambda \in [0, 1]$ 。若存在 Z 的一个子空间 Z_1 , 满足 $\dim Z_1 = \dim \text{Ker}M$, 且存在全连续算子 $R: \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow X_2$, 使对任意的 $\lambda \in [0, 1]$, 有

$$(A_1) (I - Q)N_\lambda(\bar{\Omega}) \subset \text{Im}M \subset (I - Q)Z;$$

$$(A_2) QN_\lambda x = 0, \lambda \in (0, 1) \Leftrightarrow QNx = 0;$$

$$(A_3) R(\cdot, 0) \equiv 0 \text{ 且 } R(\cdot, \lambda) \Big|_{\Sigma_\lambda} = (I - P) \Big|_{\Sigma_\lambda};$$

$$(A_4) M[P + R(\cdot, \lambda)] = (I - Q)N_\lambda, \lambda \in [0, 1],$$

则称 N_λ 在 $\bar{\Omega}$ 中 M -紧。其中 X_2 为 $\text{Ker}M$ 在 X 中的余空间, 即 $X = \text{Ker}M \oplus X_2$ 。 P, Q 为两个映射满足 $\text{Im}P = \text{Ker}M, \text{Im}Q = Z_1, N = N_1, \Sigma_\lambda = \{x \in \bar{\Omega} : Mx = N_\lambda x\}$ 。

引理 1^[9] 令 X 和 Z 为两个 Banach 空间, 其中范数分别记为 $\|\cdot\|_X, \|\cdot\|_Z$ 。 $\Omega \subset X$ 为一非空开有界集, 假设 $M: X \cap \text{dom}M \rightarrow Z$ 为拟线性的, $N_\lambda: \bar{\Omega} \rightarrow Z, \lambda \in [0, 1]$ 为 $\bar{\Omega}$ 中 M -紧, 且满足下列条件:

$$(h_1) Mx \neq N_\lambda x, \forall (x, \lambda) \in \partial\Omega \times (0, 1);$$

$$(h_2) QNx \neq 0, \forall x \in \text{Ker}M \cap \partial\Omega;$$

$$(h_3) \deg\{JQN, \Omega \cap \text{Ker}M, 0\} \neq 0, J: \text{Im}Q \rightarrow \text{Ker}M \text{ 同胚}。$$

则抽象方程 $Mx = Nx$ 在 $\text{dom}M \cap \bar{\Omega}$ 中至少存在一个解。

引理 2^[14] φ_p 满足下列性质:

$$(c_1) \varphi_p \text{ 为连续, 单调递增且可逆的, } \varphi_p^{-1} = \varphi_q, q > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$

$$(c_2) \text{ 对任意的 } u, v \geq 0,$$

$$\varphi_p(u + v) \leq \varphi_p(u) + \varphi_p(v), \quad 1 < p < 2; \varphi_p(u + v) \leq 2^{p-1}(\varphi_p(u) + \varphi_p(v)), p \geq 2$$

记 $X = Z = C_T^2 = \{x \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R}) : x(t) = x(t + T), x'(0) = x'(T) = 0\}$, 范数定义为

$$\|x\| = \max\{|x|_0, |x'|_0, |x''|_0\}, |x|_0 = \max_{t \in [0, T]} |x(t)|。$$

定义算子 $M: \text{dom}M \cap X \rightarrow Z, N_\lambda: X \rightarrow Z$ 分别为

$$(Mx)(t) = (\varphi_p(x''(t)))'' \tag{3}$$

$$(N_\lambda x)(t) = -\lambda f(t, x(t), x'(t), x''(t)) + \lambda e(t), \lambda \in [0, 1] \tag{4}$$

其中 $\text{dom}M = \{x \in X : \varphi_p(x''(t)) \in C_T^2\}, \varphi_p(s) = |s|^{p-2}s, p > 1, f \in C(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}), e(t) = e(t + T) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 。记 $F(t, x(t), x'(t), x''(t)) = -f(t, x(t), x'(t), x''(t)) + e(t)$, 则 $(N_\lambda x)(t) = \lambda F$ 。结合 (3) 和 (4) 式, 方程 (2) 等价于 $Nx = Mx$, 其中 $N_1 = N$ 。

引理 3 令 M 为 (3) 所定义, 则 M 为一个拟线性算子。

证明 由定义 1 可知, $\text{Ker}M = \{x \in X \cap \text{dom}M : x(t) = a, a \in \mathbb{R}\}, \text{Im}M = \{z \in Z : \int_0^T z(s) ds = 0\}$ 。

显然 $\text{Ker}M \cong \mathbb{R}, \text{Im}M$ 为 Z 中闭集。引理得证。

定义算子 $P: X \rightarrow \text{Ker}M, Q: Z \rightarrow \mathbb{R}$ 分别为 $(Px)(t) = x(0), (Qz)(t) = \frac{1}{T} \int_0^T z(s) ds$ 。

引理 4 若 $f \in C(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}), e \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 且 $e(t) = e(t + T)$, 则 N_λ 为 M -紧。

证明 令 $Z_1 = \text{Im}Q$ 。因为 $x'(0) = x'(T), \int_0^T x''(s) ds = 0$, 所以对任意 $x \in \bar{\Omega}$, 存在 $\eta \in [0, T]$, 使得

$x''(\eta) = 0$ 。这里 $\bar{\Omega} \subset X \neq \phi$ 为任一有界集。

定义 $R: \bar{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \text{Ker}P$, $R(x, \lambda)(t) = \int_0^t \int_0^\alpha \varphi_q \left[\int_\eta^r \int_\eta^s \lambda(F - QF)(u) du ds \right] dr d\alpha$, $\lambda \in [0, 1]$

易知 $R(\cdot, \lambda)$ 为全连续的。下证 N_λ 为 M -紧。

(A₁) 由 Q 的定义知 $Q^2 = Q$, 故 $Q[(I - Q)N_\lambda](\bar{\Omega}) = 0$, 即 $(I - Q)N_\lambda(\bar{\Omega}) \subset \text{Ker}Q = \text{Im}M$ 。又对任意的 $z \in \text{Im}M$, 显然有 $Qz = 0$, 因此 $z = z - Qz = (I - Q)z$, 故 $(I - Q)N_\lambda(\bar{\Omega}) \subset \text{Im}M \subset (I - Q)Z$ 。

(A₂) 由 $QN_\lambda x = \frac{1}{T} \int_0^T \lambda F(r, x(r), x'(r), x''(r)) dr = 0$, 得 $\frac{1}{T} \int_0^T F dr = 0$, 即 $QN_\lambda x = 0$ 。反之亦成立。

(A₃) 显然有 $R(\cdot, 0) \equiv 0$ 。对任意的 $x \in \Sigma_\lambda = \{x \in \bar{\Omega}; Mx = N_\lambda x\}$, 有 $(\varphi_p(x''(t)))'' = \lambda F$ 且 $QF = 0$ 。

$$R(x, \lambda)(t) = \int_0^t \int_0^\alpha \varphi_q \left[\int_\eta^r \int_\eta^s \lambda(F - QF)(u) du ds \right] dr d\alpha = \int_0^t \int_0^\alpha \varphi_q \varphi_p(x''(r)) dr d\alpha = (I - P)x(t)$$

(A₄) 对任意的 $x \in \bar{\Omega}$,

$$\begin{aligned} M[Px + R(x, \lambda)](t) &= \left(\varphi_p \left(\left[x(0) + \int_0^t \int_0^\alpha \varphi_q \left[\int_\eta^r \int_\eta^s \lambda(F - QF)(u) du ds \right] dr d\alpha \right] \right) \right)'' = \\ & \left(\varphi_p \left(\varphi_q \left[\int_\eta^t \int_\eta^s \lambda(F - QF)(u) du ds \right] \right) \right)'' = \lambda(F - QF)(t) = [(I - Q)N_\lambda x](t) \end{aligned}$$

综上所述, 算子 N_λ 为 M -紧。

2 主要结果

我们首先给出本节中研究方程 (2) 周期解存在所需的假设条件。

[H₁] 存在常数 $d > 0$, 使得 $|f(t, u, v, w)| > |e|_0$, $(t, u, v, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$, $|u| > d$ 。

[H₂] 函数 f 满足 $|f(t, u, v, w)| \leq \alpha(t)|u|^{p-1} + \beta(t)|v|^{p-1} + \rho(t)|w|^{p-1}$, 这里 $\alpha(t), \beta(t), \rho(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$, $(t, u, v, w) \in [0, T] \times \mathbb{R}^3$ 。

[H₃] 存在连续函数 $\beta(t, u, v), g(t, u, w) \in C(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$, 使得 $|f(t, u, v, w)| \leq |\beta(t, u, v)| + |g(t, u, w)|$,

其中 $\lim_{|u| \rightarrow \infty} \frac{|\beta(t, u, v)|}{|v|^a} = r > 0$, $|g(t, u, w)| \leq c_1(t)|u|^b + c_2(t)|w|^c$, 当 $|u| > d_1$ 。这里 a, b, c, r 为

常数, $c_1(t), c_2(t) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ 。记 $\alpha_0 = \max_{t \in [0, T]} \alpha(t)$, $\beta_0 = \max_{t \in [0, T]} \beta(t)$, $\rho_0 = \max_{t \in [0, T]} \rho(t)$, $|e|_0 = \max_{t \in [0, T]} |e(t)|$,

$c_{10} = \max_{t \in [0, T]} c_1(t)$, $c_{20} = \max_{t \in [0, T]} c_2(t)$ 。

定理 1 假设条件 [H₁], [H₂] 成立, 则方程 (2) 至少存在一个 T -周期解, 若

$$(i) 2^{\frac{2}{p-1}} \varphi_p \left(\frac{\alpha_0 T^{2p} + \beta_0 T^{p+1} + \rho_0 T^2}{2} \right) < 1, 1 < p \leq 2; \varphi_p \left(\frac{\alpha_0 T^{2p} + \beta_0 T^{p+1} + \rho_0 T^2}{2} \right) < 1, p > 2;$$

$$(ii) u(f(t, u, v, w) - e(t)) > 0, |u| \leq d_0.$$

证明 定理的证明分为三部分。

第一步 令 $\Omega_1 = \{x \in \text{dom}M; Mx = N_\lambda x, \lambda \in (0, 1)\} \subset X$ 。下证 Ω_1 为有界集。若 $x \in \Omega_1$, 则 $Mx = N_\lambda x$, 即

$$(\varphi_p(x''(t)))'' = -\lambda f(t, x(t), x'(t), x''(t)) + \lambda e(t) \quad (5)$$

对上式从 0 到 T 上积分得

$$\int_0^T [f(t, x(t), x'(t), x''(t)) - e(t)] dt = 0 \quad (6)$$

故存在点 $\xi \in [0, T]$, 使得 $f(\xi, x(\xi), x'(\xi), x''(\xi)) = e(\xi)$ 。由条件 [H₁] 和 (6) 式, $|x(\xi)| \leq d_0$ 。故

$$|x|_0 = \max_{t \in [0, T]} |x(\xi) + \int_\xi^t x'(s) ds| \leq d + \int_0^T |x'(s)| ds \leq d + T|x'|_0 \quad (7)$$

$$|x'|_0 = \max_{t \in [0, T]} |x'(0) + \int_0^t x''(s) ds| \leq \int_0^T |x''(s)| ds \leq T|x''|_0 \quad (8)$$

将 (8) 代入 (7) 式可得

$$|x|_0 \leq d + T|x'|_0 \leq d + T^2|x''|_0 \quad (9)$$

另一方面，由方程 (5) 知，

$$\|x''\|_0 = \max_{t \in [0, T]} \left| \varphi_q \left(\int_{\eta}^t \int_{\eta}^s (\varphi_p(x''(u)))'' du ds \right) \right| \leq \varphi_q \left(\int_{\eta}^T \int_{\eta}^s |f(u, x(u), x'(u), x''(u))| du ds + \frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right) \quad (10)$$

情形 1 当 $q \geq 2, 1 < p \leq 2$ 时，结合引理 2 及条件 $[H_2]$ ，(10) 式可化为

$$\begin{aligned} \|x''\|_0 &\leq 2^{q-1} \left[\varphi_q \left(\int_{\eta}^T \int_{\eta}^s |f(u, x(u), x'(u), x''(u))| du ds \right) + \varphi_q \left(\frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right) \right] \leq \\ &2^{q-1} \left[\varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^2}{2} \|x\|_0^{p-1} + \frac{\beta_0 T^2}{2} \|x'\|_0^{p-1} + \frac{\rho_0 T^2}{2} \|x''\|_0^{p-1} \right) + \varphi_q \left(\frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

将 (8)，(9) 式代入 (11) 式得，

$$\|x''\|_0 \leq 2^{q-1} \left[\varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^2}{2} (d + T^2 \|x''\|_0)^{p-1} + \frac{\beta_0 T^2}{2} T^{p-1} \|x''\|_0^{p-1} + \frac{\rho_0 T^2}{2} \|x''\|_0^{p-1} \right) + \varphi_q \left(\frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right) \right] \quad (12)$$

当 $1 < p \leq 2$ 时，有 $(1+x)^{p-1} \leq 1+px, x \in [0, \infty)$ ，则

$$(d + T^2 \|x''\|_0)^{p-1} \leq T^{2(p-1)} \|x''\|_0^{p-1} + pdT^{2(p-2)} \|x''\|_0^{p-2} \quad (13)$$

将 (13) 式代入 (12) 式可得，

$$\|x''\|_0 \leq 2^{\frac{2}{p-1}} \left[\varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^{2p} + \beta_0 T^{p+1} + \rho_0 T^2}{2} \right) \|x''\|_0 + \varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^{2(p-1)} dp}{2} \right) \|x''\|_0^{3-q} \right] + 2^{q-1} \varphi_q \left(\frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right)$$

由条件 (i) 及 $q \geq 2$ ，故存在某一正常数 L_1 ，使得 $\|x''\|_0 < L_1$ 。

情形 2 当 $1 < q < 2, p > 2$ 时，由引理 2 及条件 $[H_2]$ ，(10) 式可化为

$$\|x''\|_0 \leq \varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^2}{2} \|x\|_0^{p-1} + \frac{\beta_0 T^2}{2} \|x'\|_0^{p-1} + \frac{\rho_0 T^2}{2} \|x''\|_0^{p-1} \right) + \varphi_q \left(\frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right) \quad (14)$$

将 (8)，(9) 式代入 (14) 式有

$$\|x''\|_0 \leq \varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^2}{2} (d + T^2 \|x''\|_0)^{p-1} + \frac{\beta_0 T^2}{2} T^{p-1} \|x''\|_0^{p-1} + \frac{\rho_0 T^2}{2} \|x''\|_0^{p-1} \right) + \varphi_q \left(\frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right) \quad (15)$$

当 $p > 2$ 时，有 $(1+x)^{p-1} \leq 1+px, x \in [0, h(p)]$ ，其中 $h(p) = \left(\frac{p}{p-1}\right)^{\frac{1}{p-2}} - 1$ 为仅与 p 有关的常数。故

(A) 当 $\frac{d}{T^2 \|x''\|_0} \geq h(p)$ 时，有 $\|x''\|_0 \leq \frac{d}{T^2 h(p)}$ 成立。

(B) 当 $\frac{d}{T^2 \|x''\|_0} < h(p)$ 时，有

$$(d + T^2 \|x''\|_0)^{p-1} = T^{2(p-1)} \|x''\|_0^{p-1} \left(1 + \frac{d}{T^2 \|x''\|_0} \right)^{p-1} \leq T^{2(p-1)} \|x''\|_0^{p-1} + pdT^{2(p-2)} \|x''\|_0^{p-2} \quad (16)$$

将 (16) 代入 (15) 得，

$$\|x''\|_0 \leq \varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^{2p} + \beta_0 T^{p+1} + \rho_0 T^2}{2} \right) \|x''\|_0 + 2^{2(q-1)} \varphi_q \left(\frac{\alpha_0 pdT^{2(p-1)}}{2} \right) \|x''\|_0^{2-q} + \varphi_q \left(\frac{\|e\|_0 T^2}{2} \right)$$

由 $q > 2$ 及条件 (i) $\varphi_q \left(\frac{\alpha_0 T^{2p} + \beta_0 T^{p+1} + \rho_0 T^2}{2} \right) < 1$ ，存在常数 L_2 ，使得 $\|x''\|_0 < L_2$ 。结合情形 1 和情形 2，

令 $L_3 := \max \left\{ L_1, L_2, \frac{d}{T^2 h(p)} \right\}$ ，故对任意的 $x \in \Omega_1, \|x\| < \max \{ d + T^2 L_3, TL_3, L_3 \} + 1 := L_0$ 。

第二步 令 $\Omega_2 = \{x \in \text{Ker}M : QNx = 0\}$ 。下证 Ω_2 为有界集。对任意的 $x \in \Omega_2$ ，存在常数 $a_0 \in \mathbb{R}$ ，使得 $x = a_0$ 。则 $\int_0^T [f(t, a_0, 0, 0) - e(t)] dt = 0$ 。由 $[H_1]$ 可知 $|a_0| < d$ 。故 Ω_2 为有界集。

第三步 令 $\Omega = \{x \in X : \|x\| < L\}$ ，则 $\Omega_1 \cup \Omega_2 \subset \Omega, (x, \lambda) \in \partial\Omega \times (0, 1)$ 。由前两步的证明，引理 1 中的条件 $(h_1), (h_2)$ 显然满足。下证 (h_3) 满足。取同伦映射

$$H(x, \mu) = \mu x + (1 - \mu)JQNx, x \in \bar{\Omega}, \mu \in [0, 1]$$

其中 $J: \text{lm}Q \rightarrow \text{Ker}M, Jx = x, x \in \bar{\Omega}$ 。又因为对任意的 $x \in \partial\Omega \cap \text{Ker}M$ ，有 $x = a_0, |a_0| = L > L_1$ ，故

$$a_0 H(x, \mu) = \mu a_0^2 - (1 - \mu) \int_0^T a_0 [f(t, a_0, 0, 0) - e(t)] dt$$

由条件 (ii), $x(f(t, x, x', x'') - e(t)) < 0, |x| > d$, 显然 $H(x, \mu) \neq 0$ 。由度理论知

$$\begin{aligned} \deg(JQNx, \Omega \cap \text{Ker}M, 0) &= \deg(H(x, 0), \Omega \cap \text{Ker}M, 0) = \\ \deg(H(x, 1), \Omega \cap \text{Ker}M, 0) &= \deg(x, \Omega \cap \text{Ker}M, 0) \neq 0 \end{aligned}$$

由引理 1, 方程 (2) 至少存在一个周期解。定理证毕。

定理 2 假设条件 $[H_1], [H_3]$ 成立, 则方程 (2) 至少存在一个 T -周期解, 若

(i) $b > c$, 且 $\frac{a+b}{p-1} \leq 1$ 。

(ii) $2^{3(q-1)} \varphi_q(c_{10}(r+\varepsilon)T^{a+2b+2}) < 1$, 当 $\frac{a+b}{p-1} = 1, 1 < p \leq 2$; $\varphi_q(c_{10}(r+\varepsilon)T^{a+2b+2}) < 1$, 当 $\frac{a+b}{p-1} = 1, p > 2$ 。

(ii) $u(f(t, u, v, w) - e(t)) > 0, |u| \leq d$ 。

证明 由定理 1 可知 (10) 式成立。

情形 1 当 $q \geq 2, 1 < p \leq 2$ 时, 结合引理 2 及条件 $[H_3]$, 存在常数 $d_2, \varepsilon > 0$ 使得当 $|x| > d_2$ 时有

$$|\beta(t, x, x')| = (r + \varepsilon) |x'|^a \quad (17)$$

取 $D = \max\{d_1, d_2\}$, 令 $E_1 = \{t \in [0, T] \mid |x(t)| > D\}, E_2 = \{t \in [0, T] \mid |x(t)| \leq D\}$ 。结合引理 2, (10) 式可化为

$$\begin{aligned} |x''|_0 &\leq 2^{q-1} \left[\varphi_q \left(\int_{\eta}^T \int_{\eta}^s |f(u, x(u), x'(u), x''(u))| \, dud s \right) + \varphi_q \left(\frac{|e|_0 T^2}{2} \right) \right] = \\ &2^{2(q-1)} \varphi_q \left(\iint_{E_1} |f| \, dud s \right) + 2^{2(q-1)} \varphi_q \left(\iint_{E_2} |f| \, dud s \right) + 2^{q-1} \varphi_q \left(\frac{|e|_0 T^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

由条件 $[H_3]$ 及 (17)

$$\iint_{E_1} |f| \, dud s \leq T^2 (r + \varepsilon) (c_{10} |x|_0^b |x'|_0^a + c_{20} |x'|_0^a |x''|_0^c) \quad (19)$$

结合式 (8), (9) 可知

$$|x'|_0^a |x''|_0^c \leq T^a |x''|_0^{a+c} \quad (20)$$

$$|x|_0^b |x'|_0^a \leq T^a |x''|_0^a (d + T^2 |x''|_0)^b \quad (21)$$

(S₁) 当 $b \geq 1$ 时, 有经典不等式 $(1+x)^b < 1 + (b+1)x, x \in (0, h(b))$ 成立, 其中 $h(b)$ 为仅与 b 有关的常数。由 $(d + T^2 |x''|_0)^b = T^{2b} |x''|_0^b \left(1 + \frac{d}{T^2 |x''|_0}\right)^b$, 若 $\frac{d}{T^2 |x''|_0} \geq h(b)$, 则有 $|x''|_0 \leq \frac{d}{T^2 h(b)}$ 。若

$\frac{d}{T^2 |x''|_0} < h(b)$, 则有

$$\left(1 + \frac{d}{T^2 |x''|_0}\right)^b < 1 + \frac{(b+1)d}{T^2 |x''|_0} \quad (22)$$

(S₂) 当 $0 < b < 1$ 时, 经典不等式 $(1+x)^b < 1 + (b+1)x, x \in (0, \infty)$ 成立, 则同样有 (22) 式成立。将 (22) 式代入 (21) 可知

$$|x|_0^b |x'|_0^a < T^a |x''|_0^a T^{2b} |x''|_0^b \left(1 + \frac{(b+1)d}{T^2 |x''|_0}\right) = T^{a+2b} |x''|_0^{a+b} + T^{a+2b-2} (b+1)d |x''|_0^{a+b-1} \quad (23)$$

将 (20), (23) 式代入 (19) 式

$$\begin{aligned} \iint_{E_1} |f| \, dud s &\leq T^2 (r + \varepsilon) (c_{10} |x|_0^b |x'|_0^a + c_{20} |x'|_0^a |x''|_0^c) \leq \\ &c_{10} (r + \varepsilon) T^{a+2b+2} |x''|_0^{a+b} + c_{10} (r + \varepsilon) (b+1)d T^{a+2b} |x''|_0^{a+b-1} + c_{20} T^{2+a} (r + \varepsilon) |x''|_0^{a+c} \end{aligned} \quad (24)$$

$$\iint_{E_2} |f| \, dud s \leq \int_0^T \int_0^T \beta_A g_A \, dud s = \beta_A g_A T^2 \quad (25)$$

将 (24), (25) 代入 (18) 式, 整理后可得

$$|x''|_0 \leq A |x''|_0^{\frac{a+b}{b-1}} + B |x''|_0^{\frac{a+b-1}{b-1}} + C |x''|_0^{\frac{a+c}{b-1}} + Q$$

这里 $A = 2^{3(q-1)} \varphi_q(c_{10}(r+\varepsilon)T^{a+2b+2}), B = 2^{4(q-1)} \varphi_q(c_{10}(r+\varepsilon)(b+1)dT^{a+2b}),$

$$C = 2^{4(q-1)} \varphi_q(c_{20} T^{2+a}(r + \varepsilon)), Q = 2^{2(q-1)} \varphi_q(\beta_A \beta_A T^2) + 2^{q-1} \varphi_q\left(\frac{|e|_0 T^2}{2}\right).$$

结合条件 (i), (ii) 可知, 存在某一正常数 M 使得 $|x''|_0 < M$.

情形 2 当 $1 < q < 2, p > 2$ 时, 由引理 2 及条件 $[H_3]$, (10) 式可化为

$$|x''|_0 \leq \varphi_q\left(\iint_{E_1} |f| \, dudv + \iint_{E_2} |f| \, dudv\right) + \varphi_q\left(\frac{|e|_0 T^2}{2}\right) \leq \varphi_q\left(\iint_{E_1} |f| \, dudv\right) + \varphi_q\left(\iint_{E_2} |f| \, dudv\right) + \varphi_q\left(\frac{|e|_0 T^2}{2}\right)$$

同样有 (19) - (25) 成立, 故有

$$|x''|_0 \leq A_1 |x''|_0^{\frac{a+b}{p-1}} + B_1 |x''|_0^{\frac{a+b-1}{p-1}} + C_1 |x''|_0^{\frac{a+c}{p-1}} + Q_1$$

其中 $A_1 = \varphi_q(c_{10}(r + \varepsilon) T^{a+2b+2})$, $B_1 = \varphi_q(c_{10}(r + \varepsilon)(b + 1) d T^{a+2b})$, $C_1 = \varphi_q(c_{20} T^{2+a}(r + \varepsilon))$, $Q_1 = \varphi_q(\beta_A \beta_A T^2) + \varphi_q\left(\frac{|e|_0 T^2}{2}\right)$. 结合条件 (i), (ii) 可知存在某一正常数 N 使得 $|x''|_0 < N$. 令 $L_3 =$

$\max\left\{M, N, \frac{d}{T^2 h(b)}\right\}$, 故对任意的 $x \in \Omega_1$, $\|x\| < \max\{d + T^2 L_3, T L_3, L_3\} + 1 = L$. 结合定理 1 知, 方程

(2) 至少存在一个 T -周期解。

例 1 考虑方程

$$(\varphi_p(x''(t)))'' + \frac{e^{\sin t-1}}{(2\pi)^{2p}} x^{p-1} = 0 \quad (26)$$

这里 $p > 2$ 为偶数, 取 $f(t, x(t), x'(t), x''(t)) = \frac{e^{\sin t-1}}{(2\pi)^{2p}} x^{p-1}$, $e(t) = 0$, $T = 2\pi$, $\beta(t) = \rho(t) = 0$, $\alpha(t) = \frac{e^{\sin t-1}}{(2\pi)^{2p}}$. 则 $\alpha_0 = \frac{1}{(2\pi)^{2p}}$. 显然 (26) 满足定理 1 中的条件, 因此方程 (26) 至少有一个 2π -周期解。

参考文献:

- [1] GAINES R E, MAWHIN J L. Coincidence degree and Nonlinear differential equations [M]. Berlin: Springer, 1997.
- [2] CHEUNG W S, REN J L. On the existence of periodic solutions for p -Laplacian generalized Liénard equation [J]. Nonlinear Analysis, 2005, 60: 65 - 75.
- [3] LU S P. New results on the existence of periodic solutions to a p -Laplacian differential equation with a deviating [J]. J Math Anal Appl, 2007, 336: 1107 - 1123.
- [4] WANG Z Y, ZHANG J H. Periodic solutions of non-autonomous second order systems with p -Laplacian [J]. Electronic J Differential Equations, 2009, 17: 1 - 12.
- [5] MENG J X. Positive periodic solutions for Liénard type p -Laplacian equations [J]. Electronic J Differential Equations, 2009, 39: 1 - 7.
- [6] LU S P, GUI Z J. On the existence of periodic solutions to p -Laplacian Rayleigh differential equation with a delay [J]. J Math Anal Appl, 2007, 325: 685 - 702.
- [7] GAO F B, LU S P. Periodic solutions for a Rayleigh type equation with a variable coefficient ahead of the nonlinear term [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10: 254 - 258.
- [8] GE W G, REN J L. An extension of Mawhin's continuous theorem and its application to boundary value problems with a p -Laplacian [J]. Nonlinear Analysis, 2004, 58: 477 - 488.
- [9] DU B, ZHAO X K. A new method for the existence of periodic solution to a p -Laplacian Liénard equation [J]. J Appl Math Comput, 2009, 29: 481 - 490.
- [10] YANG A J, GE W G. Existence of symmetric solutions for a fourth-order multi-point boundary value problem with a p -Laplacian at resonance [J]. J Appl Math Comput, 2009, 29: 301 - 309.
- [11] 汪一高, 鲁世平. 一类三阶泛函微分方程周期解的存在唯一性 [J]. 数学研究, 2009, 42: 58 - 62.
- [12] ZHU Y L, LU S P. Periodic solutions for p -Laplacian neutral functional differential equation with multiple deviating arguments [J]. J Math Anal Appl, 2007, 336: 1357 - 1367.
- [13] DU B, HU X P. Periodic solutions for a kind of duffing type p -Laplacian neutral equation [J]. Acta Appl Math, 2009, 0167 - 8019 (Print): 1572 - 9036.
- [14] 葛渭高. 非线性常微分方程边值问题 [M]. 北京: 科学出版社, 2007.