非均匀 Chemostat 竞争模型的周期解*

王利娟[1,2]，姜洪领[2]
（1. 陕西师范大学 数学与信息科学学院，陕西 西安 710062；
2. 宝鸡文理学院 数学系，陕西 宝鸡 721013）

摘 要：讨论非均匀 Chemostat 竞争模型半平凡周期解的存在性、稳定性及其正周期解的存在性。通过运用抛物型方程比较原理、稳定性理论、极值原理以及 Leray-Schauder 度理论，证明了该系统半平凡周期解的存在性和稳定性，得到了该系统正周期解存在的充分条件。

关键词：Chemostat；稳定性；度理论；周期解
中图分类号：O175.26 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2010）03-0012-06

Periodic Solution for the Competition Model in the Unstirred Chemostat

WANG Lijuan[1,2], *JIANG Hongling*[2]

（1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China；
2 Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China）

Abstract: The existence and stability of semi-trivial periodic solutions and the existence of positive periodic solutions for the competition model in an unstirred chemostat are discussed. By using comparison theorems for parabolic equation, stability theory, the maximum principle and the theory of Leray-Schauder degree, the existence and stability of semi-trivial periodic solutions to the system are proved. The sufficient conditions of existence of positive periodic solutions to the system are obtained.

Key words: Chemostat; stability; theory of degree; periodic solution

目前，非均匀 Chemostat 模型得到了广泛的研究，这些研究主要是利用极值原理、分歧理论分析解的存在性、稳定性、解分支以及解的渐近行为[1-3]。研究较多的模型如下

$$\begin{cases} S_t = d\Delta S - u_1 f_1(S) - u_2 f_2(S) \\ u_{1t} = d\Delta u_1 + u_1 f_1(S), \quad x \in \Omega, t > 0 \\ u_{2t} = d\Delta u_2 + u_2 f_2(S) \end{cases} \tag{1}$$

边界条件

$$\frac{\partial S}{\partial n} + b(x)S = h(x), \frac{\partial u_1}{\partial n} + b(x)u_1 = 0$$
$$\frac{\partial u_2}{\partial n} + b(x)u_2 = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \tag{2}$$

其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geqslant 1)$ 是有界区域，并具有光滑边界 $\partial\Omega$，d 是扩散系数，$b(x), h(x)$ 在 $\partial\Omega$ 上连续，且 $x \in \partial\Omega$ 时，$b(x), h(x) \geqslant 0, b(x), h(x) \not\equiv 0$，$S$ 代表营养液的浓度，u_1, u_2 分别代表两个竞争物种的浓度，f_1, f_2 分别是两竞争物种的生长率。文献［2］运用局部分歧理论讨论了一维空间中方程（1）-（2）局部解的存在性。文献［3］利用全局分歧理论得到了方程（1）-（2）在 N 维空间正解存在的充分条件。文献［4］讨论了一类质粒载体微生物和质粒自由微生物（plasmid-bearing and plasmid-free organisms）之间竞争的 Chemostat 模型，得到了平衡态正解的存在性和稳定性。文献［5］研究

* 收稿日期：2009-04-22
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10571115）；教育部高等学校博士点基金资助项目（200807180004）；宝鸡文理学院重点资助项目（ZK0691，ZK0688）
作者简介：王利娟（1982 年生），女，讲师，博士生；E-mail：lijuanw82@163.com

了带有抑制剂的 Chemostat 模型，得到了系统解的稳定性和渐近行为，讨论了抑制剂对解的稳定性和渐近行为的影响。在此基础上，文献［6］讨论了在有抑制剂的情况下，系统存在正解时，两物种最大生长率的取值范围。

本文研究系统（1）－（2）在扩散率不同且考虑死亡率的情况下所对应的周期系统

$$\begin{cases} S_t = d_0\Delta S - u_1 f_1(S) - u_2 f_2(S) \\ u_{1t} = d_1\Delta u_1 + u_1(f_1(S) - k_1), \ x \in \Omega, t > 0 \\ u_{2t} = d_2\Delta u_2 + u_2(f_2(S) - k_2) \end{cases} \quad (3)$$

边界条件为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial n} + b_0(x,t)S = S^0(x,t) \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n} + b_1(x,t)u_1 = 0, \quad x \in \partial\Omega, t > 0 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial n} + b_2(x,t)u_2 = 0 \end{cases} \quad (4)$$

初始条件为

$$S(x,0) = S_0(x)$$
$$u_i(x,0) = u_{i0}(x), i = 1,2, \quad x \in \overline{\Omega} \quad (5)$$

其中 d_0 是营养液 S 的扩散系数，$d_i(i=1,2)$ 是微生物 u_i 的扩散系数，k_i 代表微生物 u_i 的死亡率，初值 $S_0(x) \geqslant 0, u_{i0}(x) \geqslant 0$。另外，我们假设 $b_j(j=0,1,2)$，S^0 是关于时间 t 的周期函数，周期为 $\omega > 0$，即 $b_j(x,t+\omega) = b_j(x,t)$，$S^0(x,t+\omega) = S^0(x,t)$。这表明营养液 S 以关于时间 t 为周期的速率被输入反应器，关于边界条件详细的解释参看文献［1－2］。通过运用抛物型算子理论[7]，周期映射以及 Leray-Schauder 度理论得到了系统（3）－（4）半平凡周期解的存在性、稳定性和正周期解存在的充分条件。

1　半平凡周期解

记 $Q = \Omega \times \mathbb{R}$，$C_\omega^k(\overline{Q}) = \{u(x,t): u(x,t) \in C^k(\overline{Q}), u(x,t) = u(x,t+\omega)\}$，$b_j(j=0,1,2)$，$S^0 \in C_\omega^1(\overline{Q})$ 且 $b_j(x,t) > 0, S^0(x,t) \geqslant 0, S^0(x,t) \not\equiv 0$，令 $X^+ = C(\Omega,\mathbb{R}_+) \times C(\Omega,\mathbb{R}_+) \times C(\Omega,\mathbb{R}_+)$。另外，我们假设 $f_i \in C^2(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$，$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty)$ 满足 $f_i(0) = 0, \forall s \geqslant 0, f'_i(s) > 0 (i=1,2)$。

首先考虑方程

$$\begin{cases} S_t = d_0\Delta S, & x \in \Omega \\ \dfrac{\partial S}{\partial n} + b_0(x,t)S = S^0(x,t), & x \in \partial\Omega \\ S(x,0) = S_0(x), & x \in \overline{\Omega} \end{cases} \quad (6)$$

正周期解的性质。

引理 1[8]　方程（6）存在一个惟一稳定的 ω－正周期解 $S^*(x,t)$，且其余的解 $S(x,t)$ 都满足

$$\| S(x,t) - S^*(x,t) \|_{C(\overline{\Omega})} = O(e^{-\alpha t}),$$
$$t \to +\infty, \alpha > 0$$

由引理 1 易知 $(S^*(x,t),0,0)$ 是（3）－（4）的一个非负周期解。为了讨论其稳定性，考虑两个周期特征值问题：

$$\begin{cases} \varphi_t = d_1\Delta\varphi + (f_1(S) - k_1)\varphi + \mu\varphi, & x \in \Omega, \ t > 0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial n} + b_1(x,t)\varphi = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ \varphi \in C_\omega^{2,1}(\overline{Q}) \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} \phi_t = d_2\Delta\phi + (f_2(S) - k_2)\phi + \mu\phi, & x \in \Omega, \ t > 0 \\ \dfrac{\partial\phi}{\partial n} + b_2(x,t)\phi = 0, & x \in \partial\Omega, \ t > 0 \\ \phi \in C_\omega^{2,1}(\overline{Q}) \end{cases} \quad (8)$$

令 $\mu_1(f_1(S) - k_1), \mu_2(f_2(S) - k_2)$ 分别是（7），（8）的惟一主特征值。下面定理 1 表明如果周期解 $(S^*(x,t),0,0)$ 线性渐近稳定，那么它是全局稳定的，而如果 $(S^*(x,t),0,0)$ 不稳定，那么系统（3）－（4）有一个半平凡的解。

定理 1

(i) 若 $\mu_1(f_1(S^*) - k_1) > 0, \mu_2(f_2(S^*) - k_2) > 0$，那么对于任意初值 $\phi = (S_0, u_{10}, u_{20})$，$\lim\limits_{t\to\infty}(S(x,t;\phi) - S^*(x,t), u_1(x,t;\phi), u_2(x,t;\phi)) = (0,0,0)$ 对于 $x \in \Omega$ 一致成立。

(ii) 若 $\mu_1(f_1(S^*) - k_1) < 0$，那么系统（3）－（4）有一个半平凡 ω－周期解 $(\overline{S}(x,t), \overline{u}_1(x,t), 0)$。若 $\mu_2(f_2(S^*) - k_2) < 0$，那么系统（3）－（4）有一个半平凡 ω－周期解 $(\hat{S}(x,t), 0, \hat{u}_2(x,t))$。

证明

(i) 由于 $\mu_1(f_1(S^*) - k_1) > 0, \mu_2(f_2(S^*) - k_2) > 0$，所以存在 $\varepsilon_0 > 0$，使得

$$\mu_1(f_1(S^* + \varepsilon_0) - k_1) > 0$$
$$\mu_2(f_2(S^* + \varepsilon_0) - k_2) > 0$$

若 $(S(x,t;\phi), u_1(x,t;\phi), u_2(x,t;\phi))$ 是（3）－（5）的非负解，那么函数 $S(x,t;\phi)$ 满足

$$\begin{cases} S_t \leqslant d_0\Delta S, & x \in \Omega, t > 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial n} + b_0(x,t)S = S^0(x,t), & x \in \partial\Omega, t > 0 \\ S(x,0) = S_0(x), & x \in \overline{\Omega} \end{cases}$$

由抛物型方程比较定理得：$0 \leqslant S(x,t;\phi) \leqslant \tilde{S}(x,t)$，其中 $\tilde{S}(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\tilde{S}_t = d_0\Delta\tilde{S}, & x\in\Omega, t>0\\ \dfrac{\partial\tilde{S}}{\partial n}+b_0(x,t)\tilde{S}=S^0(x,t), & x\in\partial\Omega, t>0\\ \tilde{S}(x,0)=S_0(x), & x\in\bar{\Omega}\end{cases}$$

的解。根据引理 1，有

$$\lim_{t\to\infty}\|\tilde{S}(x,t)-S^*(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})}=0 \tag{9}$$

从而对于任意给定的 ε_0，存在 $t_{\varepsilon_0}\geqslant 0$ 使得 $S(x,t)\leqslant S^*(x,t)+\varepsilon_0, t\geqslant t_{\varepsilon_0}$。因此由文献［9］中的引理 5. 1（b）得

$$\begin{cases}u_{1t}\leqslant d_1\Delta u_1+u_1(f_1(S^*+\varepsilon_0)-k_1), t\geqslant t_{\varepsilon_0}\\ \lim\limits_{t\to\infty}\|u_1(x,t;\phi)\|_{C(\bar{\Omega})}=0\end{cases} \tag{10}$$

同理

$$\begin{cases}u_{2t}\leqslant d_2\Delta u_2+u_2(f_2(S^*+\varepsilon_0)-k_2), t\geqslant t_{\varepsilon_0}\\ \lim\limits_{t\to\infty}\|u_2(x,t;\phi)\|_{C(\bar{\Omega})}=0\end{cases} \tag{11}$$

再次运用抛物型方程比较定理，有

$$\tilde{S}_\varepsilon(x,t)\leqslant S(x,t;\phi), t\geqslant t_\varepsilon \tag{12}$$

其中 $\tilde{S}_\varepsilon(x,t)$ 是初值问题

$$\begin{cases}\tilde{S}_{\varepsilon t}=d_0\Delta\tilde{S}_\varepsilon-\varepsilon f_1(\tilde{S}_\varepsilon)-\varepsilon f_2(\tilde{S}_\varepsilon), & x\in\Omega, t>t_\varepsilon\\ \dfrac{\partial\tilde{S}_\varepsilon}{\partial n}+b_0(x,t)\tilde{S}_\varepsilon=S^0(x,t), & x\in\partial\Omega, t>t_\varepsilon\\ \tilde{S}_\varepsilon(x,t_\varepsilon)=S(x,t_\varepsilon;\phi), & x\in\bar{\Omega}\end{cases}$$

的解。另外，对于充分大的 t，$\tilde{S}_\varepsilon(x,t)\leqslant S^*(x,t)$，从而 $\varepsilon\to 0$ 时，$\forall(x,t)\in Q$，$\varepsilon f_1(\tilde{S}_\varepsilon(x,t))\to 0$ 一致成立。因此，根据文献［10］中的引理 4.2 得

$$\forall k>0, t\in[\omega,k\omega],$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\tilde{S}_\varepsilon(x,t)-\tilde{S}(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})}=0 \tag{13}$$

一致成立。结合（9）－（13）得 $\forall x\in\bar{\Omega}$，

$$\lim_{t\to\infty}(S(x,t;\phi)-S^*(x,t), u_1(x,t;\phi), u_2(x,t;\phi))=(0,0,0)$$

一致成立。

（ii）令 $u_2(x,t)=0$，则系统（3）－（4）简化为

$$\begin{cases}S_t=d_0\Delta S-u_1f_1(S), & x\in\Omega, t>0\\ u_{1t}=d_1\Delta u_1+u_1(f_1(S)-k_1), & x\in\Omega, t>0\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}+b_0(x,t)S=S^0(x,t), & x\in\partial\Omega, t>0\\ \dfrac{\partial u_1}{\partial n}+b_1(x,t)u_1=0, & x\in\partial\Omega, t>0\end{cases} \tag{14}$$

令 $u_1(x,t)=0$，则系统（3）－（4）简化为

$$\begin{cases}S_t=d_0\Delta S-u_2f_2(S), & x\in\Omega, t>0\\ u_{2t}=d_2\Delta u_2+u_2(f_2(S)-k_2), & x\in\Omega, t>0\\ \dfrac{\partial S}{\partial n}+b_0(x,t)S=S^0(x,t), & x\in\partial\Omega, t>0\\ \dfrac{\partial u_2}{\partial n}+b_2(x,t)u_2=0, & x\in\partial\Omega, t>0\end{cases} \tag{15}$$

对（14）、（15）解的存在性证明可以参看文献［8］。定理 1 证毕。

令 $u_0(x,t)=S^*(x,t)-S(x,t)$，那么系统（3）－（4）变换为

$$\begin{cases}u_{0t}=d_0\Delta u_0+u_1\hat{f}_1(S^*-u_0)+u_2\hat{f}_2(S^*-u_0)\\ u_{1t}=d_1\Delta u_1+u_1(\hat{f}_1(S^*-u_0)-k_1), \quad x\in\Omega, t>0\\ u_{2t}=d_2\Delta u_2+u_2(\hat{f}_2(S^*-u_0)-k_2)\\ \dfrac{\partial u_j}{\partial n}+b_j(x,t)u_j=0, (j=0,1,2), \quad x\in\partial\Omega, t>0\end{cases} \tag{16}$$

其中 $\hat{f}_i(\cdot):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 $f_i(\cdot)(i=1,2)$ 的光滑延拓，$\hat{f}_i(0)=0$，$\forall x\in\mathbb{R}^+, f_i'(x)\geqslant 0$，$\hat{f}_i(x)=f_i(x)$。由于 $S(x,t)\geqslant 0$，因此（16）的任意正周期解 (u_0, u_1, u_2) 都满足 $u_0(x,t)\leqslant S^*(x,t)$，所以下面可以用 f_i 代替 $\hat{f}_i$。令

$$E=\{u(x,t):u\in C^{\alpha,\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})\quad u(x,t+\omega)=u(x,t)\}$$

$$E_+=\{u(x,t):u\in E, u(x,t)\geqslant 0\quad\forall(x,t)\in(\bar{\Omega}\times[0,\omega])\}$$

那么 E 是 Banach 空间，E_+ 为 E 的一个正锥。

对于任意给定的 $h\in E$，

$$\begin{cases}v_t=d_j\Delta v+h, & x\in\Omega, t\in\mathbb{R}\\ \dfrac{\partial v}{\partial n}+b_j(x,t)v=0(j=0,1,2), & x\in\partial\Omega\end{cases}$$

有惟一的 ω－周期解 $T_j(h)=v(x,t)\in Y$，其中

$$Y=\{u(x,t):u(x,t)\in C^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\bar{\Omega}\times[0,\omega]),\quad u(x,t+\omega)=u(x,t)\}$$

显然，系统（3）－（4）的每一个正 ω－周期解在锥 $E_+\times E_+\times E_+$ 上都对应紧算子 T 的一个不动点。令

$$T=\mathrm{diag}(T_0,T_1,T_2)(G_0,G_1,G_2)^{\mathrm{T}}$$

定义

$(G_0(U),G_1(U),G_2(U))=(u_1\hat{f}_1(S^*-u_0)+u_2\hat{f}_2(S^*-u_0), u_1(\hat{f}_1(S^*-u_0)-k_1), u_2(\hat{f}_2(S^*-u_0)-k_2))$，其中 $U=(u_0,u_1,u_2)\in E_+\times E_+\times E_+$。显然，$e_0=(0,0,0)$，$e_1=(S^*-\bar{S},\bar{u}_1,0)$，$e_2=(S^*-\hat{S},0,\hat{u}_2)$ 是算子 T 的不动点。

定理 2

（i）若 $\mu_2(f_2(\bar{S})-k_2)>0$，单物种周期解 $(\bar{S}(x,t),\bar{u}_1(x,t),0)$ 存在且惟一，那么当 $(\bar{S}(x,t),\bar{u}_1(x,t))$ 在 $C(\Omega,\mathbb{R}_+)\times C(\Omega,\mathbb{R}_+)$ 上线性稳定时，周期解 $(\bar{S}(x,t),\bar{u}_1(x,t),0)$ 是线性稳定的。

（ii）若 $\mu_1(f_1(\hat{S})-k_1)>0$，单物种周期解

$(\hat{S}(x,t),0,\hat{u}_2(x,t))$ 存在且惟一，那么当 $(\hat{S}(x,t),\hat{u}_2(x,t))$ 在 $C(\Omega,R_+)\times C(\Omega,R_+)$ 上线性稳定时，周期解 $(\hat{S}(x,t),0,\hat{u}_2(x,t))$ 是线性稳定的。

证明

$$T'(e_1)=\mathrm{diag}\left(\frac{\partial}{\partial t}-d_0\Delta,\frac{\partial}{\partial t}-d_1\Delta,\frac{\partial}{\partial t}-d_2\Delta\right)^{-1}\times\begin{pmatrix}-\bar{u}_1f'_1(\bar{S}) & f_1(\bar{S}) & f_2(\bar{S})\\ -\bar{u}_1f'_1(\bar{S}) & f_1(\bar{S})-k_1 & 0\\ 0 & 0 & f_2(\bar{S})-k_2\end{pmatrix}$$

记 $r=\mathrm{spr}(T'(e_1))$ 为 $T'(e_1)$ 的谱半径，对应特征函数 $(h,p,l)\in E_+\times E_+\times E_+$ 使得

$$\begin{cases}h_t=d_0\Delta h-\dfrac{1}{r}(\bar{u}_1f'_1(\bar{S})h-f_1(\bar{S})p-f_2(\bar{S})l)\\ p_t=d_1\Delta p+\dfrac{1}{r}(-\bar{u}_1f'_1(\bar{S})h+(f_1(\bar{S})-k_1)p)\\ \dfrac{\partial h}{\partial n}+b_0(x,t)h=0,\dfrac{\partial p}{\partial n}+b_1(x,t)p=0\end{cases}\tag{17}$$

和

$$\begin{cases}l_t=d_2\Delta l+\dfrac{1}{r}(f_2(\bar{S})-k_2)l\\ \dfrac{\partial l}{\partial n}+b_2(x,t)l=0\end{cases}\tag{18}$$

若 $l\neq 0$，由 $\mu_2(f_2(\bar{S})-k_2)>0$，得 $r<1$。

若 $l\equiv 0$，则（17）变为

$$\begin{cases}h_t=d_0\Delta h-\dfrac{1}{r}(\bar{u}_1f'_1(\bar{S})h-f_1(\bar{S})p)\\ p_t=d_1\Delta p+\dfrac{1}{r}(-\bar{u}_1f'_1(\bar{S})h+(f_1(\bar{S})-k_1)p)\\ \dfrac{\partial h}{\partial n}+b_0(x,t)h=0,\dfrac{\partial p}{\partial n}+b_1(x,t)p=0\end{cases}$$

由于 $(\bar{S},\bar{u}_1)$ 稳定，所以 $r<1$，故 $r=\mathrm{spr}(T'(e_1))<1$。又由于单物种周期解 $(\bar{S}(x,t),\bar{u}_1(x,t),0)$ 惟一，从而 $(\bar{S}(x,t),\bar{u}_1(x,t),0)$ 是线性稳定的。同理可证（ii）。定理 2 证毕。

2　正周期解的存在性

为了得到（3）－（4）的正周期解，首先引入下面两个引理。

引理 2　若 $\mu_1(f_1(S^*)-k_1)<0,\mu_2(f_2(S^*)-k_2)\neq 0$ 或 $\mu_1(f_1(S^*)-k_1)\neq 0,\mu_2(f_2(S^*)-k_2)<0$，那么 1 不是 $T'(e_0)$ 的特征值，且 $T'(e_0)$ 有一个大于 1 的特征值，对应的特征函数属于 $E_+\times E_+\times E_+$。

证明　设 λ 是 $T'(e_0)$ 的特征值，对应特征函数为 (h,p,l)，那么

$$\begin{cases}h_t-d_0\Delta h=\lambda^{-1}(f_1(S^*)p+f_2(S^*)l)\\ p_t-d_1\Delta p=\lambda^{-1}(f_1(S^*)-k_1)p\\ l_t-d_2\Delta l=\lambda^{-1}(f_2(S^*)-k_2)l\end{cases}$$

并具有相应的齐次边界条件。

若 $\lambda=1$，由 $\mu_1(f_1(S^*)-k_1)\neq 0,\mu_2(f_2(S^*)-k_2)\neq 0$，得 $p\equiv 0,l\equiv 0$，从而 $h\equiv 0$，矛盾，故 1 不是 $T'(e_0)$ 的特征值。由 $\mu_1(f_1(S^*)-k_1)<0$ 知，存在 $\tilde{\lambda}>1$ 为上述方程组中第二式的特征值，对应特征函数仍记为 p，则 $\tilde{\lambda}>1$ 是 $T'(e_0)$ 的特征值，对应特征函数为 $(h,p,0)$，其中 $h=\left(\dfrac{\partial}{\partial t}-d_0\Delta\right)^{-1}(\tilde{\lambda}^{-1}f_1(S^*)p)$。

若 $\mu_1(f_1(S^*)-k_1)\neq 0,\mu_2(f_2(S^*)-k_2)<0$，同理可得结论成立。引理 2 证毕。

由引理 2 和文献［11］中引理 13.1（ii）得 $\mathrm{index}(T,e_0)=0$。

令 μ 是

$$\begin{cases}-\Delta\psi=\mu\psi, & x\in\Omega,t>0\\ \dfrac{\partial\psi}{\partial n}+b(x)\psi=0, & x\in\partial\Omega,t>0\end{cases}$$

的主特征值，对应主特征函数 $\psi>0$，其中 $b(x)=\min_{0\leqslant j\leqslant 2,t\in[0,\omega]}\{b_j(x,t)\}$。

引理 3　存在一个常数 $R>0$ 使得

$$T(U)=\lambda U,\ \lambda\geqslant 1\tag{19}$$

在 $E_+\times E_+\times E_+$ 没有满足 $\|U\|=R$ 的解 U。

证明　方程（19）等价于

$$\begin{cases}u_{0t}-d_0\Delta u_0=\lambda^{-1}(f_1(S^*-u_0)u_1+f_2(S^*-u_0)u_2)\\ u_{1t}-d_1\Delta u_1=\lambda^{-1}(f_1(S^*-u_0)-k_1)u_1, & x\in\Omega,t>0\\ u_{2t}-d_2\Delta u_2=\lambda^{-1}(f_2(S^*-u_0)-k_2)u_2\end{cases}\tag{20}$$

并具有相应的齐次边界条件。

由于 $u_0\leqslant S^*$，则 $(S,u_1,u_2)=(S^*-u_0,u_1,u_2)$ 满足

$$\begin{cases}S_t-d_0\Delta S=-\lambda^{-1}(u_1f_1(S)+u_2f_2(S))\\ u_{1t}-d_1\Delta u_1=\lambda^{-1}u_1(f_1(S)-k_1), & x\in\Omega,t>0\\ u_{2t}-d_2\Delta u_2=\lambda^{-1}u_2(f_2(S)-k_2)\end{cases}\tag{21}$$

并具有相应的边界条件。

在方程组（21）两边同乘以 ψ 并在 Ω 上积分，得

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega S\psi\mathrm{d}x = -d_0\mu\int_\Omega S\psi\mathrm{d}x + d_0\int_{\partial\Omega}(S^0 - b_0S + bS)\psi\mathrm{d}s - \lambda^{-1}\int_\Omega(u_1f_1(S) + u_2f_2(S))\psi\mathrm{d}x\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_1\psi\mathrm{d}x = -d_1\mu\int_\Omega u_1\psi\mathrm{d}x + d_1\int_{\partial\Omega}(-b_1u_1 + bu_1)\psi\mathrm{d}s + \lambda^{-1}\int_\Omega u_1(f_1(S) - k_1)\psi\mathrm{d}x\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega u_2\psi\mathrm{d}x = -d_2\mu\int_\Omega u_2\psi\mathrm{d}x + d_2\int_{\partial\Omega}(-b_2u_2 + bu_2)\psi\mathrm{d}s + \lambda^{-1}\int_\Omega u_2(f_2(S) - k_2)\psi\mathrm{d}x\end{cases}$$

三式相加，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Omega(S + u_1 + u_2)\psi\mathrm{d}x \leqslant$$

$$-\min\{d_0,d_1,d_2\}\mu\int_\Omega(S + u_1 + u_2)\psi\mathrm{d}x + d_0\int_{\partial\Omega}S^0\psi\mathrm{d}s \leqslant$$

$$-\min\{d_0,d_1,d_2\}\mu\int_\Omega(S + u_1 + u_2)\psi\mathrm{d}x + C$$

其中 C 是不依赖(S,u_1,u_2) 的常数。由 $\int_\Omega(S(x,t) + u_1(x,t) + u_2(x,t))\psi(x)\mathrm{d}x$ 的周期性，存在 t_0 使得它能达到最大值，因此有

$$\int_\Omega(S(x,t_0) + u_1(x,t_0) + u_2(x,t_0))\mathrm{d}x \leqslant C_1 \quad (22)$$

其中 C_1 是不依赖(S,u_1,u_2) 的常数。

显然，$S(\cdot,t),u_1(\cdot,t),u_2(\cdot,t)$ 是 L^1 有界的。又 $S(x,t) \leqslant S^*(x,t)$，再利用嵌入定理得 u_1,u_2 是 C^1 有界的，那么存在常数 $R > 0$，使得 $\|u_i\| < R$，$i = 0,1,2$。引理3 证毕。

由文献［11］中引理12.1（i）可得：$\deg(T,P_R,0) = 1$，其中 $P_R = \{U \in E_+\times E_+\times E_+ : \|U\| < R\}$。

下面的定理3 给出了系统（3）–（4）的共存解。

定理3 若$\mu_1(f_1(\hat{S}) - k_1) < 0,\mu_2(f_2(\bar{S}) - k_2) < 0$ 且单物种周期解$(\bar{S}(x,t),\bar{u}_1(x,t),0)$ 和$(\hat{S}(x,t),0,\hat{u}_2(x,t))$ 分别惟一，则系统（3）–（4）至少有一个以 ω 为周期的共存解。

证明 由$\mu_1(f_1(\hat{S}) - k_1) < 0,\mu_2(f_2(\bar{S}) - k_2) < 0$ 得$\mu_1(f_1(S^*) - k_1) < 0,\mu_2(f_2(S^*) - k_2) < 0$。

考虑下面形式的方程组：

$$\begin{cases}u_{0t} - d_0\Delta u_0 = u_1f_1(S^* - u_0) + \gamma u_2f_2(S^* - u_0)\\ u_{1t} - d_1\Delta u_1 + k_1u_1 = u_1f_1(S^* - u_0), \qquad x \in \Omega\\ u_{2t} - d_2\Delta u_2 + k_2u_2 = u_2f_2(S^* - u_0)\end{cases} \quad (23)$$

并具有相应的齐次边界条件。当参数 $\gamma = 1$ 时即为方程组（16）。

将 $\gamma \in [0,1]$ 作为同伦参数，对应的不动点问题可以记为 $U = H(\gamma,U)$，显然 $H(1,U) = T(U)$。下面的讨论中假设 $T(U) = U$ 在 $P_R \setminus \bar{P}_r (r \ll 1)$ 中没有正解。

首先证明 $\mathrm{index}(T,e_1) = 0$。

记 $O = V\times W$ 是 e_1 在 $P_R \setminus \bar{P}_r$ 中的一个邻域，其中 V 是$(S^* - \bar{S},\bar{u}_1)$ 在 $E\times E$ 中的一个邻域，W 是0 在 E 中的一个小邻域。

若 $H(0,U) = U$ 有解 $U = (u_0,u_1,u_2) \in \partial O$，则 $u_1 \neq 0$，由单物种周期解的惟一性得 $(u_0,u_1) = (S^* - \bar{S},\bar{u}_1)$。若 $u_2 = 0$，那么 $U = e_1$，而 $e_1 \notin \partial O$（相对 $E_+\times E_+\times E_+$），所以 $u_2 > 0$，这与 $\mu_2(f_2(\bar{S}) - k_2) < 0$ 矛盾，故 $H(0,U) = U$ 在 ∂O 无解。

若存在 $\gamma \in (0,1]$ 使得 $H(\gamma,U) = U$ 有解 $U = (u_0,u_1,u_2) \in \partial O$，那么 $u_2 \neq 0$。事实上，若 $u_2 = 0$，则 $U = e_1 \notin \partial O$，所以 $u_2 > 0$，因此 $(u_0,u_1,\gamma u_2)$ 是 T 的一个正不动点，这与假设 $T(U) = U$ 没有正解矛盾。因此，由 Leray-Schauder 度的同伦不变性得

$$\mathrm{index}(T,e_1) = \mathrm{index}(H(1,\cdot),e_1) = \mathrm{index}(H(0,\cdot),e_1)$$

考虑参数方程：

$$\begin{cases}u_{0t} - d_0\Delta u_0 = u_1f_1(S^* - u_0)\\ u_{1t} - d_1\Delta u_1 + k_1u_1 = u_1f_1(S^* - u_0),\\ \qquad\qquad x \in \Omega, t > 0\\ u_{2t} - d_2\Delta u_2 + k_2u_2 =\\ \qquad u_2f_2(\gamma\bar{S} + (1-\gamma)(S^* - u_0))\end{cases} \quad (24)$$

并具有齐次边界条件。参数 $\gamma \in [0,1]$，利用不动点方法，系统（24）可变为 $G(\gamma,U) = U$。

若存在 $\gamma \in [0,1]$，$G(\gamma,U) = U$ 有解 $U = (u_0,u_1,u_2) \in \partial O$，显然 $(u_0,u_1) = (S^* - \bar{S},\bar{u}_1)$，从而由 $\mu_2(f_2(\bar{S}) - k_2) < 0$，得 $u_2 \equiv 0$，因此 $U = e_1 \notin \partial O$，矛盾。由 Leray-Schauder 度的同伦不变性得：$\mathrm{index}(T,e_1) = \mathrm{index}(H(0,\cdot),e_1) = \mathrm{index}(G(0,\cdot),e_1) = \mathrm{index}(G(1,\cdot),e_1)$。

$G(1,\cdot)$ 可以被看作映射 F_1 在 V 上和 F_2 在 W 上的乘积，满足边值问题

$$\begin{cases}u_{0t} - d_0\Delta u_0 = u_1f_1(S^* - u_0),\\ u_{1t} - d_1\Delta u_1 + k_1u_1 = u_1f_1(S^* - u_0),\end{cases} x \in \Omega, t > 0$$

和

$$u_{2t} - d_2\Delta u_2 + k_2 u_2 = u_2 f_2(\bar{S}), \qquad x \in \Omega, t > 0$$

并具有齐次边界条件。由 $(S^* - \bar{S}, \bar{u}_1)$ 的惟一性得 $\deg(F_1, V, 0) = \mathrm{index}(F_1, (S^* - \bar{S}, \bar{u}_1)) = 1$。由 $\mu_2(f_2(\bar{S}) - k_2) < 0$, 得 $\deg(F_2, W, 0) = \mathrm{index}(F_2, 0) = 0$。

事实上，由 $\mu_2(f_2(\bar{S}) - k_2) < 0$, 得 $\lambda_2(f_2(\bar{S})) < 1$, 其中 $\lambda_2(f_2(\bar{S}))$ 是特征值问题

$$\begin{cases} u_{2t} - d_2\Delta u_2 + k_2 u_2 = \lambda_2 u_2 f_2(\bar{S}), x \in \Omega \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial n} + b_2(x,t) u_2 = 0, \qquad x \in \partial\Omega \end{cases}$$

的主特征值。因此 $F'_2(0) = F_2$ 不以 1 为特征值且有一个特征值 $\lambda_2^{-1}(f_2(\bar{S})) > 1$。

由文献 [11] 中引理 13.1 (ii) 知 $\mathrm{index}(F_2, 0) = 0$。根据 Leray-Schauder 度理论的乘积定理[12]得

$$\mathrm{index}(T, e_1) = \deg(F_1, V, 0)\deg(F_2, W, 0) = 0$$

同理可证得 $\mathrm{index}(T, e_2) = 0$。由不动点指数加法性质和引理2、引理3 得，系统 (3) - (4) 至少有一个 ω - 周期解。定理3 证毕。

参考文献：

[1] SO J W H, WALTMAN P. A nonlinear boundary value problem arising from competition in the chemostat [J]. Appl Math Comput, 1989, 32: 169 - 183.

[2] HSU S B, WALTMAN P. On a system of reaction-diffusion equations arising from competition in an unstirred chemostat [J]. SIAM J Appl Math, 1993, 53: 1026 - 1044.

[3] WU J H. Global bifurcation of coexistence state for the competition model in the chemostat [J]. Nonlinear Analysis, 2000, 39: 817 - 835.

[4] WU J H, NIE H, WOLKOWICZ G S K. The effect of inhibitor on the plasmid-bearing and plasmid-free model in the unstirred chemostat [J]. SIAM J Math Anal, 2007, 38(6): 1860 - 1885.

[5] NIE H, WU J H. Asymptotic behavior of an unstirred chemostat model with internal inhibitor [J]. J Math Anal and Appl, 2007, 334(2): 889 - 908.

[6] NIE H, ZHANG H W, WU J H. Characterization of positive solutions of the unstirred Chemostat with an inhibitor [J]. Nonlinear Anal: Real World Appl, 2008, 9(3): 1078 - 1089.

[7] BELTRAMO A, HESS P. On the principal eigenvalue of a periodic-parabolic operator [J]. Communs Partial Diff Eqns, 1984, 9: 919 - 941.

[8] WANG Y F, YIN J X. Predator-prey in an unstirred chemostat with periodical input and washout [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2002, 3: 597 - 610.

[9] PILYUGIN S S, WALTMAN P. Competition in the unstirred chemostat with periodic input and washout [J]. SIAM J Appl Math, 1999, 59(4): 1157 - 1177.

[10] SMITH H L, ZHAO X Q. Dynamics of a periodically pulsed bio-reactor model [J]. J Differential Equations, 1999, 155: 368 - 404.

[11] AMANN H. Fixed point equations nonlinear eigenvalue problems in order Banach spaces [J]. SIAM Rev, 1976, 18: 620 - 709.

[12] ZEIDLER E. Nonlinear function analysis and its applications [M]. Vol I. New York: Springer, 1993.