

# 深梁动力响应分析的一种辛算法\*

章学军<sup>1,2</sup>, 黄伟江<sup>1,3</sup>, 罗恩<sup>1</sup>

(1. 中山大学应用力学与工程系, 广东 广州 510275; 2. 广东省建筑科学研究院, 广东 广州 510500;  
3. 广州市建筑科学研究院, 广东 广州 510440)

**摘要:** 根据古典阴阳互补和现代对偶互补的基本思想, 首次建立了线性阻尼情况下深梁动力学的相空间非传统 Hamilton 型变分原理。这种变分原理不仅能反映此类动力学初值—边值问题的全部特征, 而且它的欧拉方程具有辛结构的特征。基于该变分原理, 提出一种称为辛空间有限元—时间子域法的辛算法。这种新方法是由空间域采用有限元法与时间子域采用 Lagrange 插值多项式插值的时间子域法相结合而成。用这种辛算法分析了 4 种支承条件下深梁的动力响应问题。算例的计算结果表明, 这种新方法的稳定性、收敛性、计算精度和效率都明显高于国际上常用的 Wilson- $\theta$  法和 Newmark- $\beta$  法。

**关键词:** 相空间; 非传统 Hamilton 型变分原理; 初值—边值问题; 辛算法; 动力响应

**中图分类号:** O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2010)04-0033-05

## A Symplectic Algorithm for Dynamic Response Analysis of Timoshenko Beam

ZHANG Xuejun<sup>1,2</sup>, HUANG Weijiang<sup>1,3</sup>, LUO En<sup>1</sup>

(1. Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;  
2. Guangdong Provincial Academy of Building Research, Guangzhou 510500, China;  
3. Guangzhou Institute of Building Science, Guangzhou 510440, China)

**Abstract:** According to the basic idea of classical yin-yang complementarity and modern dual-complementarity, the unconventional Hamilton-type variational principle in phase space for dynamics of Timoshenko beam with linear damping is established, which can fully characterize the initial-boundary-value problem of this dynamics. And its Euler function has symplectic structure character. Based on this variational principle in phase space, a symplectic space finite element—time subdomain method is presented. This new method is the result of combining finite element method in space domain with time subdomain method by applying the Lagrange interpolation polynomials as approximation to the time subdomain. The numerical results show that the stability, convergence, computational accuracy and efficiency of this new method obviously improve those of widely used Wilson- $\theta$  and Newmark- $\beta$  methods.

**Key words:** phase space; unconventional Hamilton-type variational principle; initial-boundary-value problem; symplectic algorithm; dynamic response

建筑结构应进行动力分析, 以确保结构处于正常使用状态和安全可靠。时程积分是建筑结构动力分析的基本问题, 对于建筑结构在地震、风载、冲击荷载等作用下的响应都要进行时程积分的计算。

因此, 研究与发展一些高性能、高效率与高精度的时程积分法, 一直都是工程界和力学界研究的热点和难点。

长期以来, 建筑结构的动力响应分析所采用的

\* 收稿日期: 2009-07-28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10172097, 10772203)

作者简介: 章学军(1970年生), 男, 高级工程师, 博士研究生; 通讯作者: 罗恩; E-mail: luoenzsu@yahoo.com.cn

差分类算法存在明显的弊端,使计算结果产生较大误差。同时,建筑结构所用的较精确的力学模型的自由度都很多,计算工作量很大,计算时间很长。因此,动态时程积分法目前在实际工程中应用还有许多的困难。当前最重要的是首先解决动态时程分析法所存在的求解未知量很多、计算量很大和计算时间很长的问题,探寻求解未知量较少、计算工作量较小和计算时间较短的新的动态时程分析方法。

对于结构动力分析,在 Lagrange 体系内进行并不是最合理和最完美的选择,而最合理和最完美的选择应当是在 Hamilton 体系内进行。实质上,动力学体系本来就是 Hamilton 体系<sup>[1-6]</sup>。因此,将建筑结构动力分析从 Lagrange 体系改换到 Hamilton 体系内进行,才能建立比已有的非辛算法计算性能更好、精度与计算效率都更高的辛算法<sup>[7-8]</sup>。

深梁是重要的结构单元。随着厚壁结构和大型构件在建设工程广泛使用,深梁的分析引起工程界巨大的兴趣<sup>[9]</sup>。深梁动力学相空间非传统 Hamilton 型变分原理及动力响应分析的辛算法正可以显示 Hamilton 体系的优越性。

### 1 深梁动力学相空间非传统 Hamilton 型变分原理

按文[10-11]的思路,可以建立有阻尼深梁动力学的相空间(位移、动量)非传统 Hamilton 型变分原理。当边界条件  $x = 0: w = \bar{w}, \psi = \bar{\psi}; x = l: M = \bar{M}, Q = \bar{Q}$  和初始条件  $w(x, 0) = \bar{w}_0, \psi(x, 0) = \bar{\psi}_0, p(x, 0) = \bar{p}_0, L(x, 0) = \bar{L}_0$  时,其泛函为

$$\begin{aligned} \Pi_2(w, \psi; p, L) = & \int_0^l \left[ p\dot{w} - \frac{1}{2\rho A} p^2 + L\dot{\psi} - \frac{1}{2\rho I} L^2 - \frac{1}{2} EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 - c_w \dot{w}w - \right. \\ & \left. c_\psi \dot{\psi}\psi + fw + m\psi \right] dx dt + \int_0^l \left\{ (\bar{w} - w) C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) + \right. \\ & \left. (\psi - \bar{\psi}) \left( -EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \right\}_{x=0} + \left[ \bar{Q}w - \bar{M}\psi \right]_{x=l} \} dt + \\ & \int_0^l \left\{ \bar{p}_0(x)w(x, 0) - \dot{p}(x, t_1)w(x, t_1) + \bar{L}_0(x)\psi(x, 0) - \right. \\ & \left. L(x, t_1)\psi(x, t_1) + [\dot{w}(x, 0) - \bar{w}_0(x)]p(x, 0) + \right. \\ & \left. [\dot{\psi}(x, 0) - \bar{\psi}_0(x)]L(x, 0) \right\} dx \quad (1) \end{aligned}$$

式(1)中上标 $\circ$ 表示限制变分量<sup>[12]</sup>。对于其他边界条件,上式中的划线项应作相应的改变。 $w, \psi, p, L, \rho, A, I, E$ 分别表示挠度、转角、线动量、角动量、密度、截面积、截面转动惯量、杨氏模

量; $C$ 表示剪切刚度,  $C = (EA)/[2\kappa(1 + \mu)]$ ,  $\mu$ 是泊松比,  $\kappa$ 是剪切因子,本文取  $\kappa = 6/5$ ;  $c_w$ 和  $c_\psi$ 表示阻尼系数。当梁端支承分别为通常的简支、固支或自由、以及位移满足位移边界条件和位移初始条件时,式(1)就变成

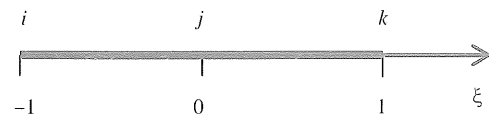
$$\begin{aligned} \Pi_2(w, \psi; p, L) = & \int_0^l \left[ p\dot{w} - \frac{1}{2\rho A} p^2 + L\dot{\psi} - \frac{1}{2\rho I} L^2 - \frac{1}{2} EI \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right)^2 - \right. \\ & \left. c_w \dot{w}w - c_\psi \dot{\psi}\psi + fw + m\psi \right] dx dt + \\ & \int_0^l \left\{ \bar{p}_0(x)w(x, 0) - \dot{p}(x, t_1)w(x, t_1) + \right. \\ & \left. \bar{L}_0(x)\psi(x, 0) - \dot{L}(x, t_1)\psi(x, t_1) \right\} dx \quad (2) \end{aligned}$$

从  $\delta \Pi_2 = 0$ , 可得到基本方程和边界条件。

### 2 辛空间有限元—时间子域法

#### 2.1 辛有限元法

对空间域用辛有限元法进行离散,本文采用三结点深梁单元<sup>[13]</sup>。



其结点位移和动量的列阵分别为:

$$\{q^{(e)}(t)\} = [w_i(t) \ \psi_i(t) \ w_j(t) \ \psi_j(t) \ w_k(t) \ \psi_k(t)]^T \quad (3)$$

$$\{p^{(e)}(t)\} = [p_i(t) \ L_i(t) \ p_j(t) \ L_j(t) \ p_k(t) \ L_k(t)]^T \quad (4)$$

式中,  $w_i(t)$  和  $\psi_i(t)$  分别是结点  $i$  的挠度和转角函数,  $p_i(t)$  和  $L_i(t)$  分别是结点  $i$  的线动量和角动量函数。

位移和动量模式为:

$$w^{(e)}(x, t) = [N_w^{(e)}(x)] \{q^{(e)}(t)\} \quad (5)$$

$$\psi^{(e)}(x, t) = [N_\psi^{(e)}(x)] \{q^{(e)}(t)\} \quad (6)$$

$$p^{(e)}(x, t) = [N_p^{(e)}(x)] \{p^{(e)}(t)\} \quad (7)$$

$$L^{(e)}(x, t) = [N_L^{(e)}(x)] \{p^{(e)}(t)\} \quad (8)$$

式中

$$[N_w^{(e)}(x)] = \begin{bmatrix} \frac{\xi(\xi-1)}{2} & 0 & 1-\xi^2 & 0 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$[N_\psi^{(e)}(x)] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\xi(\xi-1)}{2} & 0 & 1-\xi^2 & 0 & \frac{\xi(\xi+1)}{2} \end{bmatrix} \quad (10)$$

其中  $\xi$  是无量纲坐标,  $\xi = \frac{x - (x_k + x_i)/2}{(x_k - x_i)/2}$ 。

将式 (5) - 式 (8) 代入式 (2), 得

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \int_0^{t_1} [\{p\}^T [M'] \{\dot{q}\} - \frac{1}{2} \{p\}^T [K^p] \{p\} - \\ & \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} - \{\dot{q}\}^T [C] \{q\} + \{F\}^T \{q\}] dt + \\ & \int_0^l [\bar{p}_0(x) \bar{w}_0(x) + \bar{L}_0(x) \bar{\psi}_0(x)] dx - \\ & \{p_1\}^T [M'] \{q_1\} \end{aligned} \quad (11)$$

式中

$$[M'] = \sum_e \int_{J(e)} \{ [N_w(x)]^T [N_w(x)] + [N_\psi(x)]^T [N_\psi(x)] \} dx \quad (12)$$

$$[K^p] = \sum_e \int_{J(e)} \{ \frac{1}{\rho A} [N_w(x)]^T [N_w(x)] + \frac{1}{\rho I} [N_\psi(x)]^T [N_\psi(x)] \} dx \quad (13)$$

$$[K] = \sum_e \int_{J(e)} \{ EI [N_\psi(x)]^T [N_\psi(x)]_{,x} + C([N_w(x)]^T [N_w(x)]_{,x} - [N_w(x)]^T [N_\psi(x)] - [N_\psi(x)]^T [N_w(x)]_{,x} + [N_\psi(x)]^T [N_\psi(x)] \} dx \quad (14)$$

$$[C] = \sum_e \int_{J(e)} \{ c_w [N_w(x)]^T [N_w(x)] + c_\psi [N_\psi(x)]^T [N_\psi(x)] \} dx \quad (15)$$

$$\{F(t)\} = \sum_e \int_{J(e)} \{ [N_w(x)]^T f(x, t) + [N_\psi(x)]^T m(x, t) \} dx \quad (16)$$

$$\{q(t)\} = [q_1(t) q_2(t) \cdots q_i(t) \cdots q_n(t)]^T \quad (17)$$

$$\{p(t)\} = [p_1(t) p_2(t) \cdots p_i(t) \cdots p_n(t)]^T \quad (18)$$

以上各式均是按有限元的一般方法对号集总而成, 设其自由度总数 (即待定的结点位移和动量函数数目) 为  $2n$ 。此外, 在进行数值运算之前, 还应对边界条件进行处理。

### 2.2 辛时间子域法

辛时间子域法的思想是把所考察的整个时间响应历程划分成若干个时间子域, 在任一时间子域上, 用 Lagrange 插值多项式逼近待定的位移和动量函数, 根据动力学的变分原理, 求解出子域末端的状态值; 然后, 把前一个时间子域的末端状态值作为下一个时间子域的初始状态值, 重复上一步的计算; 如此进行递推, 直至最后一个时间子域。

对于任意时间子域  $[t_i, t_{i+1}]$ , 令  $t_0 = t_{i+1} - t_i$ , 则局部时间坐标表示的时间子域为  $t \in [0, t_0]$ ; 再把该时间子域等分为  $m$  段, 令  $s = m + 1$ , 每段长为  $H$ , 则无量纲局部时间坐标表示的时间子域为

$\tau \in [0, m]$ , 其中  $\tau = t/H$ 。在当前的时间子域上, 令:

$$q_i(t) = \sum_{j=1}^s a_{ij} \varphi_j(\tau), p_i(t) = \sum_{j=1}^s b_{ij} \varphi_j(\tau),$$

( $i = 1, 2, \dots, n$ ), 或表示为:

$$\{q(t)\} = [\Phi(\tau)] \{a\}, \{p(t)\} = [\Phi(\tau)] \{b\} \quad (19)$$

式中  $\{a\}$  和  $\{b\}$  分别是待定的结点位移和动量向量。将式 (19) 代入式 (11), 得:

$$\begin{aligned} \Pi_2 = & \{b\}^T [M'] \{a\} - \frac{1}{2} \{b\}^T [K^p] \{b\} - \\ & \frac{1}{2} \{a\}^T [K] \{a\} - \{\dot{a}\}^T [C] \{a\} + \{F\}^T \{a\} + \\ & \int_0^l [\bar{p}_0(x) \bar{w}_0(x) + \bar{L}_0(x) \bar{\psi}_0(x)] dx - \\ & \{\dot{b}\}^T [M'] \{a\} \end{aligned} \quad (20)$$

从  $\delta \Pi_2 = 0$ , 并整理可得

$$[R]_{2ns \times 2ns} \{\Delta\}_{2ns \times 1} = \{P\}_{2ns \times 1} \quad (21)$$

引入初始条件后, 式 (21) 变成

$$[\bar{R}]_{2nm \times 2nm} \{\bar{\Delta}\}_{2nm \times 1} = \{\bar{P}\}_{2nm \times 1} - [\bar{R}_0]_{2nm \times 2n} \{\bar{\Delta}_0\}_{2n \times 1} \quad (22)$$

式 (22) 是本文给出的计算递推格式。求解线性方程组 (22) 得到当前时间子域内各结点任一时刻的位移和动量。然后, 把当时的时间子域末端的结点位移向量  $\{a_m\}$  和动量向量  $\{b_m\}$  作为下一时间子域的初始状态值, 如此重复进行就形成递推算法。

### 3 算例

假设深梁长 100 cm, 宽 1 cm, 高为 40 cm, 弹性模量  $E = 1.5 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, 密度  $\rho = 0.008$  kg/cm<sup>3</sup>, 周期干扰力  $f = 10\,000 \sin(500 t)$  (kg) 作用于梁中点, 初位移  $\bar{w}_0 = 0$ , 初动量  $\bar{p}_0 = 0$ , 计算梁中点的动挠度值。这里将梁等分成 6 个单元, 时间子域采用 5 次、4 次、3 次 Lagrange 插值, 振型叠加法取全部离散振型。有关各种边界条件的深梁计算结果比较分别见表 1, 表中计算结果的右边列是相对误差百分比。图 1-4 为时间子域采用 5 次 Lagrange 插值, 长度取  $5H = 5\Delta t$  情况下前 60 步的结果比较, 可以看出, 尽管经过多次的递推, 文中方法的结果仍然与解析解很吻合, 这说明了该方法不但计算精度很高, 而且具有良好的稳定性和收敛性。当时间子域用 5 次 Lagrange 插值多项式插值时, 甚至时间子域为 5 倍时间步长, 其精度仍很高; 若时间子域分别采用 4 次和 3 次 Lagrange 插值多项式插值时, 其精度也比较高。

表 1 两端固支弹性深梁的中点动挠度 ( $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ )

Table 1 Dynamic deflections at mid-span of Timoshenko beam with two fixed ends ( $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ )

时间/s	叠加法/ mm	本文解/mm				Wilson- $\theta$ 法		Newmark- $\beta$ 法			
		$5H = \Delta t$	$5H = 5\Delta t$	$4H = \Delta t$	$3H = \Delta t$	$\theta = 1.4, \Delta t$	$\beta = 0.25, \Delta t$				
0.0002	0.0062	0.0062	0.00	0.0061	1.61	0.0062	0.0062	0.0058	6.45	0.0063	-1.61
0.0004	0.0284	0.0283	0.35	0.0284	0.00	0.0283	0.0284	0.0265	6.69	0.0275	3.17
0.0006	0.0575	0.0574	0.17	0.0575	0.00	0.0575	0.0575	0.0556	3.30	0.0566	1.57
0.0008	0.0729	0.0729	0.00	0.0728	0.14	0.0729	0.0729	0.0747	-2.47	0.0738	-1.23
0.0010	0.0745	0.0745	0.00	0.0744	0.13	0.0745	0.0744	0.0790	-6.04	0.0769	-3.22
0.0012	0.0831	0.0831	0.00	0.0832	-0.12	0.0830	0.0831	0.0837	-0.72	0.0827	0.48
0.0014	0.1075	0.1076	-0.09	0.1074	0.09	0.1075	0.1075	0.1014	5.67	0.1041	3.16
0.0016	0.1297	0.1297	0.00	0.1296	0.08	0.1297	0.1298	0.1253	3.39	0.1280	1.31
0.0018	0.1336	0.1336	0.00	0.1338	-0.15	0.1335	0.1336	0.1388	-3.89	0.1377	-3.07
0.0020	0.1305	0.1307	-0.15	0.1306	-0.08	0.1305	0.1303	0.1386	-6.21	0.1341	-2.76

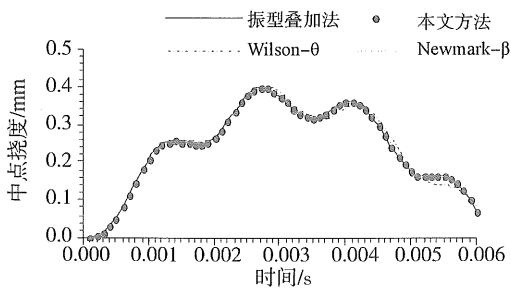


图 1 两端简支深梁 (高跨比 = 4/10) ( $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ )  
Fig. 1 Timoshenko beam with two simply supported ends (ratio of depth to span = 4/10,  $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ )

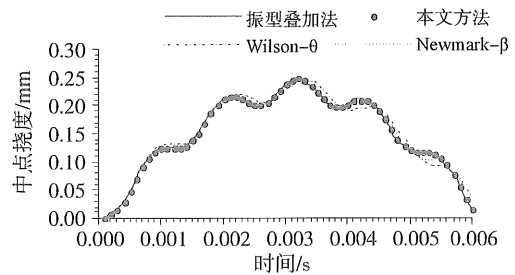


图 3 一端固支一端简支深梁 (高跨比 = 4/10) ( $\Delta t = 0.0004 \text{ s}$ )  
Fig. 3 Timoshenko beam with one fixed end and the other simply supported end (ratio of depth to span = 4/10,  $\Delta t = 0.0004 \text{ s}$ )

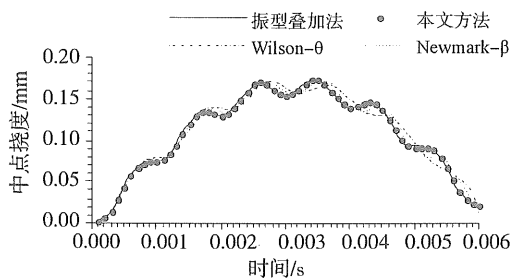


图 2 两端固支深梁 (高跨比 = 4/10) ( $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ )  
Fig. 2 Timoshenko beam with two fixed ends (ratio of depth to span = 4/10,  $\Delta t = 0.0001 \text{ s}$ )

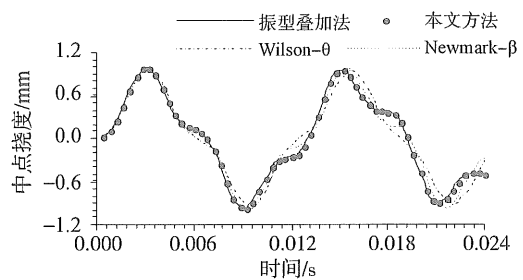


图 4 一端固支一端自由深梁 (高跨比 = 4/10) ( $\Delta t = 0.0004 \text{ s}$ )  
Fig. 4 Timoshenko beam with one fixed end and the other free end (ratio of depth to span = 4/10,  $\Delta t = 0.0004 \text{ s}$ )

### 4 结 语

深梁是工程上常用的考虑剪切变形的一维结构构件。本文首次建立了有阻尼深梁动力学的相空间 (位移、动量) 非传统 Hamilton 型变分原理。这种相空间 Hamilton 变分原理具有自然辛结构, 基于这种变分原理就能建立一些计算性能更好的高效辛算法。文中基于所建立的相空间变分原理, 提出一

种称之为辛空间有限元-时间子域法的辛算法。并且采用该方法分析了高跨比为 0.4 的深梁在各种边界条件 (两端简支、两端固支、一端固支一端简支、一端固支一端自由) 下的动力响应, 这充分说明了辛空间有限元-时间子域法适用于深梁的动力响应分析问题。振型叠加法需要求解广义特征值问题, Wilson- $\theta$ 法和 Newmark- $\beta$ 只有在时间步长较小的情况下才有较好的精度, 上述三种方法都

是 Lagrange 体系下的算法,而辛空间有限元-时间子域法是 Hamilton 体系下的算法。所有算例都明显看出,文中建立的新方法的计算精度和计算效率远高于国际上常用的 Wilson- $\theta$  法和 Newmark- $\beta$  法。由于这种 Hamilton 力学体系下的新方法的稳定性、收敛性、计算精度和效率都高于 Lagrange 力学体系下的已有方法,因此这种辛算法具有广阔的应用前景。

#### 参考文献:

- [1] GOLDSTEIN H. Classical mechanics[M]. 2nd ed. Mass: Addison-Wesley Publishing Co, 1980.
- [2] 冯康,秦孟兆. Hamilton 体系的辛计算格式[M]. 杭州:浙江科技出版社,2004.
- [3] 钟万勰. 应用力学的辛数学方法[M]. 北京:高等教育出版社,2006.
- [4] 林家浩,钟万勰. 辛数学精细积分随机振动及应用[M]. 合肥:中国科学技术大学出版社,2008.
- [5] 高强,彭海军,吴志刚,钟万勰. 非线性动力学系统最优控制问题的保辛求解方法[J]. 动力学与控制学报, 2010, 8(1): 1-7.
- [6] 钟万勰. 分析结构力学与有限元[J]. 动力学与控制学报, 2004, 2(4): 1-8.
- [7] 黄伟江,罗恩,章学军. 辛数值流形时间子域法[J]. 中国科学, 2010, 39(10): 1487-1494.
- [8] 章学军,黄伟江,罗恩. 夹层梁动力响应分析的一种辛算法[J]. 建筑科学, 2010, 26(1): 56-59.
- [9] 龚克. 单广义位移的深梁理论和中厚板理论[J]. 应用数学和力学, 2000, 21(9): 984-990.
- [10] LUO En, CHEUNG Y K. On the variational principles in linear elastodynamics [J]. Acta Mechanica Sinica, 1988, 4(4): 377-349.
- [11] 罗恩. 几何非线性弹性动力学中广义 Hamilton 型拟变分原理[J]. 中山大学学报:自然科学版, 1990, 29(2): 15-19.
- [12] FINLAYSON B A. The method of weighted residuals and variational principles[M]. New York: Acad Press, 1972.
- [13] 王勖成,邵敏. 有限单元法基本原理和数值方法[M]. 2版. 北京:清华大学出版社,1997.
- [5] 辛向军,李发根,肖国镇. 一种基于短签名和离线半可信第三方的公平交换协议[J]. 西安电子科技大学学报, 2007, 34(1): 92-95.
- [6] MENEZES A, OKAMOTO T, VANSTONE S. Reducing elliptic curve logarithms to logarithms in a finite field [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 1993, 39(5): 1639-1646.
- [7] BALASUBRAMANIAN R, KOBLITZ N. The improbability that an elliptic curve has subexponential discrete log problem under the Menezes-Okamoto-Vanstone algorithm [J]. Journal of Cryptology, 1998, 11(2): 141-145.
- [8] MIYAJI A, NAKABAYASHI M, TAKANO S. New explicit conditions of elliptic curve traces for FR-reduction [J]. IEICE Transactions on Fundamentals, 2001, E84-A(5): 1234-1243.
- [9] SCOTT M, BARRETO P. Generating more MNT elliptic curves [J]. Designs, Codes and Cryptography, 2006, 38(2): 209-217.
- [10] BREZING F, WENG A. Elliptic curves suitable for pairing based cryptography [J]. Designs, Codes and Cryptography, 2005, 37(1): 133-141.
- [11] FREEMAN D. Constructing pairing-friendly elliptic curves with embedding degree 10 [C] // Algorithmic Number Theory Symposium ANTS-VII: Lecture Notes in Computer Science 4076. Berlin: Springer-verlag, 2006: 452-465.
- [12] SILVERMAN J. The arithmetic of elliptic curves [M]. New York: Springer-verlag, 1986: 131.
- [13] WASHINGTON L. Introduction to cyclotomic fields [M]. New York: Springer-verlag, 1997: 13.
- [14] ATKIN A, MORAIN F. Elliptic curves and primality proving [J]. Mathematics of Computation, 1993, 61(203): 29-68.
- [15] GALBRAITH S, MCKEE J, VALENCA P. Ordinary abelian varieties having small embedding degree [J]. Finite Fields and Their Applications, 2007, 13(4): 800-814.

(上接第32页)