

一类动力系统的极限环及其数目和分布*

黄赅彪

(中山大学工学院, 广东 广州 510275)

摘要: 用摄动增量法求解一类平面二次动力系统, 指出系统在有限域内只有环绕原点的四个环, 幅值较小的三个是极限环(分别是稳定、不稳定和稳定), 较大的是同宿环; 标出无切曲线, 以及两条渐近曲线的近似位置; 计算结果表明, 摄动增量法的近似极限环与数值积分法吻合良好。由三个极限环的速率曲线无公共交点这一事实, 进一步具体说明平面多项式微分系统极限环的数目(即 Hilbert 第 16 问题第二部分)不能简单地由代数方法解决。

关键词: 动力系统; 极限环; 数目; 分布

中图分类号: 0322 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2010)05-0041-07

The Limit Cycles and Their Number and Distribution of a Dynamical System

Huang Chengbiao

(School of Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A plane quadratic dynamical system is solved by using the perturbation-incremental method. It is shown that there are only four cycles in the finite field of this system. Three of smaller amplitudes are the limit cycles (stability, instability and stability respectively) and the larger one is the homoclinic cycle. The un-tangent curve and the two gradual curves are plotted. The computation result showed that the perturbation-incremental method is in good agreement compared with the numerical integral method. It is shown further that the number of the limit cycles of the planar polynomial differential systems (the second part of Hilbert's 16 problems) can't be simply solved with using the algebra from the fact that there isn't the common point of intersection of the rate curves of the three limit cycles.

Key words: dynamical system; limit cycle; number; distribution

动力学和控制中, 不少问题可以归结为以下平面二次动力系统极限环的研究

$$\frac{dx}{dt} = \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2$$

$$\frac{dy}{dt} = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2 \quad (1)$$

其中, $\alpha_i, \beta_i (i = 1, 2, \dots, 5)$ 是实参数。系统(1)的各种解法中^[1-13], 以广义谐函数为基函数的摄动增量法(PI)的优点显著^[5]。其特点是独立给出增量法的初值, 解答简洁、精度良好, 能算出极限环的表达式、频率、周期、振幅、偏心矩、稳定

性, 且能给出系统极限环振幅与参数的关系式, 从而可以确定极限环的数目, 并利用现有结果, 讨论其分布位置。本文将利用该法的这些特点, 详细分析一类动力系统的相关解答。与龙格-库塔(Runge-Kutta 简记 R-K)数值积分法比较, 计算结果吻合良好。

1 摄动增量法概述

摄动法引进控制参数 $\varepsilon \geq 0$, 系统(1)改写为

* 收稿日期: 2009-10-18

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10772203)

作者简介: 黄赅彪(1950年生), 男, 副教授; E-mail: huangchb@mail.sysu.edu.cn

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha_2 y + \varepsilon X(x, y) \\ \dot{y} &= g(x) + \varepsilon Y(x, y) \end{aligned} \quad (2)$$

式 (2) 中, $(\dot{}) = d()/dt$ (下同),

$$\begin{aligned} X(x, y) &= \alpha_1 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 xy + \alpha_5 y^2 \\ Y(x, y) &= y(\beta_2 + \beta_4 x + \beta_5 y) \\ g(x) &= \beta_1 x + \beta_3 x^2 \end{aligned}$$

引进变量替换

$$\dot{\varphi} = \omega(\varphi), \varphi \in (-\infty, +\infty) \quad (3)$$

满足 $\omega(\varphi + 2\pi) = \omega(\varphi) > 0$ 。易知变换 (3) 不改变系统 (2) 的拓扑结构。于是式 (2) 变为

$$\begin{aligned} \omega x' &= \alpha_2 y + \varepsilon X(x, y) \\ \omega y' &= g(x) + \varepsilon Y(x, y) \end{aligned} \quad (4)$$

式 (4) 中, $()' = d()/d\varphi$ (下同)。设系统 (4) 周期解的横坐标 x 为广义谐函数

$$x = a \cos \varphi + b, \varphi \in (-\infty, +\infty) \quad (5)$$

式 (5) 中, a 、 b 分别是 x 坐标的振幅和偏心距。将式 (5) 代入式 (4), 得

$$y = -(a\omega \sin \varphi + \varepsilon X)/\alpha_2 \quad (6)$$

将式 (6) 代入式 (4) 第二式, 有

$$\omega(a\omega \sin \varphi)' = -\varepsilon \omega X' - \alpha_2 g(x) - \alpha_2 \varepsilon Y \quad (7)$$

式 (7) 两边同乘以 $a \sin \varphi$ 并对 φ 积分, 得

$$\begin{aligned} \omega &= \{2\alpha_2 [v(a \cos \varphi + b) - v(a + b)] + \\ &2\varepsilon \int_0^\varphi f(a, b, y, \omega, \theta) d\theta\}^{1/2} / (a \sin \varphi) \end{aligned} \quad (8)$$

这里,

$$v(x) = \int_0^x g(z) dz,$$

$$f(a, b, y, \omega, \theta) = a(\omega X' + \alpha_2 Y) \sin \theta$$

为了确保式 (8) 给定的 ω 的连续性, 式 (4) 中的 $g(x)$, $X(x, y)$, $Y(x, y)$ 须满足一定的条件。

式 (8) 中, 分别取 $\varphi = \pi, 2\pi$, 可得

$$\alpha_2 [v(-a + b) - v(a + b)] - \varepsilon \int_0^\pi f d\theta = 0 \quad (9)$$

$$\int_0^{2\pi} f d\theta = 0 \quad (10)$$

改写式 (6) 为

$$\alpha_2 y + a\omega \sin \varphi + \varepsilon X = 0 \quad (11)$$

经变换 (3), 系统 (1) 周期解的相关量 a, b, y, ω 可由式 (8) - (11) 确定, 但难以精确求解。下面以摄动增量法近似求解之。

取 $\varepsilon \approx 0$, 由式 (5) 及 (8) - (11) 得

$$x_0 = a_0 \cos \varphi + b_0 \quad (12)$$

$$y_0 = -a_0 \omega_0 \sin \varphi / \alpha_2 \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \omega_0 &= \{2\alpha_2 [v(a_0 \cos \varphi + b_0) - \\ &v(a_0 + b_0)] / (a_0^2 \sin^2 \varphi)\}^{1/2} \end{aligned} \quad (14)$$

$$v(-a_0 + b_0) - v(a_0 + b_0) = 0 \quad (15)$$

$$\int_0^{2\pi} f(a, b, y, \omega, \theta) d\theta = 0 \quad (16)$$

联立式 (12) - (16), 可得 a_0, b_0 。于是, 增量法的初值为 a_0, b_0, y_0, ω_0 。

给参数 ε 予小增量 $\Delta \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots$, 相应地, 系统的初值的增量分别为 $\Delta a, \Delta b, \Delta y, \Delta \omega$ 。令

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1} + \Delta \varepsilon_i, a_i = a_{i-1} + \Delta a, b_i = b_{i-1} + \Delta b$$

$$y_i = y_{i-1} + \Delta y, \omega_i = \omega_{i-1} + \Delta \omega, i = 1, 2, \dots \quad (17)$$

$$\text{相应地, } x_i = a_i \cos \varphi + b_i \quad (18)$$

$$y_i = -(a_i \omega_i \sin \varphi + \varepsilon_i X_i) / \alpha_2 \quad (19)$$

$$\omega_i = \frac{1}{a_i \sin \varphi} \{2\alpha_2 [v(a_i \cos \varphi + b_i) -$$

$$v(a_i + b_i)] + 2\varepsilon_i \int_0^\varphi f(a_i, b_i, y_i, \omega_i, \theta) d\theta\}^{1/2} \quad (20)$$

式 (19) 中, $X_i = X(x_i, y_i)$ 。式 (20) 表示的 ω_i 难以精确求解。为近似求解方便起见, 分别展开 $y_i, \omega_i, \Delta y, \Delta \omega$ 为富氏展式:

$$y_i = C_0 + \sum_{j=1}^m (C_j \cos j\varphi + D_j \sin j\varphi) \quad (21)$$

$$\omega_i = P_0 + \sum_{j=1}^m (P_j \cos j\varphi + Q_j \sin j\varphi) \quad (22)$$

$$\Delta y = \Delta C_0 + \sum_{j=1}^m (\Delta C_j \cos j\varphi + \Delta D_j \sin j\varphi) \quad (23)$$

$$\Delta \omega = \Delta P_0 + \sum_{j=1}^m (\Delta P_j \cos j\varphi + \Delta Q_j \sin j\varphi) \quad (24)$$

将式 (17) 及 (18) 代入式 (11) 并略去关于 $\Delta a, \Delta b, \Delta y, \Delta \omega$ 的二次以上的高次项, 得

$$\Delta y \left(\alpha_2 + \varepsilon_i \frac{\partial X}{\partial y} \Big|_i \right) + \Delta \omega a_i \sin \varphi +$$

$$\Delta a \left(\omega_i \sin \varphi + \varepsilon_i \frac{\partial X}{\partial a} \Big|_i \right) + \Delta b \varepsilon_i \frac{\partial X}{\partial b} \Big|_i =$$

$$-\alpha_2 y_i - a_i \omega_i \sin \varphi - \varepsilon_i X_i \quad (25)$$

类似于式 (25), 由式 (8) 可得

$$-\varepsilon_i \int_0^\varphi \frac{\partial f}{\partial y} \Big|_i \Delta y d\theta - \Delta \omega (a_i^2 \omega_i \sin^2 \varphi) -$$

$$\varepsilon_i \int_0^\varphi \frac{\partial f}{\partial \omega} \Big|_i \Delta \omega d\theta + \Delta a \left(\alpha_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial a} - a_i \omega_i^2 \sin^2 \varphi -$$

$$\varepsilon_i \int_0^\varphi \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_i d\theta \right) + \Delta b \left(\alpha_2 \frac{\partial \bar{v}}{\partial b} - \varepsilon_i \int_0^\varphi \frac{\partial f}{\partial b} \Big|_i d\theta \right) =$$

$$-\frac{1}{2} (a_i \omega_i \sin \varphi)^2 - \alpha_2 \bar{v} + \varepsilon_i \int_0^\varphi f_i d\theta \quad (26)$$

式 (26) 中,

$$\bar{v} = \bar{v}(a_i, b_i, \varphi) = v(a_i \cos \varphi + b_i) - v(a_i + b_i)$$

$$(27)$$

类似地, 由式 (9) 得

$$-\varepsilon_i \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial b} \Big|_i \Delta y d\theta - \varepsilon_i \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial \omega} \Big|_i \Delta \omega d\theta +$$

$$\begin{aligned} \Delta a [\alpha_2 \frac{\partial \tilde{v}(a_i, b_i, \pi)}{\partial a} - \varepsilon_i \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_i d\theta] + \\ \Delta b [\alpha_2 \frac{\partial \tilde{v}(a_i, b_i, \pi)}{\partial b} - \varepsilon_i \int_0^\pi \frac{\partial f}{\partial b} \Big|_i d\theta] = \\ - \alpha_2 \tilde{v}(a_i, b_i, \pi) + \varepsilon \int_0^\pi f_i d\theta \end{aligned} \quad (28)$$

由式 (10), 可得

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_i \Delta y + \frac{\partial f}{\partial \omega} \Big|_i \Delta \omega) d\theta + \Delta a \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial a} \Big|_i d\theta + \\ \Delta b \int_0^{2\pi} \frac{\partial f}{\partial b} \Big|_i d\theta = - \int_0^{2\pi} f_i d\theta \end{aligned} \quad (29)$$

式(25) - (29)中, $()|_i = ()|_{\varepsilon=\varepsilon_i, a=a_0, b=b_i, y=y_i, \omega=\omega_i}$ 将上述各式中所含的三角函数 $\cos \varphi, \sin \varphi$ 的幂及乘积化为倍角的三角函数及其代数和形式, 并利用谐波平衡原理, 可得关于

$$\begin{aligned} \Delta C_0, \Delta C_1, \Delta C_2, \dots, \Delta C_m; \Delta D_1, \Delta D_2, \dots, \Delta D_m; \\ \Delta P_0, \Delta P_1, \Delta P_3, \dots, \Delta P_m; \Delta Q_1, \Delta Q_2, \dots, \Delta Q_m; \Delta a, \Delta b \end{aligned}$$

为独立变量的线性代数方程组

$$AZ = B \quad (30)$$

式 (30) 中,

$$\begin{aligned} Z = [\Delta C_0, \dots, \Delta C_m; \Delta D_1, \dots, \Delta D_m; \\ \Delta P_0, \dots, \Delta P_m; \Delta Q_1, \dots, \Delta Q_m; \Delta a, \Delta b]^T \\ B = [B_1 \quad B_2 \dots B_{4m+2} \quad B_{4m+3} \quad B_{4m+4}]^T \\ A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \dots & A_{1,4m+4} \\ A_{21} & A_{22} \dots & A_{2,4m+4} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{4m+2,1} & A_{4m+2,2} \dots & A_{4m+2,4m+4} \\ A_{4m+3,1} & A_{4m+3,2} \dots & A_{4m+3,4m+4} \\ A_{4m+4,1} & A_{4m+4,2} \dots & A_{4m+4,4m+4} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

上式中, $A_{i,j}, B_i (i, j = 1, 2, \dots, 4m + 4)$ 的计算涉及一系列三角函数及三角级数乘法, 限于篇幅, 不叙述。

求解方程组 (30) 得到 Z 并将之代入式 (20)、(21) 及 (17)。重复上述步骤, 设经参数 ε 的 k 次增量, 满足 $\varepsilon_k = 1$ 为止。此时的 a_k, b_k, y_k, ω_k 即为所求的 a, b, y, ω 。于是, 绕奇点 $(0, 0)$ 的周期解、频率和周期的表达式分别为

$$x = a \cos \varphi + b \quad (31)$$

$$y = C_0 + \sum_{j=1}^m (C_j \cos j\varphi + D_j \sin j\varphi) \quad (32)$$

$$\omega = P_0 + \sum_{j=1}^m (P_j \cos j\varphi + Q_j \sin j\varphi) \quad (33)$$

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega} \quad (34)$$

周期解的稳定性特征指数

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{T} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\omega} \left[\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} \right] d\varphi \quad (35)$$

将式 (35) 中 $\frac{1}{\omega}$ 及括号内的式子富氏展开

$$\frac{1}{\omega} = \bar{P}_0 + \sum_{k=1}^m (\bar{P}_k \cos k\varphi + \bar{Q}_k \sin k\varphi) \quad (36)$$

$$\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} = \bar{C}_0 + \sum_{j=1}^m (\bar{C}_j \cos j\varphi + \bar{D}_j \sin j\varphi)$$

则稳定性指数为

$$\gamma = \frac{2\pi\varepsilon}{T} [\bar{C}_0 \bar{P}_0 + 0.5 \sum_{i=1}^m (\bar{C}_i \bar{P}_i + \bar{D}_i \bar{Q}_i)] \quad (37)$$

当 $\gamma < 0 (> 0)$ 时周期解稳定 (不稳定)。

周期解的数目及其随参数的变化而变化的演变过程, 可由式 (9) 和 (10) 定量给出。比如系统 (1) 关于参数 β_2 与周期解振幅的关系曲线为

$$\beta_2 = \int_0^{2\pi} (y' - G(x, y)) d\varphi / \int_0^{2\pi} y d\varphi \Delta \beta_2(a) \quad (38)$$

式 (38) 中,

$$G(x, y) = \beta_1 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 xy + \beta_5 y^2$$

通过曲线 (38), 可以直观了解系统的所有周期解随参数 β_2 变化而产生、稳定、分岔与消失的全过程。而周期解与其他参数的关系, 也可类似于式 (38) 表示。将式 (36) 代入式 (34), 系统周期解的周期为

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\omega} = 2\pi \bar{P}_0 \quad (39)$$

2 计算结果

式 (1) 中的各参数分别取为:

$$\alpha_1 = 0.001, \alpha_2 = 0.72, \alpha_3 = 0.28, \alpha_4 = 0.02$$

$$\alpha_5 = 0.276, \beta_1 = \beta_3 = -0.95, \beta_4 = 4, \beta_5 = 0.982$$

此时系统有两个奇点: 不稳定焦点 $F(0, 0)$ 及鞍点 $S(0.542\ 516\ 586\ 263\ 355\ 176\ 387\ 758\ 713\ 052\ 45, -2.529\ 172\ 980\ 197.140\ 495\ 658\ 553\ 459\ 823\ 5)$ 。

周期解关于参数 β_2 的分岔曲线由式 (38) 确定, 无量纲化 (下同) 图形见图 1。周期解的振幅 a 随参数 β_2 的变化而产生、稳定、分岔和消失的演变过程说明如下:

1) $\beta_2 \in (-\infty, -0.006\ 160\ 949)$ 时, 没有周期解;

2) $\beta_2 \in [-0.006\ 160\ 949, -0.001\ 237\ 986\ 2)$ 时, $\gamma > 0$, 有一个不稳定周期解;

3) $\beta_2 = -0.001\ 237\ 986\ 2$ 时有两个周期解, 振幅 $a = 0.43$ 和 0.5226 , 小者半稳定 (左不稳定, 右稳定), 大者不稳定;

4) $\beta_2 \in (-0.001\ 237\ 986\ 2, -0.000\ 986\ 182\ 9)$

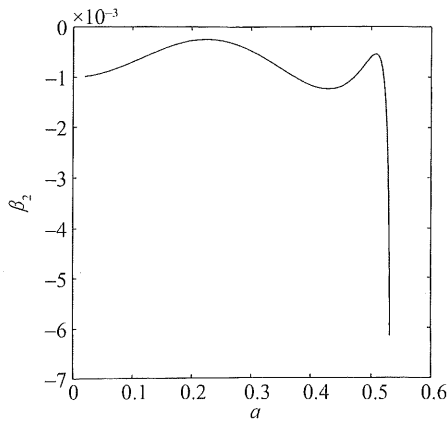


图 1 参数 β_2 与振幅 a_i 的关系曲线 (无量纲化下同)

Fig. 1 Curves of parameter β_2 and amplitudes a_i

时, 有三个周期解, 依振幅由小至大 (下同) 分别为不稳定, 稳定和不稳定;

5) $\beta_2 \in [0.000\ 986\ 182\ 9, -0.000\ 544\ 970\ 679]$ 时有四个周期解, 依次为稳定、不稳定、稳定和稳定;

6) $\beta_2 = -0.000\ 544\ 970\ 679$ 时有三个周期解, 依次为稳定、不稳定、半稳定;

7) $\beta_2 \in (-0.000\ 544\ 970\ 679, -0.000\ 247\ 052\ 445\ 03)$ 时有两个周期解, 依次为稳定和稳定;

8) $\beta_2 = -0.000\ 247\ 052\ 445\ 03$ 时有一个半稳定周期解 (左稳定右不稳定);

9) $\beta_2 > -0.000\ 247\ 052\ 445\ 03$ 时周期解消失。

取 $\beta_2 = -0.000\ 75 \in [-0.000\ 986\ 182\ 9, -0.000\ 544\ 970\ 679]$, 由 5) 知系统绕焦点 $(0, 0)$ 有四个环 $L_i (i = 1, 2, 3, 4)$, 较小的三个是极限环 (振幅 a_i 、偏心距 b_i 、周期 T_i 、稳定性特征指标 γ_i 、 γ_i 和 $\omega_i (i = 1, 2, 3)$ 的富氏系数见表 1, 较大者是过鞍点同宿环 (见图 2)。

进一步的数值搜索显示, 在相平面的有限域 D 内, 存在一条无切曲线 L_6 和两条渐近曲线 L_4 及 $L-LL$ (见图 3)^[14], 将区域 D 分割为四子域 D_1 、 D_2 、 D_3 、 D_4 。其中, 无切曲线 L_6 由一根曲线段连接两根直线近似构成, 曲线段在原点附近过点 $(-5, -35.028\ 334\ 350\ 141\ 722\ 808\ 302\ 802\ 15)$, $(0.182\ 1, -2.8)$, $(-0.029\ 75, -1.2)$, $(-0.332\ 057, -0.16)$, $(-0.34, .001\ 5)$, $(-0.2, 0.152\ 5)$, $(0., 0.216\ 5)$, $(0.5, 0.342\ 065\ 050\ 151\ 5)$, $(1, 0.463\ 730\ 501\ 515)$, $(15, 3.843\ 888)$, 两直线的方程近似为:

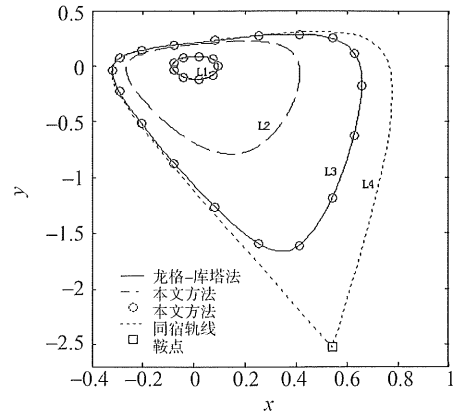


图 2 极限环和同宿环的相轨线

Fig. 2 Phase orbits of limit cycles and homoclinic cycle

$$y = 5.951\ 867\ 983\ 861\ 62x - 5.758\ 160\ 080\ 691\ 9$$

$$x \in (-M_1, -5],$$

$$y = 0.241\ 505\ 101\ 379\ 31x + 0.221\ 312\ 479\ 310\ 34$$

$$x \in [15, M_2).$$

上式中, $M_1, M_2 > 0$ 是任意大的实数 (下同)。渐近曲线 L_4 由一根曲线段连接两根直线近似构成, 曲线段在原点附近过点 $(-1, -0.016\ 2)$, $(-0.7, 0.056\ 9)$, $(-0.4, 0.130\ 8)$, $(-0.2, 0.181\ 58)$, $(0, 0.236\ 32)$, $(0.2, 0.305)$, $(0.4, 0.418\ 4)$, $(0.7, 0.815\ 9)$, $(1, 1.600\ 5)$, $(1.5, 3.565\ 2)$, 两直线的方程近似为:

$$y = 0.241\ 505\ 101\ 379\ 31x + 0.217\ 312\ 479\ 310\ 34$$

$$x \in (-M_1, -1]$$

$$y = 5.951\ 867\ 983\ 861\ 62x - 5.758\ 160\ 080\ 691\ 9$$

$$x \in [1.5, M_2)$$

另一条渐近曲线近似由鞍点出发的两条射线组成, 两条射线的方程分别为 (见图 3):

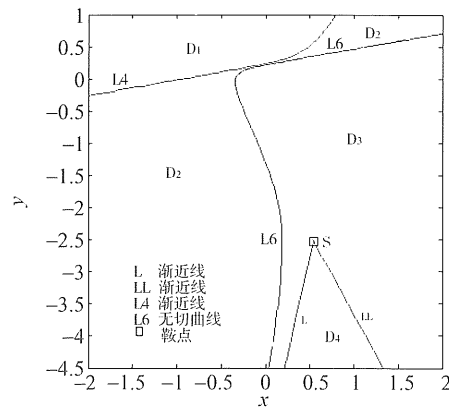


图 3 无切曲线及渐近线

Fig. 3 Un-tangent and gradual curves

$L: y = 5.951\ 867\ 983\ 861\ 62x - 5.758\ 160\ 080\ 691\ 9$
 $x \in (-M_1, 0.542\ 516\ 586\ 263\ 355\ 176\ 387\ 758\ 713]$
 $LL: y = -2.487\ 958\ 636\ 674\ 045x - 1.178\ 437\ 624\ 009$
 $x \in [0.542\ 516\ 586\ 263\ 355\ 176\ 387\ 758\ 713, M_2)$

由子域 D_1 和 D_2 上的点出发的相轨线趋向 L_4 ；
 由子域 D_4 上的点出发的相轨线趋向于 $L - LL$ ；子域 D_3 内存在绕原点 $(0, 0)$ （焦点）的四个环（如上述）。在极限环吸引域（记为 $D_5 \subset D_3$ ）内的点出发的相轨线趋近极限环，余者趋于 $L - LL$ 。例如由点 $(-1e+150, 1e+150) \in D_1$ ， $(-1e+150, -1e+150) \in D_2$ 出发的相轨线迅速趋近于 L_4 ，而由点 $(-5, -35.42) \in D_3$ ， $(-5, -35.18) \in D_3$ ， $(-5, -34.5) \in D_2$ ， $(-5, -35.56) \in D_4$ ， $(-2, 2) \in D_1$ 出发的相轨线分

别 $L_1 \rightarrow L_{10}$ ， $L_2 \rightarrow LL$ ， $L_5 \rightarrow L_4$ ， $L_7 \rightarrow L - LL$ ， $L_{11} \rightarrow L_4$ （见图 4）。

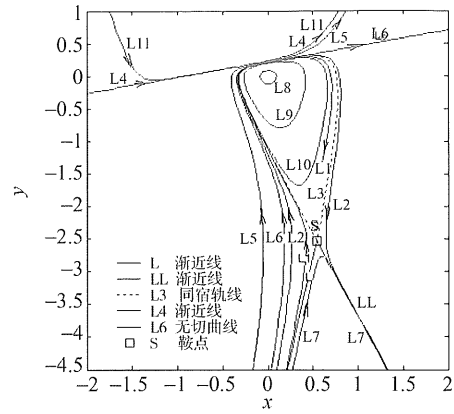


图 4 原点附近的相轨线

Fig. 4 Phases orbits near original

表 1 三个极限环的 $a, b, \gamma, T, C, D, P, Q$ 值

Table 1 Values of $a, b, \gamma, T, C, D, P, Q$ for the limit cycles

$a_1 = 0.09$	$b_1 = 0.004\ 757\ 985\ 827\ 21$	$\gamma_1 = -0.000\ 230\ 626\ 994\ 39$	$T_1 = 7.649\ 796\ 176\ 499\ 52$
C	D	P	Q
-0.010 844 564 804 05	0	0.831 344 668 411 94	0
-0.000 656 988 005 64	-0.104 951 632 667 70	0.060 361 494 624 88	0.113 378 083 308 69
0.007 677 858 666 95	-0.003 697 640 669 44	0.002 099 153 429 24	0.001 022 244 213 52
0.000 206 521 160 10	0.000 182 690 536 26	0.000 143 490 600 96	0.000 242 724 292 57
-0.000 001 074 246 83	0.000 010 109 529 21	-0.000 003 580 486 87	0.000 009 062 897 97
-0.000 000 710 715 55	-0.000 000 074 921 23	-0.000 000 686 619 75	-0.000 000 011 640 95
-0.000 000 009 910 24	-0.000 000 031 922 09	-0.000 000 003 995 29	-0.000 000 038 065 67
0.000 000 001 913 01	-0.000 000 001 540 56	-0.000 000 003 835 15	-0.000 000 002 938 92
0.000 000 000 021 36	0.000 000 000 461 75	0.000 000 001 639 78	0.000 000 000 435 96
$a_2 = 0.34$	$b_2 = 0.073\ 872\ 115\ 290\ 07$	$\gamma_1 = 0.003\ 046\ 762\ 241\ 632$	$T_2 = 8.312\ 808\ 951\ 722\ 53$
C	D	P	Q
-0.163 057 556 674 72	0	0.865 922 609 862 07	0
-0.035 751 923 962 79	-0.478 974 106 209 87	0.235 264 607 964 46	0.342 784 008 013 56
0.115 240 595 767 17	-0.068 367 384 498 84	0.048 713 934 853 73	0.003 815 522 788 28
0.016 359 798 748 78	0.010 165 263 344 36	0.012 542 800 896 24	0.014 365 403 794 75
-0.000 001 270 492 14	0.003 489 892 355 49	-0.000 739 953 072 98	0.003 503 516 779 55
-0.000 893 371 806 83	0.000 190 107 680 95	-0.001 140 711 814 40	0.000 221 241 868 35
-0.000 125 135 070 27	-0.000 155 815 931 95	-0.000 176 506 103 26	-0.000 219 364 588 85
0.000 030 467 474 55	-0.000 050 911 099 30	-0.000 075 249 064 44	-0.000 054 277 085 49
0.000 017 211 350 04	0.000 032 835 753 02	-0.000 022 843 139 09	0.000 013 733 195 71
$a_3 = 0.489\ 8$	$b_3 = 0.167\ 965\ 022\ 045\ 03$	$\gamma_3 = -0.038\ 948\ 829\ 064\ 97$	$T_3 = 9.314\ 498\ 328\ 155\ 76$
C	D	P	Q
-0.366 836 301 289 14	0	0.819 977 009 213 38	0
-0.143 273 316 789 30	-0.843 235 105 494 53	0.322 400 690 959 99	0.286 460 425 033 28
0.252 569 832 786 81	-0.210 544 858 213 13	0.146 182 248 156 52	-0.055 466 218 230 91
0.084 195 307 373 07	0.023 647 110 177 36	0.082 887 647 363 52	0.043 600 730 192 32
0.009 909 617 260 91	0.029 675 963 072 60	-0.008 045 138 905 64	0.037 182 274 633 66
-0.010 392 626 369 41	0.010 672 910 276 27	-0.011 234 111 820 76	0.011 089 300 416 22
-0.006 696 413 296 72	-0.002 568 301 371 30	-0.019 056 973 187 13	-0.000 928 946 472 81
-0.000 518 353 223 76	-0.001 995 467 956 24	-0.000 151 072 526 93	-0.002 546 006 449 57
0.001 647 493 987 66	-0.001 198 435 012 76	-0.006 254 871 219 01	0.001 037 339 228 47

3 讨论

经上述分析及数值结果显示:

1) 动力系统 (1) 的极限环的存在性、数目及稳定性可以具体定量算出;

2) 极限环相轨、频率、周期及稳定指数的定量表达式由式 (31) - (35) 表示;

3) 变量替换 (3) 实际上是将时程空间 $(x(t), y(t))$ 上系统 (1) 的讨论, 转换成以 φ 为相角的相空间 $(x(\varphi), y(\varphi))$ 中系统 (4) 的讨论。经此变换, 系统极限环的振幅、偏心矩、相轨线形状及分布不变 (三个极限环的相图与数值法的比较见图 2), 但周期改变: 变换后的周期恒为 2π , 而时程空间中, 由式 (34) 算得的三个极限环的周期 T 分别约为 7.65、8.313、9.31 (见表 1, 与数值积分的结果 7.65, 8.313, 9.2 几乎完全一致), 比如最大周期环的 $x-t, x-\varphi$ 及 $y-t, y-\varphi$ 曲线分别见图 5、图 6。

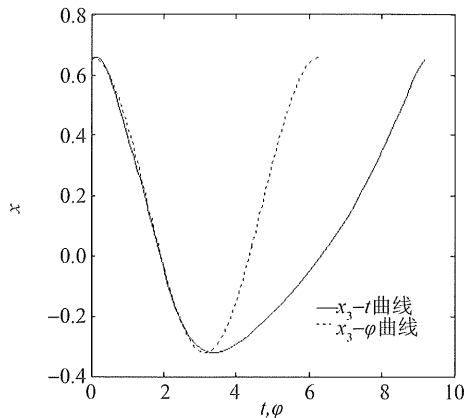


图 5 x 的时程和相程曲线

Fig. 5 Curves of time-distance and phase-distance for x

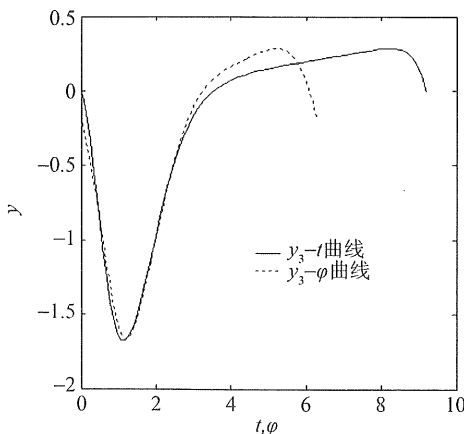


图 6 y 的时程和相程曲线

Fig. 6 Curves of time-distance and phase-distance for y

4) 图 7 给出三个极限环在 $\dot{x}\dot{y}$ 平面上的速率曲线。虽然三个环都是系统的近似解轨线, 但这些解函数的三根速率曲线无公共交点, 由此进一步具体说明, 平面多项式微分系统极限环的数目 (即 Hilbter 第 16 问题第二部分) 不能简单地由代数方法解决。

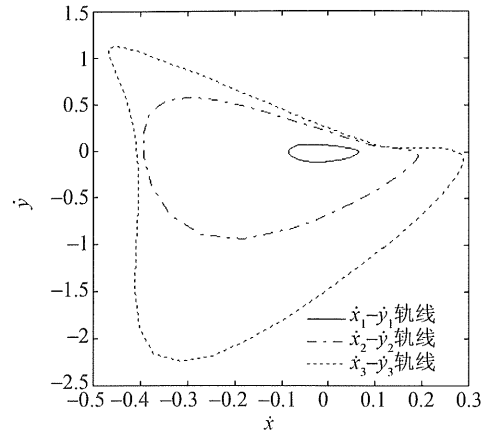


图 7 三个极限环在 $\dot{x}-\dot{y}$ 平面上速率线

Fig. 7 rate curves of three limit cycles on the $\dot{x}-\dot{y}$ plane

5) 式 (38) 给定的 $\beta_2 - a$ 曲线 (如图 1) 显示, 系统有四个环, 一度疑为存在极限环的 $H(4, 0)$ 分布 (目前只知道有 $H(3, 1)$ 分布)。经数值和解析相结合的反复分析, 澄清了较大的环是同宿环的近似而不是极限环。

参考文献:

- [1] NAYFEH A H, BALACHANDRAN B. Applied nonlinear dynamics [M]. New York: Wiley, Analytical Computational and Experimental Methods, 1995.
- [2] NAYFEH A H. Introduction to perturbation techniques [M]. New York: Wiley, 1993.
- [3] STORTI D W, Rand R H. Dynamics of two strongly coupled van der Pol oscillators [J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 1982, 17: 143 - 152.
- [4] SPRYSL H. Internal resonance of non-linear autonomous vibrating systems with two degrees of freedom [J]. Journal of Sound and Vibration, 1987, 112: 63 - 67.
- [5] XU Z, CHAN H S Y, CHUNG K W. Separatrices and limit cycles of strongly nonlinear oscillators by the perturbation-incremental method [J]. Nonlinear Dynamics, 1996, 11: 213 - 233.
- [6] CHAN H S Y, CHUNG K W, XU Z. A perturbation-incremental method for strongly non-linear oscillator [J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 1996, 31: 59 - 72.

(下转第 51 页)

参考文献:

- [1] 陈清泉, 路甬祥, 詹宜巨. 21 世纪的绿色交通工具 [M]. 广州: 暨南大学出版社, 2000.
- [2] CHAN C C. Engineering philosophy of electric vehicles [J]. *Electric Machines and Drives*, 1999(5): 255 - 257.
- [3] WYCZALEK F A. Hybrid electric vehicles: year 2000 status [J]. *IEEE Aerospace and Electronics Systems Magazine*, 2001, 16(3): 15 - 25.
- [4] 余志生. 汽车理论 [M]. 北京: 机械工业出版社, 1990
- [5] MEHRDAD Ehsani, YIMIN Gao, SEBASTIEN E Gay, et al. Modern electric, hybrid electric, and fuel cell vehicles fundamentals, theory and design [M]. Boca Raton FL: CRC, 2004.
- [6] 刘清虎, 郭孔辉. 动力参数的选择对纯电动汽车性能的影响 [J]. *湖南大学学报: 自然科学版*, 2003, 30(3): 62 - 64.
- [7] 杜荣荣. 姬芬竹电动汽车动力传动系统评价体系参数 [J]. *辽宁工程技术大学学报: 自然科学版*, 2008, 27(2): 272 - 275.
- [8] 任国军, 杨久青. 电动汽车动力性能分析与计算 [J]. *汽车科技*, 2006(3): 18 - 20.
- [9] 何洪文, 余晓江, 孙逢春. 电动车辆设计中的匹配理论研究 [J]. *北京理工大学学报*, 2002, 22(6): 704 - 706.
- [10] 陈清泉, 孙逢春, 祝嘉光. 现代电动汽车技术 [M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2002: 178 - 180.
- [11] 李国良, 初亮. 采用交流感应电机的电动汽车动力传动系统的合理匹配 [J]. *吉林工业大学自然科学学报*, 2001, 31(4): 6 - 11.
- [12] 何仁, 商高高. 汽车动力传动系参数的优化方法 [J]. *江苏理工大学学报: 自然科学版*, 2000, 21(6): 61 - 64.
- [13] 中国国家标准化管理委员会. GB/T 18358 - 2005 电动汽车、动力性能及试验方法 [S]. 北京: 中国标准出版社, 2005.
- [7] CHAN H S Y, CHUNG K W, XU Z. Stability and bifurcation of limit cycles by the perturbation-incremental method [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 206: 589 - 604.
- [8] CHAN H S Y, CHUNG K W, XU Z. Calculation of limit cycles, in *Proceedings of the 3rd International Conference on Nonlinear Mechanics [C]* // Shanghai: Shanghai University Press, 1998: 597 - 601.
- [9] CHEN G, LI C, LIU C, et al. The cyclicity of period annuli of some classes of reversible quadratic systems, *DISC [J]*. *Cont in Dyn Sys*, 2006(16): 157 - 177.
- [10] GASULL A, GUILLAMON A. Viladelprat [J]. J the Period Function for Second-order Quadratic ODEs is Monotone, *Qual Th Dyn Sys*, 2004(4): 329 - 352.
- [11] BONORINO L, BRIETZK E, LUKASZCYK J P. Properties of the period function for some hamiltonian systems and homogeneous solutions of a semilinear elliptic equation [J]. *J Diff Eqns*, 2005(214): 156 - 175.
- [12] HUANG Chengbiao, LIU J. The limit cycles and homoclinic orbits and their Bifurcation of the Bogdanov-Takens system [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*. 2008: 29(9): 1195 - 1202.
- [13] 黄赅彪, 邬华东. 平面二次系统极限环及其稳定与分岔的计算 [J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2008, 47(2): 28 - 31.
- [14] 秦元勋, 索光俭, 杜星福. 关于平面二次系统的极限环 (II) [J]. *中国科学: A 辑*, 1983(4): 417 - 425.

(上接第 46 页)