第 49 卷 第 6 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 6
2010 年 11 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 2010

反热源问题及其数值计算*

贾现正[1]，冯兆永[2]
（1. 山东理工大学理学院，山东 淄博 255049；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要：对于热源项为 $f(t)\phi(x)$ 的反热源问题，在 $f(t)$ 未知的情况下，得到了类似于第一类 Volterra 型积分方程的解决办法，并给出了稳定性分析和数值例子。

关键词：不适定问题；反热源问题；稳定性估计
中图分类号：O175 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2010）06－0006－05

Inverse Source Problem and Its Numerical Computation

JIA Xianzheng[1], *FENG Zhaoyong*[2]
(1. School of Science, Shandong University of Technology, Zibo 255049, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: For the inverse source problem where source term is $f(t)\phi(x)$ with $f(t)$ unknown, the solution method similar to the first kind Volterra integral equation is obtained. And stability estimate and numerical examples are given.

Key words: ill-posed problem; inverse source problem; stability estimate

在本文中，我们将考虑下面这种类型的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = g(x,t),(x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ 本身或者是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个区域。我们讨论反热源问题，也即是反演函数 $g(x,t)$ 的问题。反热源问题是一个很有实际价值的问题，例如在工程上，这个问题被用来确定湖水或河水水面的污染源。当然，作为实际的模型，我们必须考虑对流扩散反应方程，但是通过一个变换可以把这个模型转化为热传导方程。

对于反热源问题，已经有了很多结果。对于一般的热源项 $g(x,t)$，通过边界测量数据来确定它是很困难的。因此，我们往往对一些特殊的类进行研究。对于和时间无关的 $g(x,t) = g(x)$，Cannon[1] 用谱理论，Engl 等[2] 应用近似可控方法进行了研究。在文［3］中，Yamamoto 还把文［2］中的结果推广到 $g(x,t) = \alpha(t)f(x)$ 的情况，其中 $\alpha \in C^1[0,T],\alpha(0) \neq 0$ 已知。Hettlich 等[4] 考虑了 $g(x,t) = \chi_D(x)$ 的情况，其中 D 是圆盘 Ω 的一个子集，他们证明了当测量了 Ω 的边界上的两个不同的点的数据，可以确定区域 D，并且给出了数值算法。在文［5－6］中，考虑了 $g(x,t)$ 是非线性函数的情况。

在本文中，我们考虑的是 $g(x,t) = f(t)\phi(x)$ 的情况，其中 $f(t)$ 未知，$\phi(x)$ 是一个具有紧支集的函数。在文［7］中，如果 $f(t)$ 是个至多改变符号 N 次的连续函数，则可以得到一个 Hölder 型的稳定性估计，但是 Hölder 型稳定性估计不能给出唯一性。在本文中，我们对 $f(t)$ 是分段常数的情况进行了研究，得到了一个 Lipschitz 型的稳定性估计，并且给出了数值计算结果。由于问题的不适定性，对带有误差的测量数据计算结果比较差，因此

* 收稿日期：2010－01－04
基金项目：国家青年基金资助项目（10601015）；教育部留学回国人员科研启动基金资助项目
作者简介：贾现正（1978 年生），男，博士；通讯作者：冯兆永；E-mail：fzhaoy@mail.sysu.edu.cn

我们引入了正则化方法进行了计算。

为了简单起见，我们假设 $\Omega \in C^\infty$（见文[8]）。考虑下面的问题

$$u_t = \Delta u + f(t)\phi(x),(x,t) \in \Omega \times (0,T) \quad (1)$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in \Omega \quad (2)$$

$$u(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \quad (3)$$

其中 ϕ 是一个给定的函数，并且满足下面的条件

$$\phi \geqslant 0 \text{ 且在 } \Omega \text{ 中不恒等于 } 0 \quad (4)$$

$$\phi \text{ 在 } \Omega \text{ 中有紧支集} \quad (5)$$

给定

$$u(x_0,t), 0 < t < T$$

其中 $x_0 \in \Omega/\mathrm{supp}\phi$。我们的主要任务就是得到未知的函数 $f(t), 0 \leqslant t \leqslant T$，并且给出一个条件稳定性估计。

1　已有的结果

在文［7］中，为了得到条件稳定性结果，需要下面的不等式，这里我们简单叙述这些结果。

定理 1　令 $p \geqslant 1, \delta > 0, 0 \leqslant \alpha < T, f,g \in L^\infty(0,T)$ 满足

$$0 \leqslant f,g \leqslant M < \infty, 0 < t < T$$

则

$$\|f\|_{L^p(\alpha,T)} \|g\|_{L^p(0,\delta)} \leqslant M^{\frac{2p-2}{p}} \left(\int_\alpha^{T+\delta} \left(\int_\alpha^t f(s)g(t-s)\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{p}}$$

特别地，

$$(f*g)(t) = \int_0^t f(t-s)g(s)\mathrm{d}s, 0 < t < T$$

对 $\alpha = 0$，有

$$\|f\|_{L^p(0,T)} \|g\|_{L^p(0,\delta)} \leqslant M^{\frac{2p-2}{p}} \|f*g\|^{\frac{1}{p}}_{L^1(0,T+\delta)}$$

在文［7］中，对 $\Omega = \mathbb{R}^n$ 和 $f \in \mathscr{U}$ 得到了一个 Hölder 型的估计。其中

$$\mathscr{U} = \{f \in C[0,T]; \|f\|_{C[0,T]} \leqslant M, \ f \text{ changes the signs at most } N\text{-times}\}$$

定理 2　假设 ϕ 满足（4）－（5）以及下面的条件

$$\phi \in C^\infty(\Omega), \text{if} \quad n \geqslant 4$$

$$\phi \in L^2(\Omega), \text{if} \quad n \leqslant 3$$

并且令

$$\begin{cases} p > \dfrac{4}{4-n}, n \leqslant 3 \\ p > 1, n \geqslant 4 \end{cases}$$

则任给 $\delta > 0$，存在一个常数 $C = C(x_0,\phi,T,p,\delta,\mathscr{U}) > 0$，使得

$$\|f\|_{L^p(0,T)} \leqslant C \|u(x_0,\cdot)\|^{\frac{1}{p^N}}_{L^1(0,T+\delta)}$$

对任意的 $f \in \mathscr{U}$ 都成立。

推论 1　在定理 2 中，如果把 Y 换成

$P_N = \{f; f$ 是一个阶数不超过 N 的多项式且 $\|f\|_{C[0,T]} \leqslant M\}$

则可以得到同样的结果。

注：定理 2 和推论 1 的结果是有缺陷的，结论中的 Hölder 型稳定性估计不能给出唯一性。

我们所感兴趣的是当 $f(t)$ 是一个分段常数函数的情况，而在这种情况下，$f(t)$ 可以有无数个零点。对于这种情况，我们得到 Lipschitz 型的稳定性结果[9]。

2　我们的结果

对于问题(1)－(3)的解 $u(x,t)$，我们可以把它表示成下面的形式[10－11]

$$u(x,t) = \int_0^t \int_\Omega K(x,y,t-s)f(s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

$$x \in \Omega, \ t > 0$$

其中 $K(x,y,t)$ 是问题（1）－（3）的基本解。关于这个表示形式可以参考文［11］。

同样地，从文［11］知道

$$K(x,y,t) > 0, \ t > 0$$

令

$$\mu_{x_0}(t) = \int_\Omega K(x_0,y,t)\phi(y)\mathrm{d}y, \ t > 0$$

有

$$u(x_0,t) = \int_0^t \mu_{x_0}(t-s)f(s)\mathrm{d}s, \ 0 < t < T \quad (6)$$

这是一个关于函数 f 的第一类 Volterra 型的积分方程。

下面考虑 $f \in F = \{f$ 是一个 $[0,T]$ 上的分段常数函数$\}$ 的情况，得到如下结果。

定理 3　（唯一性）对于问题（1）－（3）和已知的条件 $u(x_0,t)$，如果函数 $f \in F$，则除了有限个点以外，这样的 f 是唯一确定的。

证明　假设存在两个函数 $f_1(t), f_2(t) \in F$ 满足（1）－（3）。并假设 f_1 和 f_2 的间断点分别为 $0 = t_0^1 < t_1^1 < \cdots < t_{l_1}^1 = T$ 和 $0 = t_0^2 < t_1^2 < \cdots < t_{l_2}^2 = T$，且 $f_1(t) = f_j^1, t \in (t_{j-1}^1, t_j^1], f_2(t) = f_j^2, t \in (t_{j-1}^2, t_j^2]$。

按从小到大的顺序重新排列这些点，并且假设重排后的间断点序列为 $0 = \tau_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_{l_3} = T$，则对 $0 < t < \tau_1$，

$$\int_0^t \mu_{x_0}(t-s)(f_1(s) - f_2(s))\mathrm{d}s =$$

$$u(x_0,t) - u(x_0,t) = 0$$

即

$$(f_1^1 - f_1^2)\int_0^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s = 0$$

而 $\int_0^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s > 0, 0 < t < \tau_1$，从而有 $f_1(t) = f_2(t)$，$0 < t < \tau_1$。

对于 $\tau_1 < t < \tau_2$，有

$$\int_0^t \mu_{x_0}(t-s)(f_1(s) - f_2(s))\mathrm{d}s =$$

$$\int_{\tau_1}^t \mu_{x_0}(t-s)(f_1(s) - f_2(s))\mathrm{d}s = 0$$

同样地可以得到 $f_1(t) = f_2(t), t \in (\tau_1, \tau_2)$。因此重复上述步骤，可以得到 $f_1(t) = f_2(t)$，$t \in (\tau_{j-1}, \tau_j), j = 1,2,\cdots,I_3$。这就得到了唯一性。

假设分段常数函数 f 在 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_I = T$，$I \leqslant N$ 处产生间断，并且 $f(t) = f_j, t \in [t_{j-1}, t_j)$，$j = 1,2,\cdots,I$，同时假设存在常数 $\delta > 0$，使得 $t_i - t_{i-1} \geqslant \delta, i = 1,2,\cdots,I$。

定理4 （稳定性）如果 ϕ 满足条件（4）-（5），且 $x_0 \in \Omega/\mathrm{supp}\phi$。那么对任意 $p > 1$，存在一个常数 $C = C(x_0,\phi,T,p,F,\delta) > 0$ 使得

$$\|f\|_{L^p(0,T)} \leqslant C\|u(x_0,\cdot)\|_{L^p(0,T)}$$

证明 对于分段常数函数 $f(t)$，假设它在 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_I = T$，$I \leqslant N$ 处改变自己的值，并且 $f(t) = f_j, t \in [t_{j-1}, t_j), j = 1,2,\cdots,I$。

由于 $\mu_{x_0}(t)$ 是正的且有界，根据公式（6），有

$$u(x_0,t) = f_1\int_0^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s, 0 \leqslant t \leqslant t_1$$

取上式从0到 t_1 的 L^p 模，得到

$$\|u\|_{L_p(0,t_1)} = |f_1|\left\|\int_0^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s\right\|_{L_p(0,t_1)}$$

这样可以看到

$$|f_1| \leqslant C_1\|u\|_{L_p(0,t_1)} \tag{7}$$

其中 $C_1 > \left(\left\|\int_0^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s\right\|_{L_p(0,t_1)}\right)^{-1}$ 是一个常数。对 $t_1 < t < t_2$，有

$$u(x_0,t) = \int_0^t \mu_{x_0}(t-s)f(s)\mathrm{d}s =$$

$$f_1\int_0^{t_1}\mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s + f_2\int_{t_1}^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s$$

即

$$u(x_0,t) - f_1\int_0^{t_1}\mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s =$$

$$f_2\int_{t_1}^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s$$

从而得到

$$|f_2|\left\|\int_{t_1}^t \mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s\right\|_{L_p(t_1,t_2)} =$$

$$\left\|u(x_0,t) - f_1\int_0^{t_1}\mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s\right\|_{L_p(t_1,t_2)} \leqslant$$

$$\|u(x_0,t)\|_{L_p(t_1,t_2)} + |f_1|\left\|\int_0^{t_1}\mu_{x_0}(t-s)\mathrm{d}s\right\|_{L_p(t_1,t_2)} \leqslant$$

$$\|u(x_0,t)\|_{L_p(t_1,t_2)} + C_2\|u(x_0,t)\|_{L_p(0,t_1)} \leqslant$$

$$C_3\|u(x_0,t)\|_{L_p(0,t_2)}$$

所以

$$|f_2| \leqslant C\|u(x_0,t)\|_{L_p(0,t_2)}$$

因此，由于 $t_i - t_{i-1} \geqslant \delta > 0, i = 1,2,\cdots,I$ 和（7）式，则有

$$\|f\|_{L_p(0,t_2)} \leqslant C\|u(x_0,t)\|_{L_p(0,t_2)}$$

重复这个过程直到 $t_i = T$，从而得到了要证的结果。

3 数值例子

对于问题（1）-（3），如果给定 $u(x_0,t)$，我们需要重构函数 $f(t)$。考虑下面的辅助问题

$$u_t = \Delta u + \phi(x), (x,t) \in \Omega \times (0,T) \tag{8}$$

$$u(x,0) = 0, x \in \Omega \tag{9}$$

$$u(x,t) = 0, (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T) \tag{10}$$

事实上，如果 $\phi(x)$ 给定，可以得到问题（8）-（10）的解，我们用 $\tilde{u}$ 来表示这个解，则

$$\tilde{u}(x,t) = \int_0^t\int_\Omega K(x,y,t-s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s$$

给定数据 $u(x_0,t_i), i = 1,2,\cdots,N$，其中 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$，则对每一个 t_i，有

$$u(x_0,t_i) = \int_0^{t_i}\int_\Omega K(x_0,y,t_i-s)f(s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s,$$

$$i = 1,2,\cdots,N$$

假设 $f(t) = f_i, t \in [t_{i-1}, t_i], i = 1,2,\cdots,N$，则

$$u(x_0,t_i) = \int_0^{t_i}\int_\Omega K(x_0,y,t_i-s)f(s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s =$$

$$\sum_{j=1}^i f_j\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_\Omega K(x_0,y,t_i-s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s =$$

$$f_1\int_0^{t_i}\int_\Omega K(x_0,y,t_i-s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s +$$

$$\sum_{j=2}^i (f_j - f_1)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_\Omega K(x_0,y,t_i-s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s =$$

$$f_1\tilde{u}(x_0,t_i) + (f_2 - f_1)\int_{t_1}^{t_i}\int_\Omega K(x_0,y,t_i-s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s +$$

$$\sum_{j=3}^i (f_j - f_1 - (f_2 - f_1))$$

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_\Omega K(x_0,y,t_i-s)\phi(y)\mathrm{d}y\mathrm{d}s =$$

$$f_1\tilde{u}(x_0,t_i) + (f_2 - f_1)\int_0^{t_i-t_1}\int_\Omega K(x_0,y,t_i - t_1 - s)\phi(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s + \sum_{j=3}^{i}(f_j - f_2)\int_{t_{j-1}}^{t_j}\int_\Omega K(x_0,y,t_i - s)\phi(y)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}s = \cdots = f_1\tilde{u}(x_0,t_i) + \sum_{j=2}^{i}(f_j - f_{j-1})\tilde{u}(x_0,t_i - t_{j-1})$$

从而，可以用上述公式来得到函数$f(t)$ 的离散解。

例 1　选$f(t)$ 为下面的函数

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,1) \\ -1, & t \in [1,2.3) \\ -0.5, & t \in [2.3,3.5) \\ 0.5, & t \in [3.5,4] \end{cases}$$

选取 $\Omega = (0,2)$，$x_0 = 1.5$，$\phi(x) = 1, x \in (0,1)$ 且在 $(0,1)$ 外面 $\phi(x) \equiv 0$。给定数据 $u(x_0,t_i)$，$i = 1,2,\cdots,N$，则可以利用下面的公式来得到 $f(t)$ 的数值近似

$$u(x_0,t_i) = f_1\tilde{u}(x_0,t_i) + \sum_{j=2}^{i}(f_j - f_{j-1})\tilde{u}(x_0,t_i - t_{j-1}), i = 1,2,\cdots,N$$

数值结果如图 1，2 所示。它们之间的误差如图 3 所示。

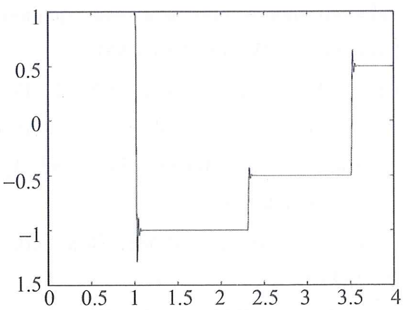

图 1　数值计算的结果

Fig. 1　Numerical result

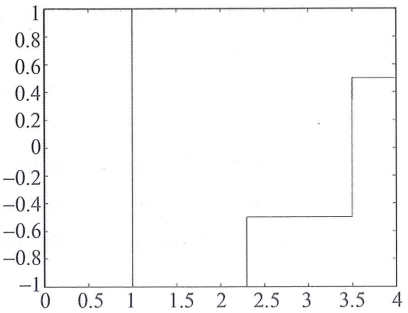

图 2　$f(t)$ 的真实解的图像

Fig. 2　True image of $f(t)$

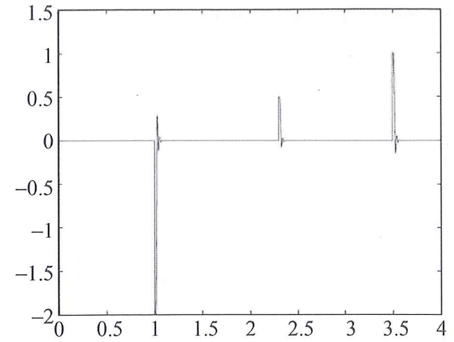

图 3　误差

Fig. 3　The error

如果对测量数据加上 2% 的误差，可以看到计算结果会变得比较差，因此我们在下一节引入正则化算法来解决这个问题。

例 2　现在给出一个二维情况下的例子，其中函数$f(t)$ 是一个分段常数函数，而且其中一段为零。假设问题同样是（1）－（3），区域 $\Omega = (-1,1) \times (-1,1)$，且

$$\phi(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant 0.5 \\ 0, & x \in \Omega \text{ 且 } |x| > 0.5 \end{cases}$$

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t \in [0,0.8) \\ 0, & t \in [0.8,2.2) \\ -2, & t \in [2.2,3] \end{cases}$$

取 $x_0 = (0.7,0.8)$，$T = 3$，数值结果如图 4，5 所示。

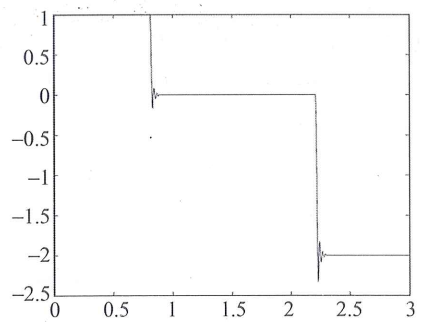

图 4　数值计算的结果

Fig. 4　Numerical result

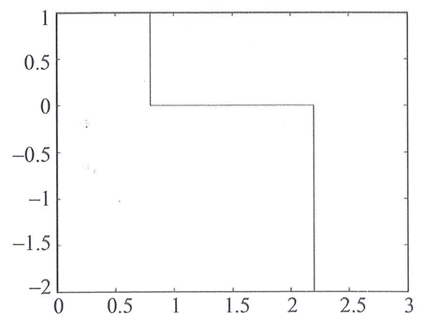

图 5　$f(t)$ 的真实解的图像

Fig. 5　True image of $f(t)$

它们之间的误差如图6所示。

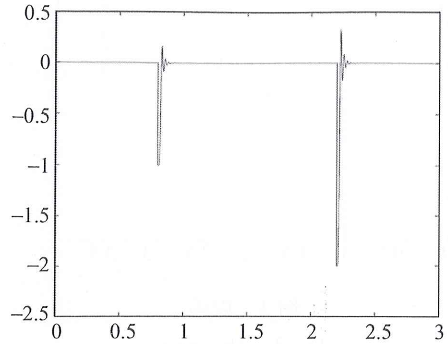

图6 误差
Fig. 6 The error

4 正则化算法

由于上面的数值算法对测量数据的误差非常敏感，也就是说测量数据即使只有很小的误差，而结果也会有很大的误差，因此，我们需要进行正则化处理，这里选取 Tikhonov 正则化方法。

对于上面的算法，离散后需要求解线性方程组 $Ax = b$，而系数矩阵 A 是一个病态矩阵，因此可以对线性方程组实行 Tikhonov 正则化，来求解线性方程组 $(A^{\mathrm{T}}A + \alpha I)x = A^{\mathrm{T}}b$。假设给定数据的误差水平为 δ，也即给定数据与实际数据之间的误差小于等于 δ。故我们可以取 $\alpha = \delta^2$，参见文 [12]。

数值例子：我们采用前一节的第一个例子，对给定数据加上2%的误差，并采用正则化的方法进行计算，数值结果如图7。

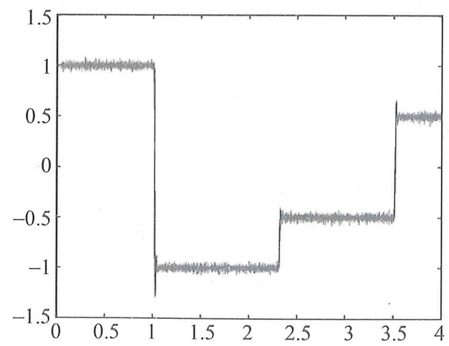

图7 正则化算法的数值结果
Fig. 7 Numerical result of regularization algorithm

5 结 论

我们对热源项为 $f(t)\phi(x)$ 类型的反热源问题做了研究，其中 $f(t)$ 是一个分段常数的函数。得到了这种带有特殊热源项情况的反热源问题的一个稳定性估计，并且对于这个问题提出了数值计算的方法并给出了数值例子以及正则化算法。

参考文献：

[1] CANNON J R. Determination of an unknown heat source from overspecified boundary data[J]. SIAM J Numer Anal, 1968, 5:275 – 286.

[2] ENGL H W, SCHERZER O, YAMAMOTO M. Uniqueness of forcing terms in linear partial differential equations with overspecified boundary data[J]. Inverse Problems, 1994, 10: 1253 – 1276.

[3] YAMAMOTO M. Conditional stability in determination of densities of heat sources in a bounded domain, estimation and control of distributed parameter systems [M]. Birkhäuser, 1994.

[4] HETTLICH F, RUNDELL W. Identification of a discontinuous source in the heat equation[J]. Inverse Problems, 2001, 17: 1465 – 1482.

[5] DUCHATEAU P, RUNDELL W. Unicity in an inverse problem for an unknown reaction term in a reaction-diffusion-equation[J]. J Diff Equations, 1985, 59: 155 – 164.

[6] CANNON J R, DUCHATEAU P. Structural identification of an unknown source term in a heat equation[J]. Inverse Problems, 1998, 14: 535 – 551.

[7] SAITOH S, TUAN V K, YAMAMOTO M. Reverse convolution inequalities and applications to inverse heat source problems [J]. J Inequal Pure and Appl Math, 2002, 3(5): Article 80.

[8] ADAMS R A. Sobolev spaces[M]. New York: Academic Press, 1975.

[9] IMANUVILOV O Y, YAMAMOTO M. Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate [J]. Inverse Problems, 1998, 14:1229 – 1245.

[10] PAZY A. Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1983.

[11] ITÔ S. Diffusion equations [M]. AMS, Providence, 1992.

[12] CHENG J, YAMAMOTO M. One new strategy for a priori choice of regularizing parameters in Tikhonov's regularization [J]. Inverse Problems, 2000, 16: L31 – L38.