第49卷 第5期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 49 No. 5
2010年 9月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Sep. 2010

一类新三元紧支撑正交小波及其构造*

徐应祥，关履泰，许伟志
（中山大学科学计算与计算机应用系，广东 广州 510275）

摘　要：研究了一类新三元紧支撑正交小波的构造方法，由此构造方法可得到一类新的三元张量积（可分的）小波和三元非张量积（不可分）小波，而且构造过程较为简单。在给出详细的构造方法的同时，讨论了这类新的三元小波所具有的消失矩性质，最后给出了一些具体的例子。

关键词：紧支撑；非张量积；正交小波；尺度函数；共轭滤波器
中图分类号：O174.2；O241.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2010）05－0015－07

Construction of a Class of New Tri-variate Compactly Supported Orthogonal Wavelets

XU Yingxiang, *GUAN Lütai*, *XU Weizhi*
(Department of Scientific Computation and Computer Application,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: A method of construction of tri-variate compactly supported orthogonal wavelets is studied. By the constructing method, some new tri-variate separable and tri-variate non-separable wavelets can be obtained and the method is very simple. Giving the detail of the constructing method, the vanishing moments properties of this new tri-variate wavelets are also discussed. Some numerical examples are given.

Key words: compactly supported; non-tensor product; orthogonal wavelet; scaling function; conjugate filter

小波分析是在 Fourier 分析基础上发展起来的数学分支，它是 Fourier 分析、泛函分析、数值分析的完美结晶。自小波分析产生的近二十多年来，小波分析理论逐步得到系统化，其理论包含的内容丰富而深刻，且应用极其广泛，遍及信号分析、图像处理、计算机识别、地震勘探等众多领域。为使小波变换成为真正的实用工具，必须构造不同的小波。对于一元小波的构造经 Daubechies 等众多学者的工作，其理论与方法已相当成熟[1-7]。但现实世界的大量现象是多元信号，如图像信息和视频信号等。当前，人们大多用张量积（乘积型或可分的）小波处理多元信号。数值实验表明，用张量积小波进行数据的分解与重构不能很好地揭示高频信带的特征。为弥补这些缺陷，就有必要研究非张量积型多元小波的理论和构造方法。注意到设计和构造非张量积正交小波仍然是一件相当困难的工作，现在这方面的工作并不太多[8-13]，其理论和方法远不像一元小波那样成熟。

文献［13］提出了一种三元正交小波的构造方法，构造过程相对较为复杂，不易实现，在文献中也没有给出具体的算例。受前人工作的启发，本文的主要目的是给出一类不同于文献［13］的新的三元正交非张量积小波的构造方法。并对相应的结果进行了详细证明，给出具体例子，由构造过程

* 收稿日期：2009－09－01
基金项目：教育部高等学校博士点科研基金资助项目（200805581022）
作者简介：徐应祥（1978年生），男，博士生，讲师；E-mail：xuyx_78@126.com

可知该方法较为简单易行。

用 $\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{Z}$ 分别表示实数集合与整数集合，令 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 和 $l^2(\mathbb{Z}^3)$ 分别表示 $\mathbb{R}^3$ 上的平方可积函数集合 $\{f(x):\int_{\mathbb{R}^3}|f(x)|^2\mathrm{d}x<\infty\}$ 与在 $\mathbb{Z}^3$ 上平方可和序列集合 $\{s_m:\sum_{m\in\mathbf{Z}^3}|s_m|^2<\infty\}$。再记

$$v_0=(0,0,0),v_1=(1,0,0),v_2=(0,1,0),$$
$$v_3=(0,0,1),v_4=(1,1,0),v_5=(1,0,1),$$
$$v_6=(0,1,1),v_7=(1,1,1)$$

则有

$$\mathbb{Z}^3=\bigcup_{j=0}^{7}(v_j+2\mathbb{Z}^3),$$
$$(v_i+2\mathbb{Z}^3)\cap(v_j+2\mathbb{Z}^3)=\phi,i\neq j \quad (1)$$

其中 $i,j=0,1,\cdots,7$，$2T=\{2x:x\in T\}$，$T_1+T_2=\{x_1+x_2:x_1\in T_1,x_2\in T_2\}$，$\phi$ 是空集。换句话说 Z^3 可分解为如下 8 个子集

$\{(2i,2j,2k):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$，
$\{(2i+1,2j,2k):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$，
$\{(2i,2j+1,2k):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$，
$\{(2i,2j,2k+1):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$，
$\{(2i+1,2j+1,2k):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$，
$\{(2i+1,2j,2k+1):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$，
$\{(2i,2j+1,2k+1):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$，
$\{(2i+1,2j+1,2k+1):i,j,k\in\mathbb{Z}\}$。

定义1 若 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 的闭子空间序列 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 满足：(i) $V_j\subset V_{j+1},\forall j\in\mathbb{Z}$ (2)

(ii) $\overline{\bigcup_{j=-\infty}^{+\infty}V_j}=L^2(\mathbb{R}^3)$，$\bigcap_{j=-\infty}^{+\infty}V_j=\{0\}$ (3)

(iii) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(2x)\in V_{j+1},\forall j\in\mathbb{Z}$ (4)

(iv) $f(x)\in V_j\Leftrightarrow f(x-k)\in V_{j+1},\forall k\in\mathbb{Z}^3$ (5)

(v) 存在函数 $\varphi(x)\in V_0$，使 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}^3}$ 构成 V_0 的一组 Riesz 基，即存在常数 $0<A\leqslant B<\infty$，使对任意的 $\{c_k\}_{k\in\mathbf{Z}^3}\in l^2(\mathbb{Z}^3)$，有

$$A\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}|c_k|^2\leqslant\|\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}c_k\varphi(x-k)\|^2\leqslant B\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}|c_k|^2 \quad (6)$$

且 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}^3}$ 在 V_0 中完备。

则称 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ 为 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上的一个多尺度分析，称 $\varphi(x)$ 为尺度函数。进一步若 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}^3}$ 构成 V_0 的一组正交基，则称 $\varphi(x)$ 为正交尺度函数。以下均设 $\varphi(x)$ 为正交尺度函数。

一般 V_j 可表示为 $V_j=\mathrm{span}\{\varphi_{j,k}:k\in\mathbb{Z}^3\}$，其中 $\varphi_{j,k}=2^{\frac{3j}{2}}\varphi(2^jx-k)$，且 $\{\varphi_{j,k}\}$ 为 V_j 的一组规范正交基，$x=(x_1,x_2,x_3)$，$k=(k_1,k_2,k_3)$，$x\in\mathbb{R}^3$，$k\in\mathbb{Z}^3$。再由 (2) 式可知，若 $\frac{1}{2^3}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)\in V_{-1}\subset V_0$，则有

$$\frac{1}{2^3}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}h_k\varphi(x-k),h_k\in\mathbb{R} \quad (7)$$

其中 $h_k=\frac{1}{2^3}\int_{\mathbf{R}^3}\varphi\left(\frac{1}{2}x\right)\varphi(x-k)\mathrm{d}x$。由 (7) 式两边经过 Fourier 变换可得

$$\hat{\varphi}(2\omega)=H(\omega)\hat{\varphi}(\omega),\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\mathbb{R}^3 \quad (8)$$

其中 $H(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}h_k e^{-ik\cdot\omega}$，是以 $2\pi k(k\in\mathbb{Z}^3)$ 为周期的周期函数，称为共轭滤波器，$\{h_k\}$ 称为频率响应。对高维小波已知有下列有用的结果：

引理1[12] $\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}|\hat{\varphi}(\omega+2\pi k)|^2=1$。

定理1[12] 由式 (8) 确定的 $H(\omega)$ 满足如下关系：

(i) $\sum_{j=0}^{7}|H(\omega+\pi v_j)|^2=1$ (9)

(ii) $|H(\omega)|\leqslant 1$, $H(0,0,0)=1$ (10)

让 $V_{j+1}=V_j\oplus W_j$，$W_j=V_j^{\perp}$，由多元多尺度分析理论[12]可知存在七个函数 $\psi^1,\cdots,\psi^7$ 使得如下的函数集合 $\{\psi^p(x-k):p=1,\cdots,7;k\in\mathbb{Z}^3\}$ 组成了 W_j 的正交基，进而 $\{\psi^p(2^qx-k):p=1,\cdots,7;q\in\mathbb{Z};k\in\mathbb{Z}^3\}$ 组成 $L^2(\mathbb{R}^3)$ 的正交基，称 $\psi^p(x)(p=1,\cdots,7)$ 为小波函数。

因为 $\frac{1}{2^3}\psi^p\left(\frac{1}{2}x\right)\in W_{-1}\subset V_0(p=1,\cdots,7)$，故有

$$\frac{1}{2^3}\psi^p\left(\frac{1}{2}x\right)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}g_k^p\varphi(x-k) \quad (11)$$

其中 $g_k^p=\frac{1}{2^3}\int_{\mathbf{R}^3}\psi\left(\frac{1}{2}x\right)\varphi(x-k)\mathrm{d}x$。由 (11) 式两边经过 Fourier 变换可得

$$\hat{\psi}^p(2\omega)=G^p(\omega)\hat{\varphi}(\omega),\omega=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)\in\mathbb{R}^3 \quad (12)$$

其中 $G^p(\omega)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^3}g_k^p e^{-ik\cdot\omega}(p=1,\cdots,7)$，仍然是以 $2\pi k$ ($k\in\mathbb{Z}^3$) 为周期的周期函数。

定理2[12] 共轭滤波器 $H(\omega)$ 与 $G^p(\omega)(p=1,\cdots,7)$ 有如下关系：

(i) $\sum_{j=0}^{7}H(\omega+\pi v_j)G^p(\omega+\pi v_j)=0$ (13)

(ii) $\sum_{j=0}^{7}G^m(\omega+\pi v_j)G^n(\omega+\pi v_j)=\delta_{mn}$，
$m,n=1,\cdots,7$ (14)

1　三维小波共轭滤波器的构造

由前可知，构造三维小波正交尺度函数与三维小波函数的关键是构造满足定理 1 的滤波器 $H(\omega)$。由定理 1 知 $H(\omega)$ 满足如下的条件

$$\begin{gathered}H(0,0,0)=1,\\ H(\pi,0,0)=H(0,\pi,0)=H(0,0,\pi)=\\ H(\pi,\pi,0)=H(\pi,0,\pi)=H(0,\pi,\pi)=\\ H(\pi,\pi,\pi)=0\end{gathered}\tag{15}$$

为满足此条件，我们构造如下形式的 $H(\omega)$

$$\begin{aligned}H(\omega)=&\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{12}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{13}\omega_3}}{2}\right)^{N_1}\times\\&\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{21}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{23}\omega_3}}{2}\right)^{N_2}\times\\&\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{31}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{32}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_3}}{2}\right)^{N_3}Q(\omega)\end{aligned}\tag{16}$$

其中 N_1,N_2,N_3 是任意取定的 3 个正整数，$m_{12},m_{13},m_{21},m_{23},m_{31},m_{32}$ 是任意取定的 6 个非负整数。$Q(\omega)$ 是一个三元三角多项式。显然这样的 $H(\omega)$ 满足条件（15）中除 $H(0,0,0)=1$ 外的所有条件，但后面可以证明这样构造的滤波器也满足 $H(0,0,0)=1$。

引理 2[1-2]　设 A 是一个正的仅含余弦的三角多项式，$A(\omega)=\sum\limits_{n=0}^{N}a_n\cos n\omega(a_n\in\mathbb{R})$，那么存在一个 N 阶三角多项式 $B(\omega)=\sum\limits_{n=0}^{N}b_n\cos n\omega(b_n\in\mathbb{R})$，使得 $|B(\omega)|^2=A(\omega)$。

引理 3[1-2]　对任意的 y 成立 $\sum\limits_{j=0}^{N}\binom{N+j}{j}\cdot[y^j(1-y)^{N+1}+y^{N+1}(1-y)^j]=1$。

记

$$u_1=\frac{\omega_1+2m_{12}\omega_2+2m_{13}\omega_3}{2},$$

$$u_2=\frac{2m_{21}\omega_1+\omega_2+2m_{23}\omega_3}{2},$$

$$u_3=\frac{2m_{31}\omega_1+2m_{32}\omega_2+\omega_3}{2},$$

$$p_i(y)=\sum_{j_i=0}^{N_i-1}\binom{N_i-1+j_i}{j_i}y^{j_i},i=1,2,3$$

再记 $y_1=\cos^2(u_1),y_2=\cos^2(u_2),y_3=\cos^2(u_3),P(y_1,y_2,y_3)=p_1(y_1)p_2(y_2)p_3(y_3)$，则 P 是关于 $\omega_1,\omega_2,\omega_3$ 的三角多项式，且 $p_1(1-y_1),p_2(1-y_2),p_3(1-y_3)$ 都是正的仅含余弦的三角多项式，由引理 2 知存在仅含余弦的三角多项式 $Q_1(u_1),Q_2(u_2),Q_3(u_3)$ 使得 $|Q_1(u_1)|^2=p_1(1-y_1)$，$|Q_2(u_2)|^2=p_2(1-y_2)$，$|Q_3(u_3)|^2=p_3(1-y_3)$。于是选取 $Q(\omega)=Q_1(u_1)Q_2(u_2)Q_3(u_3)$，则可得到：

定理 3　若取

$$\begin{aligned}H(\omega)=&\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{12}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{13}\omega_3}}{2}\right)^{N_1}\times\\&\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{21}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{23}\omega_3}}{2}\right)^{N_2}\times\\&\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{31}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{32}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_3}}{2}\right)^{N_3}\times\\&Q_1\left(\frac{\omega_1+2m_{12}\omega_2+2m_{13}\omega_3}{2}\right)\times\\&Q_2\left(\frac{2m_{21}\omega_1+\omega_2+2m_{23}\omega_3}{2}\right)\times\\&Q_3\left(\frac{2m_{31}\omega_1+2m_{32}\omega_2+\omega_3}{2}\right)\end{aligned}\tag{17}$$

其中 N_1,N_2,N_3 是任意取定的三个正整数，$m_{12},m_{13},m_{21},m_{23},m_{31},m_{32}$ 是任意取定的六个非负整数，则这样选取的 $H(\omega)$ 满足定理 1，即 $H(\omega)$ 是三元正交共轭滤波器。

证明　首先，我们有

$$\begin{aligned}|H(\omega)|^2=&\left|\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{12}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{13}\omega_3}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\times\\&\left|\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{21}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{23}\omega_3}}{2}\right)^{N_2}\right|^2\times\\&\left|\left(\frac{1+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{31}\omega_1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2m_{32}\omega_2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_3}}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times\\&\left|Q_1\left(\frac{\omega_1+2m_{12}\omega_2+2m_{13}\omega_3}{2}\right)\right|^2\times\\&\left|Q_2\left(\frac{2m_{21}\omega_1+\omega_2+2m_{23}\omega_3}{2}\right)\right|^2\times\\&\left|Q_3\left(\frac{2m_{31}\omega_1+2m_{32}\omega_2+\omega_3}{2}\right)\right|^2=\\&\cos^{2N_1}(u_1)\cos^{2N_2}(u_2)\cos^{2N_3}(u_3)\times\\&|Q_1(u_1)|^2|Q_2(u_2)|^2|Q_3(u_3)|^2=\\&y_1^{N_1}y_2^{N_2}y_3^{N_3}p_1(1-y_1)p_2(1-y_2)p_3(1-y_3)\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{7}|H(\omega+\pi v_j)|^2=\\&y_1^{N_1}y_2^{N_2}y_3^{N_3}p_1(1-y_1)p_2(1-y_2)p_3(1-y_3)+\\&(1-y_1)^{N_1}y_2^{N_2}y_3^{N_3}p_1(y_1)p_2(1-y_2)p_3(1-y_3)+\\&y_1^{N_1}(1-y_2)^{N_2}y_3^{N_3}p_1(1-y_1)p_2(y_2)p_3(1-y_3)+\\&y_1^{N_1}y_2^{N_2}(1-y_3)^{N_3}p_1(1-y_1)p_2(1-y_2)p_3(y_3)+\\&(1-y_1)^{N_1}(1-y_2)^{N_2}y_3^{N_3}p_1(y_1)p_2(y_2)p_3(1-y_3)+\\&(1-y_1)^{N_1}y_2^{N_2}(1-y_3)^{N_3}p_1(y_1)p_2(1-y_2)p_3(y_3)+\\&y_1^{N_1}(1-y_2)^{N_2}(1-y_3)^{N_3}p_1(1-y_1)p_2(y_2)p_3(y_3)=\end{aligned}$$

$$[y_1^{N_1}p_1(1-y_1)+(1-y_1)^{N_1}p_1(y_1)]\times$$
$$[y_2^{N_2}p_2(1-y_2)+(1-y_2)^{N_2}p_2(y_2)]\times$$
$$[y_3^{N_3}p_3(1-y_3)+(1-y_3)^{N_3}p_3(y_3)]$$

而由引理 3 可知

$$y_i^{N_i}p_1(1-y_i)+(1-y_i)^{N_i}p_1(y_i)=$$
$$y_i^{N_i}\sum_{j_i=0}^{N_i-1}\binom{N_i-1+j_i}{j_i}(1-y_i)^{j_i}+$$
$$(1-y_i)^{N_i}\sum_{j_i=0}^{N_i-1}\binom{N_i-1+j_i}{j_i}y_i^{j_i}=\sum_{j_i=0}^{N_i-1}\binom{N_i-1+j_i}{j_i}$$
$$[(1-y_i)^{N_i}y_i^{j_i}+y_i^{N_i}(1-y_i)^{j_i}]=1,$$
$$i=1,2,3$$

故有 $\sum_{j=0}^{7}|H(\omega+\pi v_j)|^2=1$。

另由构造中所得 $H(\omega)$ 的表达式可知 $H(\pi,0,0)=H(0,\pi,0)=H(0,0,\pi)=H(\pi,\pi,0)=H(\pi,0,\pi)=H(0,\pi,\pi)=H(\pi,\pi,\pi)=0$，因此，在上式中如果令 $\omega=(0,0,0)$，便立即可得 $H(0,0,0)=1$。

综上所述，如此构造的 $H(\omega)$ 是一个三元正交共轭滤波器。

显然，我们这种方法不同于文献［13］的方法。我们的方法更为简单直接。

定理 4 根据定理 3 中三元正交共轭滤波器 $H(\omega)$ 构造的三元尺度函数 $\varphi(x)$ 当 $m_{12}=m_{13}=m_{21}=m_{23}=m_{31}=m_{32}=0$ 时是可分的，而当 m_{12}，$m_{13},m_{21},m_{23},m_{31},m_{32}$ 不全为零时是不可分的。

证明 当 $m_{12}=m_{13}=m_{21}=m_{23}=m_{31}=m_{32}=0$ 时 $H(\omega)$ 是可分的，故如此构造的三元尺度函数是可分的。当 $m_{12},m_{13},m_{21},m_{23},m_{31},m_{32}$ 不全为零时 $H(\omega)$ 是不可分的，故如此构造的三元尺度函数是不可分的。

由定理 3，定理 4 可构造出一大类的三元可分与不可分的正交尺度函数。另外从定理 3 看出如此构造的三元正交共轭滤波器 $H(\omega)$ 具有有限长度，即只有有限个 h_k 不等于零，因此根据此滤波器构造出的三元尺度函数与小波函数都是紧支撑的。令 $z_1=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_1}$，$z_2=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_2}$，$z_3=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_3}$，则定理 3 构造的共轭滤波器可表为

$$H(z_1,z_2,z_3)=\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\left(\frac{1+z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}$$
$$\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_2}Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})\times Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)$$

于是有

定理 5 类似于文献［1］中对二元小波理论中的讨论，可选取三元小波对应的 $G^p(\omega)(p=1,\cdots,7)$ 如下

$$G^1(\omega)=G^1(z_1,z_2,z_3)=$$
$$z_1\overline{\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}}\left(\frac{1+z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}\times$$
$$\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)\qquad(18)$$

$$G^2(\omega)=G^2(z_1,z_2,z_3)=$$
$$z_2\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\overline{\left(\frac{1-z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}}\times$$
$$\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)\qquad(19)$$

$$G^3(\omega)=G^3(z_1,z_2,z_3)=$$
$$z_3\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\left(\frac{1+z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}\times$$
$$\overline{\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}}Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)\qquad(20)$$

$$G^4(\omega)=G^4(z_1,z_2,z_3)=$$
$$z_1z_2\overline{\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}}\,\overline{\left(\frac{1-z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}}\times$$
$$\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)\qquad(21)$$

$$G^5(\omega)=G^5(z_1,z_2,z_3)=$$
$$z_2z_3\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\overline{\left(\frac{1-z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}}\times$$
$$\overline{\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}}Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)\qquad(22)$$

$$G^6(\omega)=G^6(z_1,z_2,z_3)=$$
$$z_1z_3\overline{\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}}\left(\frac{1+z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}\times$$
$$\overline{\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}}Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)\qquad(23)$$

$$G^7(\omega)=G^7(z_1,z_2,z_3)=$$
$$z_1z_2z_3\overline{\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\left(\frac{1-z_1^{2m_{21}}z_2z_3^{2m_{23}}}{2}\right)^{N_2}}\times$$
$$\overline{\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}}Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})\times$$
$$Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)\qquad(24)$$

对应的三元正交小波为 $\psi^p\left(\frac{1}{2}x\right)=2^3\sum_{k\in\mathbb{Z}^3}g_k^p\varphi(x-k)$，$p=1,\cdots,7;k\in\mathbb{Z}^3$。

证明　由 $H(\omega)$ 的周期性，并应用引理 3 和引理 3 中的记号，可知

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^{7}H(\omega+\pi v_j)\,\overline{G^2(\omega+\pi v_j)}=\\
&H(z_1,z_2,z_3)\,\overline{G^2(z_1,z_2,z_3)}+\\
&H(-z_1,z_2,z_3)\,\overline{G^2(-z_1,z_2,z_3)}+\\
&H(z_1,-z_2,z_3)\,\overline{G^2(z_1,-z_2,z_3)}+\\
&H(z_1,z_2,-z_3)\,\overline{G^2(z_1,z_2,-z_3)}+\\
&H(-z_1,-z_2,z_3)\,\overline{G^2(-z_1,-z_2,z_3)}+\\
&H(z_1,-z_2,-z_3)\,\overline{G^2(z_1,-z_2,-z_3)}+\\
&H(-z_1,z_2,-z_3)\,\overline{G^2(-z_1,z_2,-z_3)}+\\
&H(-z_1,-z_2,-z_3)\,\overline{G^2(-z_1,-z_2,-z_3)}=\\
&z_2^{-1}\Bigg[\left|\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\cdot\\
&\left|\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times|Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)|^2+\left|\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\cdot\\
&\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\left|\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times\\
&|Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})\,|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)|^2-\\
&\left|\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\cdot\\
&\left|\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times|Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)|^2+\left|\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\cdot\\
&\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\left|\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times\\
&|Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})\,|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)|^2-\\
&\left|\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\cdot\\
&\left|\left(\frac{1+z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times|Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},z_3)|^2-\left|\left(\frac{1+z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\cdot\\
&\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\left|\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times\\
&|Q_1(z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})\,|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)|^2+\\
&\left|\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\cdot\\
&\left|\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times|Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)|^2-\left|\left(\frac{1-z_1z_2^{2m_{12}}z_3^{2m_{13}}}{2}\right)^{N_1}\right|^2\cdot\\
&\left(\frac{1-z_1^{4m_{21}}z_2^2z_3^{4m_{23}}}{4}\right)^{N_2}\left|\left(\frac{1-z_1^{2m_{31}}z_2^{2m_{32}}z_3}{2}\right)^{N_3}\right|^2\times\\
&|Q_1(-z_1,z_2^{2m_{12}},z_3^{2m_{13}})|^2Q_2(z_1^{2m_{21}},-z_2,z_3^{2m_{23}})\cdot\\
&Q_2(z_1^{2m_{21}},z_2,z_3^{2m_{23}})\,|Q_3(z_1^{2m_{31}},z_2^{2m_{32}},-z_3)|^2=0
\end{aligned}
$$

类似地，经简单计算可知对于其他的 m 有

$$\sum_{j=0}^{7}H(\omega+\pi v_j)\,\overline{G^m(\omega+\pi v_j)}=0,$$

$$\sum_{j=0}^{7}|G^m(\omega+\pi v_j)|^2=1,m=1,\cdots,7$$

因此若令 $a_{0j}=H(\omega+\pi v_j),a_{ij}=G^i(\omega+\pi v_j)$，其中 $i=1,\cdots,7;j=0,1,\cdots,7$，则矩阵 $A=(a_{ij})$ 是一个酉矩阵，所以可如此选取 $G^p(\omega)(p=1,\cdots,7)$，并且 $\psi^p(x)(p=1,\cdots,7)$ 是相应的三元小波函数。

显然，由于 $H(\omega)$ 具有有限长度，所以由定理 5 中选取的 $G^p(\omega)(p=1,\cdots,7)$ 也具有有限长度，因此由定理 5 构造的三元正交小波是具有紧支撑的三元小波。

定理 6　用定理 3 中三元正交共轭滤波器 $H(\omega)$ 构造的三元尺度函数 $\varphi(x)$ 具有如下的消失矩性质：

（i）当 $m_{12}=m_{13}=0$ 时，尺度函数 $\varphi(x)$ 关于 x_1 具有 N_1 阶消失矩，即

$$\int_{\mathbf{R}}x_1^{r_1}\varphi(x)\mathrm{d}x_1=0,r_1=0,1,\cdots,N_1-1\quad(25)$$

（ii）当 $m_{21}=m_{23}=0$ 时，尺度函数 $\varphi(x)$ 关于 x_2 具有 N_2 阶消失矩，即

$$\int_{\mathbf{R}}x_2^{r_2}\varphi(x)\mathrm{d}x_2=0,r_2=0,1,\cdots,N_2-1\quad(26)$$

（iii）当 $m_{31}=m_{32}=0$ 时，尺度函数 $\varphi(x)$ 关于 x_3 具有 N_3 阶消失矩，即

$$\int_{\mathbf{R}}x_3^{r_3}\varphi(x)\mathrm{d}x_3=0,r_3=0,1,\cdots,N_3-1\quad(27)$$

证明　由定理 3 的构造可知，当 $m_{12}=m_{13}=0$ 时，滤波器 $H(\omega)$ 含有因子 $\left(\frac{1+z_1}{2}\right)^{N_1}$，故有

$\left.\frac{\partial^{r_1} H}{\partial \omega_1^{r_1}}\right|_{\omega_1=\pi} = 0$，$r_1 = 0,1,\cdots,N_1-1$，所以有 $\int_{\mathbf{R}} x_1^{r_1}\varphi(x)\mathrm{d}x_1 = 0, r_1 = 0,1,\cdots,N_1-1$。

类似地，当 $m_{21} = m_{23} = 0$ 时，滤波器 $H(\omega)$ 含有因子 $\left(\frac{1+z_2}{2}\right)^{N_2}$。当 $m_{31} = m_{32} = 0$ 时，滤波器 $H(\omega)$ 含有因子 $\left(\frac{1+z_3}{2}\right)^{N_3}$。所以与前类似讨论可知有

$$\int_{\mathbf{R}} x_2^{r_2}\varphi(x)\mathrm{d}x_2 = 0, r_2 = 0,1,\cdots,N_2-1;$$

$$\int_{\mathbf{R}} x_3^{r_3}\varphi(x)\mathrm{d}x_3 = 0, r_3 = 0,1,\cdots,N_3-1$$

2 数值例子

例1 取 $N_1 = N_2 = N_3 = 1$，$m_{12} = m_{13} = m_{21} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0$，则

$$H(\omega) = \left(\frac{1+z_1}{2}\right)\left(\frac{1+z_2}{2}\right)\left(\frac{1+z_3}{2}\right)$$

此即三元 Harr 小波的共轭滤波器。

例2 取 $N_1 = N_2 = N_3 = 1$，$m_{12} = m_{13} = 1, m_{21} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0$，则得不可分正交共轭滤波器

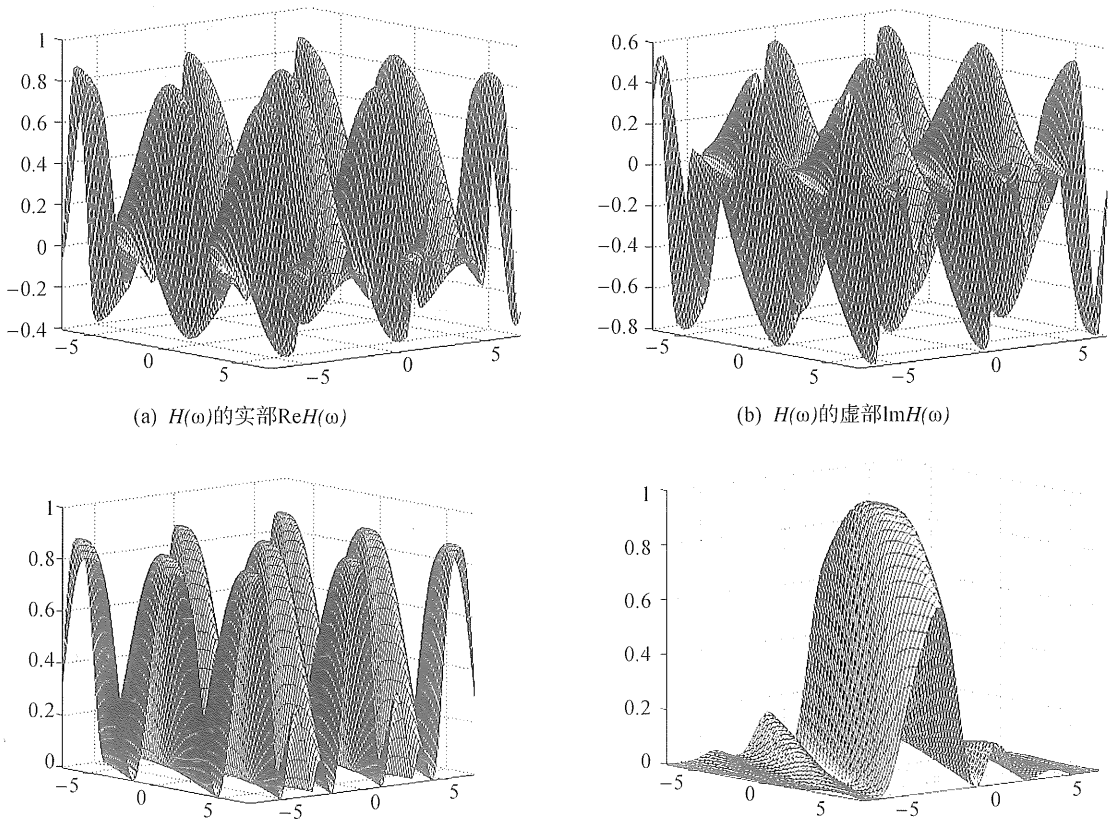
$$H(\omega) = \left(\frac{1+z_1 z_2^2 z_3^2}{2}\right)\left(\frac{1+z_2}{2}\right)\left(\frac{1+z_3}{2}\right)$$

例3 取 $N_1 = 2, N_2 = N_3 = 1$，$m_{12} = 1, m_{13} = m_{21} = m_{23} = m_{31} = m_{32} = 0$，则得不可分正交共轭滤波器

$$H(\omega) = \left(\frac{1+z_1 z_2^2}{2}\right)^2\left(\frac{1+z_2}{2}\right)\left(\frac{1+z_3}{2}\right)Q\left(\frac{1+z_1 z_2^2}{2}\right) =$$

$$\left(\frac{1+z_1 z_2^2}{2}\right)^2\left(\frac{1+z_2}{2}\right)\left(\frac{1+z_3}{2}\right)\times\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}z_1 z_2^2\right)$$

在下面的图1中我们画出了此例当 $\omega_3 = 1, \omega_1 \in [-7,7]$，$\omega_2 \in [-7,7]$ 时，这种 $H(\omega)$ 的实部 $\mathrm{Re}H(\omega)$，虚部 $\mathrm{lm}H(\omega)$，模 $|H(\omega)|$ 及对应的三元尺度函数 $\varphi(x)$ 的 Fourier 变换 $\hat{\varphi}(\omega)$ 的模 $|\hat{\varphi}(\omega)|$ 的图形。



(a) $H(\omega)$的实部$\mathrm{Re}H(\omega)$

(b) $H(\omega)$的虚部$\mathrm{lm}H(\omega)$

(c) $H(\omega)$的模$|H(\omega)|$

(d) $\hat{\varphi}(\omega)$的模$|\hat{\varphi}(\omega)|$

图1 $\mathrm{Re}H(\omega)$，$\mathrm{lm}H(\omega)$，$|H(\omega)|$ 及 $|\hat{\varphi}(\omega)|$ 的图形

Fig. 1 Figures of $\mathrm{Re}H(\omega)$, $\mathrm{lm}H(\omega)$, $|H(\omega)|$ and $|\hat{\varphi}(\omega)|$

（下转第29页）

[4] LI Z, WEI J Z, DONG H L. Global convergence of a modified Fletcher-Reeves conjugate gradient method with Armijo-type line search [J]. Numer Math, 2006, 104 (4):561 – 572.

[5] SHI Z J. A new super-memory gradient method for unconstrained optimization [J]. Advances in Mathematics, 2006, 3(35):265 – 273.

[6] 时贞军. Wolfe 搜索下记忆梯度法的收敛性[J]. 应用数学学报, 2006,1(29):9 – 18.

[7] 汤京永,时贞军. 一类全局收敛的记忆梯度法及其线性收敛性[J]. 数学进展, 2007,36(1):67 – 75.

[8] 汤京永,董丽. 一类新的曲线搜索下的多步下降算法[J]. 应用数学, 2009, 22 (4): 815 – 820.

[9] 汤京永,董丽,张秀军. 一类新的 Wolfe 线性搜索下的记忆梯度法[J]. 山东大学学报, 2009, 44(7):33 – 37.

[10] 汤京永,董丽,郭淑利. 一类新的曲线搜索下的记忆梯度法[J]. 信阳师范学院学报,2009, 22(2):179 – 182.

[11] YASUSHI, NARUSHIMA. Global convergence of a memory gradient method for unconstrained optimization [J]. Computational Optimization and Applications, 2006, 35(3): 325 – 346.

[12] MIELE A, CANTRELL J W. Study on a memory gradient method for the minimization of functions [J]. JOTA, 1969, 3(6): 459 – 470.

(上接第 20 页)

参考文献:

[1] DAUBECHIES I. Lectures on wavelets [M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.

[2] DAUBECHIES I. Orthonormal bases of compactly supported wavelets [J]. Comm Pure and Appl Math, 1988, 41: 909 – 996.

[3] 关履泰. 小波方法与应用[M]. 北京:高等教育出版社, 2007.

[4] ANDREAS R. The wavelet transform on Sobolev spaces and its approximation properties [J]. Numer Math, 1991,58: 875 – 894.

[5] BOWNIK M. The construction of r-regular wavelets for arbitrary dilation [J]. J Fourier Anal Appl, 2001,7: 489 – 506.

[6] HAN B. Symmetry property and construction of wavelets with a general dilation matrix [J]. Linear Algebra Appl, 2002, 35:207 – 225.

[7] PETUKHOV A. Construction of symmetric orthogonal bases of wavelets and tight wavelet frames with integer dilation factor [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2004, 17: 198 – 210.

[8] KAROUI A. A note on the design of nonseparable orthonormal wavelet bases of $L^2(\mathbb{R}^3)$ [J]. Applied Mathematics Letters, 2005, 18(3):293 – 298.

[9] LI Y Z. On the holes of a class of bidimensional nonseparable wavelets [J]. Journal of Approximation Theory, 2003,125(2): 151 – 168.

[10] HE W J, LAI M J. Construction of trivariate compactly supported biorthogonal box spline wavelets [J]. Journal of Approximation Theory, 2003,120:1 – 19.

[11] SKOPINA M. On construction of multivariate wavelets with vanishing moments [J]. Appl Comput Harmon Anal, 2006, 20:375 – 390.

[12] 龙瑞麟. 高维小波分析[M]. 北京:世界图书出版公司, 1995.

[13] 黄永东,程正兴. 三元正交小波的构造[J]. 应用数学, 2006, 19 (1):176 – 182.