第 49 卷 第 4 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 49 No. 4
2010 年 7 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jul. 2010

无限有边界圆填充的存在性与唯一性定理*

高玉洁[1,2]，蓝师义[2]
（1. 太原工业学院理学系，山西 太原 030008；
2. 广西民族大学数学与计算机科学学院，广西 南宁 530006）

摘 要：无限无边界的单连通复形有两种基本类型，即双曲型和抛物型，其对应的圆填充分别填满双曲平面和欧式平面。主要讨论无限有边界的单连通复形 K 的情形，证明了在双曲平面内存在一个关于 K 的单叶圆填充 P，在 P 中与 K 的边界顶点对应的圆是极限圆；这个圆填充 P 在允许其极限圆与单位圆周存在空隙的意义下是完备的；并且 P 对于单位圆盘 D 的 Möbius 变换来说是唯一的。

关键词：圆填充；无限复形；基本二分法

中图分类号：O174.5 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2010）04-0021-05

The Existence and Uniqueness Theorem of Infinite Circle Packings with Boundary

GAO Yuejie[1,2], *LAN Shiyi*[1]
(1. Dept. of Basic Science, Taiyuan Institute of technology, Taiyuan 030008, China;
2. School of Mathematics and Computer Science,
Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: It is known that the hyperbolic and parabolic complex are two fundamental types for infinite and simply connected complexes, whose corresponding circle packings fill the hyperbolic and the Euclidean plane, respectively. Given an infinite simply connected complex K with boundary, it is proved that there exists an univalent circle packing P for K in the hyperbolic plane D whose circles associate with boundary vertices of K are horocycles, which is complete in the sense of permitting the existence of interstices between horocycles and unit circle D. Moreover, the circle packing P is unique up to Möbius transformations of D.

Key words: circle packing; infinite complex; fundamental dichotomy

圆填充（circle packing）理论起源于 Fields 奖获得者 Thurston [1]在 1985 年提出的一个猜测：六边形圆填充可以用来近似 Riemann 映射。Rodin 等[2-5]证明了 Thurston 方案的收敛性。随着对圆填充及其应用的研究，其理论成为复分析与离散微分几何的交叉学科中的一个快速发展的研究领域。迄今为止，这个理论被分为许多分支，其中一个分支围绕着 Koebe-Andreev-Thurston 单值化定理，包括实现给定一个复形的圆填充、圆填充的刚性以及构造双曲三维流形等问题[6-10]；另一个分支主要研究复分析与微分几何中经典问题的离散近似，其中最著名的是 He 等[4]证明了六边形圆填充（hexagonal circle packing）C^{∞} -收敛于 Riemann 映射。

在文［7，11］中，Beardon 与 Stephenson 讨

* 收稿日期：2009-06-03
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10771220）；广西自然科学基金资助项目（0991081）；广西教育厅科研资助项目（200707-MS043）；广西民族大学重大科研资助项目（2008ZD009）；广西民族大学研究生教育创新资助项目（jxun-chx0880）
作者简介：高玉洁（1976 年生），女，硕士生；通讯作者：蓝师义；E-mail：lanshiyi@gxun.cn

论了无限无边界圆填充的存在性与唯一性。对于一个无限无边界的单连通复形 K，如果 K 是双曲型，则存在一个关于 K 的本质唯一的圆填充填满整个双曲平面；如果 K 是抛物型，则存在一个关于 K 的本质唯一的圆填充填满整个欧式平面。那么很自然要问，假如 K 是一个无限有边界单连通复形，是否存在一个关于 K 的圆填充，这样的圆填充是填满双曲平面还是复平面？是否唯一？这也是文［11，§8.3.3］中提出的问题，但那里没有给出证明。本文我们将就这个问题给出一个完整的回答。首先利用 Andreev-Thurston 定理和类型基本二分法，结合圆环引理，证明了如果 K 是一个无限有边界单连通复形，则 K 一定是双曲型；其次，利用对角化方法，证明了在双曲平面内一定存在一个关于 K 的圆填充；最后，根据圆填充半径函数的单调性，证明了该圆填充在允许其极限圆与单位圆周之间存在空隙的意义下是完备的，并且这个圆填充对于双曲平面的共形自同构来说是唯一的。

利用对角化方法和圆填充半径函数的单调性，我们证明了在双曲平面内存在一个关于无限有边界的单连通复形的圆填充，该圆填充在允许其极限圆与单位圆周之间存在空隙的意义下填满整个双曲平面，且这个圆填充对于单位圆盘的 Möbius 变换来说是唯一的。

1 圆填充与基本二分法

在这一节我们将简要地给出与圆填充相关的一些概念和结果，以及什么是无限复形的类型基本二分法，更详细的请参看文［2，12］等。

定义 1 曲面 S 的一个三角剖分 T 是指 S 局部有限地分解成拓扑闭三角形的集合，记作 $T=\{t_j\}$，使其中任意两个三角形要么不相交，要么相交于一点或相交于一条完整的边。集合 T 可以是有限的，也可以是无限的。三角剖分 T 也称为单纯 2－复形。

定义 2 给定一个顶点为 $\{v_1,v_2,\cdots,v_j,\cdots\}$ 的复形 K，若对每一个顶点 $v_j(j=1,2,\cdots)$，在欧氏、双曲或球面几何内分别给一个正数 r_j 与它对应，则这些正数的集合 $R=\{r_1,r_2,\cdots,r_j,\cdots\}$ 称为 K 在欧氏、双曲或球面几何内的一个标号。

定义 3 圆填充是指具有特定相切模式的一种圆格局。特别地，如果 K 是一个抽象的单纯 2－复形，它单纯等价于一个曲面的三角剖分。称一个圆格局 P 为关于复形 K 的圆填充，若 P 满足下面的条件：

（i）对于 K 中每一个顶点 v，在 P 中都有一个圆 C_v 与之对应；

（ii）若 $[u,v]$ 是 K 的一条边，则圆 C_u 与 C_v 外相切；

（iii）若 $[u,v,w]$ 是 K 的一个正向的面，则 $[C_v,C_u,C_w]$ 组成一个正向的两两相切的三个圆。

一个圆填充称为单叶的，如果它所有的圆都不重叠，也就是没有一对圆相交多于一点，图 1 是一个简单的单叶圆填充。值得指出，本文所涉及的圆填充都是指单叶的。

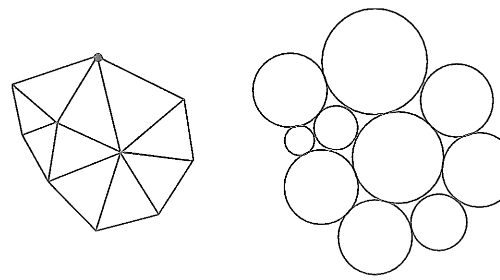

图 1 复形 K 与它对应的圆填充 P

Fig. 1 Complex K and circle packing P for K

定义 4 内切于单位圆周的欧式圆称为极限圆，相切点为该圆的中心。

定理 1 （Andreev-Thurston 定理[11]）设 K 是一个组合闭圆盘，则在双曲平面 D 内存在一个关于 K 的圆填充 P_K，其边界圆都是极限圆，且 P_K 对于 D 的共形自同构来说是唯一的。

引理 1[11, §6.3] 设 K 与 L 是两个闭圆盘的有限三角剖分，且 $L\subseteq K$。记 R_K 与 R_L 分别为双曲平面内关于 K 与 L 的极大圆填充的半径函数，则对任意的 $v\in L$，有 $R_K(v)\leqslant R_L(v)$。

类型基本二分法 对于一个无限无边界复形 K，取一列嵌套的有限单连通复形 $\{K_j:j=1,2,\cdots\}$，它们都包含 K 的第 α－顶点 v_1，穷举 K，也就是具有下面性质：① $v_1\in K_1$；② 对每个 j，K_j 是一个闭圆盘的有限三角剖分；③ 对每个 j，$K_j\subset K_{j+1}$；④ $K_j\uparrow K$（K_j 收敛于 K）。即若 L 是 K 的任意子复形，则对所有充分大的 j，有 $L\subset K_j$。这里序列 $\{K_j\}$ 可以任意选取，但其通常定义如下：令 K_j 为包含关于 v_1 的第 j 生成的所有顶点的最小单连通复形。K 中一个顶点 v 的第一生成是指由 K 中 v 的所有相邻顶点组成。一般地，它的第 i 生成是由所有与第 $i-1$ 生成中的顶点相邻且不属于第 $i-1$ 生成和第 $i-2$ 生成的 K 的顶点组成。根据定理我们知

道，对于每个 K_j ，在双曲平面内存在一个关于 K_j 的极大圆填充 P_{K_j} ，记 R_j 为其相应的双曲半径函数。通过规范化后，可以使 P_{K_j} 中第 α －圆的中心在原点。考虑半径函数序列 $\{R_j\}$ ，注意到 $K_j \subset K_{j+1}$ ，根据引理 1，对每个顶点 $v \in K$ ，我们有 $R_{j+1}(v) \leqslant R_j(v)$ ，也就是对顶点 $v \in K$ ，序列 $\{R_j(v)\}$ 是单调下降的，当 j 足够大时。于是对于顶点 v_1 ，出现下面两种情形之一，我们称为复形 K 的类型基本二分法。

(a) $R_j(v_1) \downarrow r_1$ ，$r_1 > 0$ ，当 $j \to \infty$ 时，

(b) $R_j(v_1) \downarrow 0$ ，当 $j \to \infty$ 时。

以上这两种情形（a）、（b）只依赖于复形 K 本身，而与 v_1 及 K_j 的选择无关。

已经证明[11]：对于情形（a），存在关于 K 的单叶圆填充填满整个双曲平面，K 称为双曲型复形；对于情形（b），存在关于 K 的单叶圆填充填满整个欧式平面，K 称为抛物型复形。而且，若 K 是一个抛物型复形，则在双曲平面内不存在关于 K 的单叶圆填充。

2　双曲型复形

已经知道，对于任一个无限无边界的单连通复形，它要么是双曲型，要么是抛物型。在这一节我们利用类型基本二分法的技术和圆环引理，证明了如果一个无限的单连通复形是有边界的，则它一定是双曲型。

定理 2　如果 K 是一个无限有边界的单连通复形，那么 K 一定是双曲型复形。

为了证明定理 2，我们需要下面的引理。

引理 2　（圆环引理[2,11]）对每个 $k \geqslant 3$ 整数，存在一个常数 $c(k) > 0$ ，使得对于欧式平面或双曲平面内任意单叶 k －花，其中心圆半径为 r_0 ，则每个花瓣圆的半径满足 $r \geqslant c(k) r_0$ 。

定理 2 的证明　在复形 K 的边界上任意固定一个顶点 v_1 ，选取这样一列嵌套的有限单连通复形 K_j ，使得 $K_j (j \geqslant 1)$ 是 v_1 的第 j 生成，如图 2 与图 3 的左边所示，K_1 与 K_2 分别是 v_1 的第一生成与第二生成。显然，对每个 j ，K_j 是一个闭圆盘的有限三角剖分，并且 $K_j \subset K_{j+1}$ ，$K_j \uparrow K$ 。

由定理 1 知，对每一个 j ，在双曲平面内存在一个关于 K_j 的极大单叶圆填充 P_{K_j} ，且每个边界圆都是极限圆，如图 2 与图 3 为 $j = 1,2$ 的情形。注意到在 P_{K_j} 中，与顶点 v_1 对应的圆总是极限圆，因此经过适当规范化后，可以使该极限圆的欧氏中心在单位圆盘内的某一个固定点。也就是，对任意的 j ，使 $R_j(v_1) = r_1$ ，这里 R_j 表示 P_{K_j} 的半径函数，$r_1 > 0$ 是某一个正数。

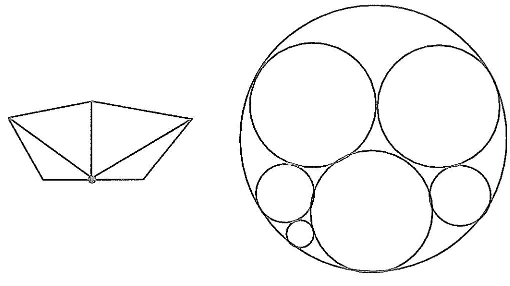

图 2　v_1 的第一生成

Fig. 2　The first generation of v_1

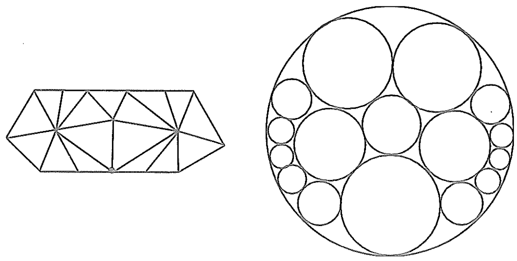

图 3　v_1 的第二生成

Fig. 3　The second generation of v_1

要证明 K 是一个双曲型复形，只需证明对 K 中任一个顶点 v，存在一个正常数 $r_v > 0$，使 $R_j(v) \to r_v$ ，当 $j \to \infty$ 时。事实上，若 v 是 K 的边界顶点，那么由于在 P_{K_j} 中与它对应的圆总是极限圆，而极限圆的半径是大于零的，因此根据引理 1，我们推出该结论成立。下面我们只考虑 v 是 K 的内部顶点的情形。这时我们可以在 K 内部取一条从 v_1 到 v 的边路径，假设它有 N 条边，把它写成从 v_1 到 v 的相邻顶点构成的链：$\gamma = [v_1, v_2, \cdots, v_N]$ ，$v_N = v$ 。

注意到，复形 K 是局部有限（或有界度）的三角剖分，因此，必存在一个整数 d ，使每个 $v_n \in \gamma$ 的花至多有 d 个花瓣；同时存在一个整数 J 充分大，使当 $j \geqslant J$ 时，γ 是 K_j 的内部。

如果 v_n 和 v_{n+1} 是 γ 内的两个相邻顶点，则在 P_{K_j} 内与它们对应的圆是相切的且为内部圆，于是由引理 2 知，存在一个只依赖于 d 的常数 $c(d) > 0$ ，使

$$c(d) R_j(v_n) \leqslant R_j(v_{n+1}) \leqslant \frac{1}{c(d)} R_j(v_n) \text{ , } j \geqslant J$$

反复应用这个公式，我们得到

$$(c(d))^N R_j(v) \leqslant R_j(v) \frac{1}{(c(d))^N} R_j(v_1) \text{ , } j \geqslant J$$

对每一个j，都有$R_j(v_1)=r_1>0$。由上式不等式和引理1推出，当$j\to\infty$时，$R_j(v)\to r_v$，其中$r_v>0$是某一个正数。这样我们就完成了K是双曲型复形的证明。

3 存在唯一性定理

对于无限有边界单连通复形，由第2节知道，它一定是双曲型。根据这个性质，利用对角化方法与半径函数的单调性，我们将证明关于无限有边界单连通复形的圆填充存在唯一性定理。为此，我们先给出下面的引理

引理3 设R'与R是无限有边界单连通复形K的两个双曲标号，并且满足$R'\leqslant R$，则对K的任意两个顶点v_1,v_2，有$d_{R'}(v_1,v_2)\leqslant d_R(v_1,v_2)$，其中$d_{R'}(\cdot,\cdot)$与$d_R(\cdot,\cdot)$分别为由标号$R'$与$R$决定的度量。

证明 这个证明完全类似于当K是无限无边界单连通复形的情形（见文[11，Lemma8.4]）。

定理3 设K是一个无限有边界的单连通复形，则在双曲平面D内一定存在一个关于K的单叶圆填充P_K，在允许其极限圆与单位圆周$\overline{D}$之间存在空隙的意义下P_K填满整个双曲平面，并且P_K对于D的Möbius变换来说是唯一的。

证明 这个证明分为三个步骤。

(i) 存在性的证明。对无限有边界的单连通复形K，我们取序列$\{K_j\}$与$\{P_{K_j}\}$如在前面第2节。记$P_j=P_{K_j}$，令Z_j表示P_j内圆的双曲中心的集合，则对于任意顶点$v\in K$，$Z_j(v)$表示与v对应的圆的中心，当j足够大时。

列举K的顶点为一个序列$\{v_1,v_2,v_3,\cdots\}$，选取第一个子序列$\{P_j^{(1)}\}$为序列$\{P_j\}$本身。由$\{P_j^{(1)}\}$的定义知，与v_1对应的圆的中心总在某个固定点z_1，因此序列$\{Z_j^{(1)}(v_1)\}$收敛于z_1。对于任意的自然数$n\geqslant 1$，假设依次这样选取已得到嵌套序列$\{\{P_j^k\}:k=1,2,\cdots,n\}$，使对每一个$k$，序列$\{Z_j^{(k)}(v_k)\}$都收敛。我们将进一步证明，这个结论对于$n+1$也成立。考虑序列$\{P_j^{(n)}\}$和顶点$v_{n+1}$。注意到中心序列$\{Z_j^{(n)}(v_{n+1})\}$位于一个闭单位圆盘内，由Bolzano-Weierstrass定理知，我们可以从$\{P_j^{(n)}\}$中选出下一个子序列$\{P_j^{(n+1)}\}$，使得$\{Z_j^{(n+1)}(v_{n+1})\}$收敛。由数学归纳法，我们就得到一个无穷嵌套的序列：$\{\{P_j^{(k+1)}\}:k=1,2,\cdots\}$，$\{P_j^{(k+1)}\}\subset\{P_j^k\}$，使对每个$n$，有$Z_j^{(n)}(v_n)\to z_n$，其中$z_n$是$\overline{D}$中的某一点。另一方面，由定理2知，$R_j^{(n)}(v_n)$单调下降且收敛于某一个正数$r_n$，当$j\to\infty$时。特别地，$K$边界上的点对应的圆都收敛于单位圆周上的某一点。

对于任意的正整数k，定义P_{j_k}为第k个序列$\{P_j^{(k)}\}$的第k个圆填充，我们就得到一个圆填充序列$\{P_{j_k}\}$。任取K中的一个顶点v，则一定存在某个正整数n，使$v=v_n$。由于$\{P_{j_k}\}$的尾部是$\{P_j^{(n)}\}$的一个子序列。由前一段的结果得到，

当$k\to\infty$时，$Z_{j_k}(v_n)\to z_n$，$R_{j_k}(v_n)\downarrow r_n$

定义C_{v_n}为半径等于r_n，中心在z_n的双曲圆。当对每一个自然数n都这样定义一个相关的圆后，我们就得到一个圆的集合$P_K=\{C_{v_n}:n=1,2,3,\cdots\}$。从上面的构造方法容易推出$P_K$就是双曲平面内关于复形$K$的一个圆填充，且与$K$的边界点对应的圆是极限圆。注意到$P_{j_k}\to P_K$，当$k\to\infty$时，而$P_{j_k}$是单叶的，所以$P_K$是单叶的，这就完成了存在性的证明。

为了证明P_K的完备性，我们需要下面的引理

引理4 设R_K是双曲平面D内极大圆填充P_K的半径函数，而R是D内关于K的另一个圆填充P的半径函数，则对任一个顶点$v\in K$，有$R(v)\leqslant R_K(v)$。而且如果等号对K中的某一个顶点v成立，则等号对K中所有的顶点都成立，即$R\equiv R_K$。

证明 类似于复形K为无限无边界情形的证明（见文[11，Lemma8.3]），可推出该引理成立。

(ii) 完备性的证明。也即要证明P_K在允许其极限圆与单位圆周之间存在空隙的意义下填满D。设$\Omega=\mathrm{carr}(P_K)\subset\overline{D}$。先证$\Omega$是双曲凸的，即如果$a,b\in\Omega$，则双曲测地线$[a,b]\subset\Omega$。不失一般性，设$a,b$是$P_K$中某两个圆的中心，即$a=z_u,b=z_v$，$u,v\in K$。下面只需证明对任意的$\varepsilon>0$，存在一条从$z_u$到$z_v$的曲线$\sigma\subset\Omega$，使得$l_{hyp}(\sigma)\leqslant d_{hyp}(z_u,z_v)+\varepsilon$，这里$l_{hyp}$与$d_{hyp}$分别表示双曲长度和双曲距离。又$K$的标号$R$可诱导$K$上的一个度量$d(R)$。如果$R$是关于$K$的单叶圆填充$P$的一个半径函数，则度量空间$(K,d_R)$局部等距同构于$\mathrm{carr}(P)$。特别地，$K$内任意一条曲线的$d_R$-长度等于它的像曲线在$\mathrm{carr}(P)$内的长度。由于$K_j$收敛于$K$，可选取足够大的$j$，使指定顶点$u,v\in K_j$。考虑$K_j$上关于两个标号$R_j=R_{K_j}$与$R'$的度量，其中$R'$为极大标号$R_K$在$K_j$上的限制。因为测地线$[z_v^{(j)},z_u^{(j)}]\subset\mathrm{carr}(P_j)$，所以$d_{R_j}(u,v)=d_{hyp}(z_v^{(j)},z_u^{(j)})$。注意到$R'\leqslant R_j$，根据引理3，我们得到$d_{R'}(u,v)\leqslant d_{hyp}(z_v^{(j)},z_u^{(j)})$。记$P'$为圆填充$P_K$在$K_j$

上的限制，则存在一条从 z_u 到 z_v 的路径 $\sigma \in \mathrm{carr}(P') \subset \Omega$，使得 $l_{hyp}(\sigma) \leqslant d_{hyp}(z_v^{(j)}, z_u^{(j)})$。由于 P_j 几何收敛于 P_K，因此 $z_u^{(j)}$ 与 $z_v^{(j)}$ 分别收敛于 z_u 与 z_v。于是对于任意的 $\varepsilon > 0$，当 j 充分大时，有 $d_{hyp}(z_v^{(j)}, z_v) < \varepsilon/2$，$d_{hyp}(z_u^{(j)}, z_u) < \varepsilon/2$。由三角形不等式得到

$$l_{hyp}(\sigma) \leqslant d_{hyp}(z_v^{(n)}, z_u^{(n)}) \leqslant d_{hyp}(z_v^{(n)}, z_v) + d_{hyp}(z_v, z_u) + d_{hyp}(z_u^{(n)}, z_u) < d_{hyp}(z_v, z_u) + \varepsilon$$

这推出 Ω 是双曲凸的。

下面要证明 $\Omega = D \setminus \Delta$。记 Δ 为 P_K 的极限圆与单位圆周 ∂D 之间空隙的并集。采用反证法。假设 $\Omega \neq D \setminus \Delta$，则 $F = D \setminus (\Delta \cup \Omega)$ 一定有非空的内部，我们将推出这与 P_K 的极大性矛盾。事实上，由于 F 的内部非空，因此它一定包含一个闭圆盘 D_1。对 D 施行适当的 Möbius 变换，可以使圆 D_1 的中心在原点，然后让 D_1 逐渐增大，使 $D_1 \cap \overline{(\Omega \cup \Delta)}$ 包含一个点 p。于是 $D_1 = D_1(0, |p|)$，即以原点为中点 $|p|$ 为半径的闭圆。则 Möbius 变换 $\psi(z) = \dfrac{|p|}{z}$ 把 D_1 映到单位圆盘 D 的外面，它把 P_K 映为 D 内一个新的圆填充 $P' = \psi(P_K)$。因为 $p \in \partial(\Omega \cup \Delta)$，所以 P_K 中的圆以 p 为聚点。设圆 c_v 位于点 p 充分小的邻域内，考虑到圆 c_v 与 $c'_v = \psi(c_v)$ 的双曲半径 $R_K(v)$ 与 $R'(v)$ 接近于 ∂D，可推出 $R'(v)$ 比 $R_K(v)$ 大得多，也就是 $R'(v) > R_k(v)$。

这与引理 4 发生矛盾，于是我们完成了完备性的证明。

（iii）唯一性的证明。由上述的完备性知，P_K 在允许其极限圆与单位圆周之间存在空隙的意义下填满整个双曲平面 D。通过适当的规范化，可以使 P_K 中与 K 的某个内部顶点 $\tilde{v}$ 对应的圆 $c_{\tilde{v}}$ 的中心位于原点。假设 P 是关于复形 K 的另一个单叶圆填充，亦在上述意义下填满整个双曲平面 D。类似地，通过规范化后，可使在 P 中与 $\tilde{v}$ 对应的圆中心在原点。现把 P 看成是欧式圆填充，对于任意的 $\varepsilon > 0$，我们定义一个扩大的圆填充 $Q_\varepsilon = (1+\varepsilon)P$。设 $\{K_n\} \uparrow K$ 如前面定义，即为有限单连通子复形的穷举序列。定义 Q_n 为 Q_ε 在 K_n 上的限制，由假设知 P 中的圆以 ∂D 上除去与极限圆相切的那段弧外的点为聚点。因此存在 $N = N(\varepsilon)$，使当 $n \geqslant N$ 时，Q_n 的边界圆都与 $\overline{D}$ 的补集相交。类似于文［11，§8.3.2］中断言的证明，推出当 $n > N$ 时，Q_n 中与 $\tilde{v}$ 对应的圆的欧氏半径比 P_n 中与 $\tilde{v}$ 对应的圆的欧氏半径大，其中 $P_n = P_{K_n}$。考虑圆 $c_{\tilde{v}} \in P_K$，由单调性知，在 P_n 中对应于 $\tilde{v}$ 的圆以半径单调减少收敛于 $c_{\tilde{v}}$。则对于任意 $\varepsilon > 0$，只要 $N > N(\varepsilon)$，Q_n 中对应于 $\tilde{v}$ 的圆半径大于 $c_{\tilde{v}}$ 的半径。也就是在 $(1+\varepsilon)P$ 内与 $\tilde{v}$ 对应圆的半径大于圆 $c_{\tilde{v}}$ 的半径，即 $R(\tilde{v}) \geqslant R_K(\tilde{v})$，其中 R 与 R_K 分别是 P 与 P_K 的半径函数。因此由引理 3，我们得到 $R \equiv R_K$，也即 P 是 P_K 在 D 的一个共形自同构下的像。

参考文献：

［1］ THURSTON W. The finite Riemann mapping theorem［C］//Invited talk at the international symposium on the occasion of the Bieberbach conjecture, Purdue University, 1985.

［2］ RODIN B, SULLIVAN D. The convergence of circle packings to the Riemann mapping［J］. Differential Geometry, 1987, 26: 349－360.

［3］ HE Z X, SCHRAMM O. On the convergence of circle packings to the Riemann mapping［J］. Invernt Math, 1996, 125: 285－305.

［4］ HE Z X, SCHRAMM O. The C^∞ -convergence of hexagonal disk packings to the Riemann mapping［J］. Acta Math, 1998, 180: 219－245.

［5］ STEPHENSION K. Circle packing in the approximation of conformal mapping［J］. Bull Amer Math Soc, 1990, 23: 407－415.

［6］ MARDEN A, RODIN B. On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem［J］. Lect Notes Math, 1990, 1435: 103－115.

［7］ BEARDON A, STEPHENSON K. The uniformization theorem for circle packing［J］. Indiana Unin Math, 1990, 39: 1383－1425.

［8］ HE Z X. Rigidity of infinite disk patterns［J］. Ann of Math, 1999, 149: 1－33.

［9］ LAN S Y, DAI D Q. Variational principles for branched circle patterns［J］. Nonlinear Analysis Series A, 2007, 67: 498－511.

［10］ RODIN B. Schwarz's Lemma for circle packing［J］. Invernt Math, 1987, 89: 271－289.

［11］ STEPHENSION K. Introduction to circle packings (The theory of discrete analytic function)［M］. New York: Cambridge University Press, 2005.

［12］ DUBEJKO T, STEPHENSON K. Circle packing: experiments in discrete analytic function theory［J］. Experiment Math, 1995, 4 (4): 307－348.