微分多项式分担集合的亚纯函数正规定则*

曾翠萍[1]，雷春林[2]，李淑龙[3]，杨德贵[2]
（1. 广东金融学院应用数学系，广东 广州 510521；
2. 华南农业大学理学院，广东 广州 510642；
3. 南方医科大学生物工程学院，广东 广州 510515）

摘　要： 研究涉及微分多项式分担集合的亚纯函数的正规性问题。设 $k \geqslant 2$ 是正整数，F 为区域 D 内的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 k；a，b 和 c 是复数，且 $a \neq b$，$c \neq 0$。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，有 f 与 g 分担 c，且 $L(f)$ 与 $L(g)$ 分担集合 $S = \{a,b\}$，则 F 在 D 内正规。

关键词： 正规族；亚纯函数；分担集合；微分多项式
中图分类号： O174.52　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529-6579（2011）04-0017-06

Normality and Shared Sets Concerning Differential Polynomial

ZENG Cuiping[1], *LEI Chunlin*[2], *LI Shulong*[3], *YANG Degui*[2]
(1. Department of Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510521, China;
2. Department of Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China;
3. School of Biomedical Engineering, Southern Medical University, Guangzhou 510515, China)

Abstract: Normality and shared sets concerning differential polynomial are studied. Let $k \geqslant 2$ be a positive integer, and let F be a family of meromorphic functions defined in D, all of whose zeros have multiplicity at least k, and let a, b and c be complex numbers such that $a \neq b, c \neq 0$. If for each pair of functions $f, g \in F$, f and g share c, $L(f)$ and $L(g)$ share the set $S = \{a,b\}$ in D, then F is normal in D.

Key words: normal families; meromorphic function; shared sets; differential polynomial

设 D 是复平面 **C** 上的区域。定义在区域 D 上的一族亚纯函数 F 被称为是正规的，是指 F 中的任意函数列 $\{f_n(z)\}$ 都存在子列 $\{f_{n_j}(z)\}$，在 D 内按球面距离内闭一致收敛于亚纯函数或 ∞。设 f,g 是亚纯函数，a 是有穷复数，若 $f-a$ 与 $g-a$ 具有相同的零点，则称 f 和 g 分担 a。记集合 $S = \{a, b\}$，若 $f-a$ $(f-b)$ 与 $g-a$ 或 $g-b$ 有相同的零点，则称 f 和 g 分担集合 S。

设 $a_0, a_1, \cdots, a_{k-1}$ 是复数，k 是正整数，定义

$$L(f) = f^{(k)} + a_{k-1}f^{(k-1)} + \cdots + a_1 f' + a_0 f$$

为函数 f 的常系数线性微分多项式。下文提到的微分多项式 $L(f)$，$L(g)$ 均如此定义。

最近，文献［1］得到了一系列关于 k 阶导数分担集合的正规定则。

定理 A[1]　设 $k \geqslant 2$ 是正整数，a,b 是互异的有穷复数，F 为区域 D 内的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 $k+1$。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，$f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 分担集合 $S = \{a,b\}$，则 F 在 D 内正规。

定理 B[1]　设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，a,b 和 c 是复数，且 $a \neq b$，$c \neq 0$，k 是一个正整数。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，有 f 与 g 分担集合 $S = \{a,b\}$，且 $f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 分担 c，则 F 在 D 内正规。

定理 C[1]　设 $k \geqslant 2$ 是正整数，F 为区域 D 内

* **收稿日期：** 2010-07-02
基金项目： 国家自然科学基金资助项目（11071083）；广东省科技计划资助项目（2008B080701005）
作者简介： 曾翠萍（1972年生），女，博士；**通讯作者：** 杨德贵；E-mail：dyang@scau.edu.cn

的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 k，a,b 和 c 是复数，且 $a\neq b,c\neq 0$。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，有 f 与 g 分担 c，且 $f^{(k)}$ 与 $g^{(k)}$ 分担集合 $S=\{a,b\}$，则 F 在 D 内正规。

1 主要结果

本文将上述结果推广到微分多项式分担集合的情形，证明了如下定理。

定理1 设 $k\geqslant 2$ 是正整数，a,b 是互异的有穷复数，F 为区域 D 内的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 $k+1$。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，$L(f)$ 与 $L(g)$ 分担集合 $S=\{a,b\}$，则 F 在 D 内正规。

定理2 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，a，b 和 c 是复数，且 $a\neq b$，$c\neq a_0a,a_0b$，k 是一个正整数。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，有 f 与 g 分担集合 $S=\{a,b\}$，且 $L(f)$ 与 $L(g)$ 分担 c，则 F 在 D 内正规。

定理3 设 $k\geqslant 2$ 是正整数，F 为区域 D 内的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 k，a,b 和 c 是复数，且 $a\neq b,c\neq 0$。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，有 f 与 g 分担 c，且 $L(f)$ 与 $L(g)$ 分担集合 $S=\{a,b\}$，则 F 在 D 内正规。

2 若干引理

为了证明定理1，定理2和定理3，我们需要下列引理。

引理1 设 k 是正整数，$f(z)$ 是复平面上的亚纯函数，如果 $f^{(k)}$ 不取两个值 a,b，则 $f^{(k)}$ 是常数。

此引理由 Nevanlinna 第二基本定理容易证得。

引理2[2] 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 $k+2$，b 为非零复数。如果对于 F 中的任意一个函数 $f(z)$，有 $L(f)\neq b$，则 F 在 D 内正规。

引理3[3] 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 $k+2$，b 为非零复数，k 为正整数。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，有 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分担0，$L(f)$ 与 $L(g)$ 分担 b，则 F 在 D 内正规。

引理4[4] 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，a,b 为两个非零复数，k 为正整数。如果对于 F 中的任意一个函数 $f(z)$，其零点重级至少为 $k+1$，且 $f(z)=a\Leftrightarrow L(f)=b$，则 F 在 D 内正规。

引理5 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，其所有零点重级至少为 $k+2$，a,b 为非零复数，且 $b\neq a_0a$，k 为正整数。如果对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，有 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分担 a，$L(f)$ 与 $L(g)$ 分担 b，则 F 在 D 内正规。

证明 设 $z_0\in D$，我们证明 F 在 z_0 处正规。取 $f\in F$，我们考虑以下两种情形。

情形1 $L(f)(z_0)\neq b$。则存在 $\delta>0$ 使得在邻域 $D_\delta=\{z:|z-z_0|<\delta\}$ 内有 $L(f)\neq b$。由分担知对于 F 中的任意函数 g，满足 g 的零点重数至少为 $k+2$，且在 D_δ 内有 $L(g)\neq b$。根据引理2，F 在 D_δ 内正规，从而 F 在点 z_0 处正规。

情形2 $L(f)(z_0)=b$。则存在 $\delta>0$ 使得在去心邻域 $D_\delta^0=\{z:0<|z-z_0|<\delta\}$ 内有 $L(f)\neq b$。因此，对任意 $g\in F$，在 D_δ^0 内有 $L(g)\neq b$。下面再分两种情形考虑。

情形2.1 $f(z_0)\neq a$。则存在 $\delta>0$ 使得在邻域 D_δ 内有 $f\neq a$。因此，对于 F 中的任意一对函数 $f(z)$ 和 $g(z)$，在 D_δ 内有 $f\neq a,g\neq a$，且 $L(f)$ 与 $L(g)$ 分担 b。对亚纯函数族 $F_a=\{f-a:f\in F\}$ 应用引理3，得 F_a 正规，从而 F 在 D_δ 内正规。故 F 在点 z_0 处正规。

情形2.2 $f(z_0)=a$。则存在 $\delta>0$ 使得在去心邻域 D_δ^0 内有 $f\neq a$。因此，对任意 $g\in F$，g 的零点重级至少为 $k+2$，且在 D_δ 内有 $g(z)=a\Leftrightarrow L(g)=b$。因此，根据引理4，$F$ 在 D_δ 内正规，从而 F 在点 z_0 处正规。

综上所述，F 在区域 D 内正规。引理5证毕。

引理6[5-6] 设 f 是复平面内的非常数亚纯函数，$k\geqslant 2$ 是正整数。如果对任意 $z\in\mathbb{C}$ 满足 $f(z)\neq 0$ 及 $f^{(k)}(z)\neq 0$，则有 $f(z)=e^{Az+B}$ 或者 $f(z)=\dfrac{1}{(Az+B)^m}$，其中 A（$\neq 0$）和 B 是常数，m 是正整数。

引理7[7] 设 $f(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0+\dfrac{q(z)}{p(z)}$，$a_0,a_1,\cdots a_n$ 是常数，$a_n\neq 0$，$q(z),p(z)$ 是两个互素的多项式，且 $\deg q<\deg p$，k 是一正整数。若 $f^{(k)}(z)\neq b$，且 f 的零点重数至少为 $k+1$，则 $f(z)=\dfrac{b(z-d)^{k+1}}{k!(z-c)}$，其中 c,d 为互异的复数。

由文献［8］的定理1，我们容易得到下面的结果。

引理8 设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，$k\geqslant 2$ 是正整数，a,b,c 和 d 是复数，$b\neq a,0$，且 $c\neq 0$。如果对于F中的任意函数 $f(z)$，$f-d$ 的零点重级至少为 k，且 $f(z)=0\Leftrightarrow L(f)=a,L(f)=$

$b \Rightarrow f(z) = c$，则 F 在 D 内正规。

引理 9[9]　设 F 为区域 D 内的一族亚纯函数，$k \geq 2$ 是正整数，a,b,c 和 d 是复数，且 $b \neq 0, c \neq a$。如果对于 F 中的任意函数 $f(z)$，$f-d$ 的零点重级至少为 k，且 $f(z) = a \Leftrightarrow L(f) = b, L(f) = 0 \Rightarrow f(z) = c$，则 F 在 D 内正规。

引理 10[10]　设 $T(r)$ 是一个连续、非增非负的函数，$a(r)$ 是一个在区间 (r_0, R) 内非增非负的函数。如果存在常数 b,c 使得 $T(r) \leq a(r) + b\log^+ \dfrac{1}{\rho - r} + c\log^+ T(\rho)$，其中 $r_0 < r < \rho < R$。则 $T(r) \leq 2a(r) + B\log\dfrac{2}{R-r} + C$，其中 B 和 C 为仅依赖于 b 和 c 的常数。

引理 11[10]　设 $f(z)$ 是圆 $|z| < R$ $(0 < R \leq \infty)$ 内的亚纯函数，且 $f(0) \neq 0, \infty$。则当 $0 < r < \rho < R$，有

$$m(r, \frac{f^{(k)}}{f}) \leq C_k\{1 + \log^+\log^+\frac{1}{|f(0)|} + \log^+\frac{1}{r} + \log^+\frac{1}{\rho - r} + \log^+\rho + \log^+ T(\rho, f)\}$$

其中 C_k 为与 f 无关的常数。

下面的引理对定理 3 的证明起重要作用。

引理 12　f 是区域 $D = \{z: |z| < R\}$ 内的亚纯函数，$k \geq 2$ 是正整数，a,b 和 c 是复数，且 $b \neq a$，$c \neq 0$。假设 f 的零点重级至少为 k，$f(0) \neq 0, \infty$，$f'(0) \neq 0, \infty$，$L'(f)(0) \neq 0, \infty$；对某个 $z_0 \in D$，$z_0 \neq 0, f(z_0) = c$，但对任意 $z \in D \setminus z_0$ 有 $f(z) \neq c$，且对任意 $z \in D$，$L(f) \neq a, b$。那么对 $0 < r < R$ 有

$$T(r,f) \leq \frac{1}{k-1}\{k\log r + 2km(r, \frac{f'}{f}) + km(r, \frac{f'}{f-c}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-a}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-b}) + k\log\frac{|f(0)(f(0)-c)|}{|f'(0)|} + \log\frac{|(L(f)(0)-a)(L(f)(0)-b)|}{|L'(f)(0)|} + \log\frac{1}{|f(0)|} + M\} \tag{1}$$

其中 M 为常数。

证明　根据我们熟知的 Nevanlinna 理论的一些性质有

$$T(r, \frac{1}{L(f)-a}) + T(r, \frac{1}{L(f)-b}) = T(r, L(f)-a) + T(r, L(f)-b) - \log|L(f)(0)-a| - \log|L(f)(0)-b| \geq 2T(r, L(f)) - \log|(L(f)(0)-a) \cdot (L(f)(0)-b)| + C_0$$

其中 C_0 是常数。

又由题设知 $L(f) \neq a, b$，故（下面第二步用到了 Nevanlinna 第二基本定理证明过程中所得的一个不等式）

$$T(r, \frac{1}{L(f)-a}) + T(r, \frac{1}{L(f)-b}) = m(r, \frac{1}{L(f)-a}) + m(r, \frac{1}{L(f)-b}) \leq m(r, \frac{1}{L(f)-a} + \frac{1}{L(f)-b}) + C'_1 \leq m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-a}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-b}) + m(r, \frac{1}{L'(f)}) + C_1 \leq T(r, L'(f)) - N(r, \frac{1}{L'(f)}) + \log\frac{1}{|L'(f)(0)|} + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-a}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-b}) + C_1 \leq T(r, L(f)) + \overline{N}(r, L(f)) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-a}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-b}) + \log\frac{1}{|L'(f)(0)|} + C_1$$

其中 C'_1, C_1 是常数。综合上述两方面，有

$$T(r, L(f)) \leq \overline{N}(r, f) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-a}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-b}) + \log\frac{|(L(f)(0)-a)(L(f)(0)-b)|}{|L'(f)(0)|} + C_2 \tag{2}$$

其中 C_2 是一个仅依赖于 a,b 和 k 的常数。又因为

$$T(r, L(f)) = m(r, L(f)) + N(r, L(f)) \geq N(r,f) + k\overline{N}(r,f) \geq (k+1)\overline{N}(r,f) \tag{3}$$

由（2）式和（3）式得

$$k\overline{N}(r,f) \leq m(r, \frac{L'(f)}{L(f)}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-a}) + m(r, \frac{L'(f)}{L(f)-b}) + \log\frac{|(L(f)(0)-a)(L(f)(0)-b)|}{|L'(f)(0)|} + C_2 \tag{4}$$

运用类似的方法，可得

$$T(r,f) \leq \overline{N}(r,f) + \overline{N}(r, \frac{1}{f}) + \overline{N}(r, \frac{1}{f-c}) + 2m(r, \frac{f'}{f}) + m(r, \frac{f'}{f-c}) + \log|\frac{f(0)(f(0)-c)}{f'(0)}| + B$$

由于 f 的零点重数至少为 k，且 $f-c$ 在区域 D 内只有一个零点，故

$$T(r,f) \leq \overline{N}(r,f) + \frac{1}{k}N(r, \frac{1}{f}) + 2m(r, \frac{f'}{f}) + m(r, \frac{f'}{f-c}) + \log\left|\frac{f(0)(f(0)-c)}{f'(0)}\right| + \log r + B \tag{5}$$

其中 B 是一个仅依赖于 c 的常数。再结合（4）式得（1）式。引理12 证毕。

3 定理的证明

定理1的证明 任取 $z_0 \in D$。我们证明 F 在点 z_0 处正规。取 $f \in F$，下面考虑两种情况。

情况1 $L(f)(z_0) \neq a,b$。则存在 $\delta > 0$ 使得在邻域 $D_\delta = \{z: |z - z_0| < \delta\}$ 内有 $L(f) \neq a,b$。因此对 F 中的任意函数 g，有 g 的零点重级至少为 $k+1$ 且在区域 D_δ 内有 $L(g) \neq a,b$。

断言 F 在 D_δ 内正规。不妨设 $D_\delta = \Delta$。假设 F 在 Δ 内不正规，则由 Zalcman-Pang 引理，存在 $f_n \in F, z_n \in \Delta$，及 $\rho_n \to 0^+$ 使得 $g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛到亚纯函数 g，且其零点重数至少为 $k+1$。

因为

$$L(f_n) = f_n^{(k)} + a_{k-1} f_n^{(k-1)} + \cdots + a_1 f'_n + a_0 f_n = g_n^{(k)} + a_{k-1}\rho_n g_n^{(k-1)} + \cdots + a_1 \rho_n^{k-1} g'_n + a_0 \rho_n^k g_n$$

令 $n \to \infty$，有 $L(f_n) \to g^{(k)}(\xi)$。由 Hurwitz 定理有 $g^{(k)} \neq a,b$，或者有 $g^{(k)} \equiv a$ 或 $g^{(k)} \equiv b$。如果是后一种情况，则 g 将为次数至多是 k 次的多项式。这与 g 是一个非常数亚纯函数且其零点重级至少为 $k+1$ 的事实矛盾。因此，$g^{(k)} \neq a,b$。但是根据引理1，得 $g^{(k)}$ 是一个常数。由于 g 的零点重数至少为 $k+1$，这意味着 g 也是一个常数，矛盾。因此 F 在 Δ 内正规，从而 F 在点 z_0 处正规。

情况2 $L(f)(z_0) = a$ 或 b。则存在 $\delta > 0$ 使得在去心邻域 $D_\delta^0 = \{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 内有 $L(f) \neq a,b$。

在 F 中任取子列 $G = \{f_n\}$。不失一般性，我们假设存在子列，仍记为 $\{f_n\}$，使得 $L(f_n)(z_0) = a$。因此由定理条件知，在 D_δ^0 内有 $L(f_n) \neq a,b$，且 $L(f_n)(z_0) = a$。不妨设 $z_0 = 0, \delta = 1$。

下面证明 G 在 Δ 内正规。反证，假设 G 在 Δ 内不正规，则由 Zalcman-Pang 引理，存在 $f_n \in G, z_n \to 0$，及 $\rho_n \to 0^+$ 使得 $g_n(\xi) = \rho_n^{-k} f_n(z_n + \rho_n \xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛到非常数亚纯函数 g，且其零点重级至少为 $k+1$。与情况1的讨论类似得到，在 Δ 内有 $g^{(k)} \neq b$。我们再分两种情况讨论。

情况2.1 $\dfrac{z_n}{\rho_n} \to \infty$。则 $g^{(k)} \neq a$。再由引理1，知 g 是一个常数，矛盾。

情况2.2 $\dfrac{z_n}{\rho_n} \to -\alpha$。则根据 Hurwitz 定理有 $g^{(k)}(\alpha) = a$，而对于 $\xi \neq \alpha$ 有 $g^{(k)}(\xi) \neq a$。接下来进一步分以下两种情况讨论。

情况2.2.1 $b \neq 0$。则由引理7，有 $g(\xi) = \dfrac{b(\xi - d)^{k+1}}{k!(\xi - c)}$，其中 c,d 为互异的复数。从而 $g^{(k)}(\xi) = b + \dfrac{A}{(\xi - c)^{k+1}}$，其中 A 为非零复数。显然，$g^{(k)}(\xi) = a$ 有 $k+1$ 个互异的根。这与 $g^{(k)}(\xi) = a$ 仅有 $\xi = \alpha$ 一个根矛盾。

情况2.2.2 $b = 0$。则 $g^{(k)} \neq 0$。由于 g 的所有零点重级至少为 $k+1$，这意味着 $g \neq 0$。

如果 $k \geqslant 2$，则根据引理6，有 $g(\xi) = e^{A\xi + B}$，或者 $g(\xi) = \dfrac{1}{(A\xi + B)^n}$，其中 $A(\neq 0), B$ 是复数，n 是正整数。显然，无论是哪一种形式，$g^{(k)}(\xi) = a$ 均不止一个根，矛盾。

如果 $k = 1$，则 $g \neq 0$ 且 $g'(\xi) = a$ 只有一个根。根据 Hayman 不等式知 g 是一个有理函数。再结合 $g \neq 0$ 及 $g' \neq 0$ 得 $g(\xi) = \dfrac{1}{(A\xi + B)^n}$，其中 $A(\neq 0), B$ 是复数，n 是正整数。同样地，$g'(\xi) = a$ 有多于一个的根，矛盾。

因此 G 在 Δ 内正规。故存在 $\{f_n\}$ 的子列按球面距离内闭一致收敛到一个亚纯函数或内闭一致趋于 ∞。因此 F 在点 z_0 处正规，从而 F 在区域 D 内正规。定理1证毕。

定理2的证明 运用类似于定理1的证明方法，应用引理5容易证得定理2。

定理3的证明 设 $z_0 \in D$。证明 F 在点 z_0 处正规。取 $f \in F$，考虑以下两种情形。

情况1 $f(z_0) \neq c$。则存在 $\delta > 0$ 使得在邻域 $D_\delta = \{z: |z - z_0| < \delta\}$ 内有 $f(z) \neq c$。由分担知对于 F 中的任意函数 g，在 D_δ 内有 $g(z) \neq c$。对函数族 $F_c = \{g - c: g \in F\}$ 应用定理1，我们知道 F_c 在 D_δ 内正规，从而 F 在 D_δ 内正规。因此 F 在 z_0 处正规。

情况2 $f(z_0) = c$。则存在 $\delta > 0$ 使得在去心邻域 $D_\delta^0 = \{z: 0 < |z - z_0| < \delta\}$ 内有 $f(z) \neq c$。因此，F 在 D_δ^0 内正规。下面证明 F 在 z_0 处正规。分以下两种情况讨论。

情况2.1 $L(f)(z_0) = a$ 或 b。则存在 $\delta > 0$ 使得在去心邻域 D_δ^0 内有 $L(f) \neq a,b$。

在 F 中任取子列 $\{f_n\}$。则对任意 f_n，

$L(f_n)(z_0)=a$ 或 b，且在 D_δ^0 内 $L(f_n)\neq a,b$。那么存在子列，不妨仍记为 $\{f_n\}$，使得对所有的 n 均有 $L(f_n)(z_0)=a$。因此，对任意 f_n，其所有零点重数至少为 k，在区域 D_δ 内 $L(f_n)\neq b$，且 $f_n=c \Leftrightarrow L(f_n)=a$。根据引理 8 和引理 9，$\{f_n\}$ 在 D_δ 内正规。故存在 $\{f_n\}$ 的子列内闭一致收敛到亚纯函数或一致趋于无穷。所以 F 在 D_δ 内正规，从而 F 在 z_0 处正规。

情况 2.2　$L(f)(z_0)\neq a,b$。则存在 $\delta>0$ 使得在邻域 D_δ 内有 $L(f)\neq a,b$。不失一般性，设 $z_0=0,\delta=1$。

在 F 中任取子列 $\{f_n\}$。则对任意 f_n，$f_n(0)=c$，且对于 $z\in\Delta\setminus\{0\}$ 有 $f_n(z)\neq c$。因此，或者存在子列（仍记为 $\{f_n\}$）使得 f_n-c 的所有零点重数 $\geqslant k+1$，或者存在子列使得 f_n-c 的所有零点重数恰为 l，$1\leqslant l\leqslant k$。如果 f_n-c 的所有零点重数 $\geqslant k+1$，则根据定理 1，$\{f_n\}$ 在 Δ 内正规。假设 f_n-c 的所有零点重数恰为 l，$1\leqslant l\leqslant k$，下面证明 $G=\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处正规。

假设 $G=\{f_n\}$ 在 $z=0$ 处不正规。则由 zalcman-pang 引理，存在 $f_n\in G, z_n\to 0$，及 $\rho_n\to 0^+$ 使得 $g_n(\xi)=f_n(z_n+\rho_n\xi)$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上按球面距离内闭一致收敛到非常数亚纯函数 g，且其零点重级至少为 k。

因为对于所有的 n，方程 $g_n(\xi)=c$ 仅有唯一的一个 l 重零点 $\xi=\dfrac{-z_n}{\rho_n}$，根据儒切定理，方程 $g(\xi)=c$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上至多只有一个根。

断言 $g^{(k+1)}(\xi)\not\equiv 0$。事实上，如果 $g^{(k+1)}(\xi)\equiv 0$，则 $g(\xi)=A(\xi-\xi_0)^k$，其中 A 是非零复数。此时 $g(\xi)=c$ 有 $k(\geqslant 2)$ 个互异的根，这与 $g(\xi)=c$ 在复平面 $\mathbb{C}$ 上至多只有一个根的事实矛盾。下面我们再分两种情况考虑。

情况 2.2.1　存在 $\{f_n(z_n+\rho_n\xi)\}$ 的子列，不妨仍记为 $\{f_n(z_n+\rho_n\xi)\}$，使得 $L'(f_n)\equiv 0$。即

$$\rho_n^{k+1}L'(f_n)(z_n+\rho_n\xi)=\rho_n^{k+1}\cdot$$
$$[f_n^{(k+1)}+a_{k-1}f_n^{(k)}+\cdots+a_0f'](z_n+\rho_n\xi)\equiv 0$$

令 $n\to\infty$，得 $g^{(k+1)}(\xi)\equiv 0$，矛盾。

情况 2.2.2　只存在有限个 f_n 使得 $L'(f_n)\equiv 0$。不妨设对所有的 n 均有 $L'(f_n)\not\equiv 0$。取 $\xi_0\in C$ 使得 $g(\xi_0)\neq 0,c,\infty, g'(\xi_0)\neq 0, g^{(k)}(\xi_0)\neq 0$，$g^{(k+1)}(\xi_0)\neq 0$。则当 $n\to\infty$ 时有

$$\left|\frac{(f_n(z_n+\rho_n\xi_0))^{k-1}(f_n(z_n+\rho_n\xi_0)-c)^k}{\rho_n^k(f'_n(z_n+\rho_n\xi_0))^k}\right|\cdot$$
$$\left|\frac{\rho_n^k(L(f_n)(z_n+\rho_n\xi_0)-a)\cdot\rho_n^k(L(f_n)(z_n+\rho_n\xi_0)-b)}{\rho_n^{k+1}L'(f_n)(z_n+\rho_n\xi_0)}\right|$$
$$\to\left|\frac{g^{k-1}(\xi_0)(g(\xi_0)-c)^k}{(g'(\xi_0))^k}\cdot\frac{(g^{(k)}(\xi_0))^2}{g^{(k+1)}(\xi_0)}\right|$$

从而

$$k\log\left|\frac{f_n(z_n+\rho_n\xi_0)(f(z_n+\rho_n\xi_0)-c)}{f'_n(z_n+\rho_n\xi_0)}\right|+\log\left|\frac{1}{f_n(z_n+\rho_n\xi_0)}\right|+$$
$$\log\left|\frac{(L(f_n)(z_n+\rho_n\xi_0)-a)(L(f_n)(z_n+\rho_n\xi_0)-b)}{L'(f_n)(z_n+\rho_n\xi_0)}\right|\to-\infty \tag{6}$$

设 $h_n(z)=f_n(z_n+\rho_n\xi_0+z), n=1,2,3,\cdots$，容易验证 $h_n(z)$ 满足引理 12 的条件。对 $R=1$ 及 $|z|<\dfrac{1}{2}$，当 n 充分大时有 $z_n+\rho_n\xi_0+z\in D=\{z:|z|<R\}$。由（6）式、（7）式以及引理 12，当 n 充分大时，对 $r<R$ 有

$$T(r,h_n)\leqslant\frac{1}{k-1}\{k\log r+2km(r,\frac{h'_n}{h_n})+km(r,\frac{h'_n}{h_n-c})+m(r,\frac{L'(h_n)}{L(h_n)})+m(r,\frac{L'(h_n)}{L(h_n)-a})+$$
$$m(r,\frac{L'(h_n)}{L(h_n)-b})+\log\frac{1}{|h_n(0)|}+\log|\frac{(L(h_n)(0)-a)(L(h_n)(0)-b)}{L'(h_n)(0)}|+$$
$$k\log|\frac{h_n(0)(h_n(0)-c)}{h'_n(0)}|+M\}\leqslant$$
$$C\{2km(r,\frac{h'_n}{h_n})+km(r,\frac{h'_n}{h_n-c})+m(r,\frac{L'(h_n)}{L(h_n)})+m(r,\frac{L'(h_n)}{L(h_n)-a})+m(r,\frac{L'(h_n)}{L(h_n)-b})+1\}$$

根据引理 11，得

$$T(r,h_n)\leqslant C_1\{1+\log^+\frac{1}{\rho-r}+\log^+T(\rho,h_n)\}$$

其中 $0<r<\rho<R$。因此再由引理 10，得 $T(r,h_n)\leqslant C_2\{1+\log\dfrac{2}{1-r}\}$，其中 C_2 是不依赖于 h_n 的常数。令 b_n 是 h_n 的极点，且 $|b_n|<\dfrac{1}{2}$。由于 $g(\xi_0)\neq\infty$，故 $b_n\neq 0$。则

$$\log\frac{\frac{1}{2}}{|b_n|}\leqslant N(\frac{1}{2},h_n)\leqslant T(\frac{1}{2},h_n)\leqslant C_3$$

则得 $|b_n|>\dfrac{1}{2e^{C_3}}$。因此，$f_n$ 是区域 $\left\{z:|z|<\dfrac{1}{2e^{C_3}}\right\}$ 内的全纯函数。故

$$\log M(\frac{1}{4e^{C_3}},f_n) \leqslant 3T(\frac{1}{2e^{C_3}},f_n) \leqslant$$

$$3C_2\{\log\frac{2}{1-\frac{1}{2e^{C_3}}}+1\}$$

因此我们得 $\{f_n(z)\}$ 在点 $z=0$ 处正规，故 F 在区域D内正规。定理3证毕。

参考文献：

[1] FANG M L, ZALCMAN L. Normality and shared sets [J]. J Austral Math Soc, 2009, 86: 339 – 354.

[2] WANG Y F, FANG M L. Value distribution of meromorphic functions with zeros [J]. Acta Math Sinica, 1998, 41(4): 743 – 748.

[3] CHEN X X. Some normality criteria for families of meromorphic functions [J]. J Nan Nor University, 2004, 27: 34 – 38.

[4] LEI C L, FANG M L, YANG D G. Normal families and shared values of meromorphic functions [J]. Proc Japan Acad Ser, 2007, A83: 289 – 299.

[5] BERGWEILER W. On the zeros of certain homogeneous differential polynomials [J]. Arch Math (Basel), 1995, 64: 199 – 202.

[6] FRANK G. Eine Vermutung von Hayman über Nullstellen meromorpher Funktionen [J]. Math Z, 1976, 149: 29 – 36.

[7] WANG Y F, FANG M L. Picard values and normal families of meromorphic functions with zeros [J]. Acta Math Sinica, New Series, 1998, 14: 17 – 26.

[8] HUANG X J. Normality of meromorphic functions with multiple zeros and shared values [J]. J Math Anal Appl, 2003, 277: 190 – 198.

[9] LEI C L, YANG D G, ZENG C P. Normality and sharing values concerning differential polynomial [J]. Georgian Math J, 2011, 18(2): 299 – 306.

[10] YANG L. Value Distribution Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993.

（上接第16页）

参考文献：

[1] LI X, ORCHARD M T. New edge-directed interpolation [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(10): 1521 – 1527.

[2] MORSE B S, SCHWARTZWALD D. Isophote-based interpolation [C]//Proc IEEE Int Conf on Image Processing, 1998, 3: 227 – 231.

[3] FATTAL R. Image upsampling via imposed edges statistics [C]//SIGGRAPH, 2007, 26(3): 95 – 102.

[4] THURNHOFER S, MITRA S. Edge-enhanced image zooming [J]. Optical Engineering, 1996, 35(7): 1862 – 1870.

[5] SUN J, XU Z B, SHUM H Y. Image super-resolution using gradient profile prior [C]//CVPR, 2008.

[6] BATTIATO S, GALLO G, STANCO F. A New Edge-Adaptive Zooming Algorithm for Digital Images [C]//Proc Signal Processing and Communication, 2000: 144 – 149.

[7] SHAN Q, LI Z R, JIA J Y, et al. Fast image/video upsampling [J]. ACM Transactions on Graphics, 2008, 27(5): 153 – 159.

[8] KOPF J, COHEN M, LISCHINSKI D, et al. Joint bilateral upsampling [J/OL]. ACM Transactions on Graphics, 2007, 26(3): 96[2010 – 05 – 19]. http://doi.acm.org/10.1145/1275808.1276497.

[9] SAJJAD M, KHATTAK N, JAFRI N. Image magnification using adaptive interpolation by pixel level data-dependent geometrical shapes [J]. International Journal of Computer Science and Engineering, 2007: 118 – 127.

[10] UNSER M, ALDROUBI A, EDEN M. Fast B-spline transforms for continuous image representation and interpolation [J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 1991, 13(3): 277 – 285.

[11] KEYS R. Cubic convolution interpolation for digital image processing [J]. IEEE Trans Acoustics, Speech, Signal Processing, 1981, 29(6): 1153 – 1160.

[12] MALGOUYRES F, GUICHARD F. Edge direction preserving image zooming: A mathematical and numerical analysis [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001, 39(1): 1 – 37.

[13] YOUNGJOON C, SEONGJAI K. Error-amended sharp edge schemes for image interpolation [C]//ICIP, 2006: 701 – 704.