

# 考虑共同作用的刚性桩复合地基 解析分析及其工程应用\*

李希平<sup>1,2</sup>, 陈存恩<sup>3</sup>, 刘波<sup>1</sup>, 倪光乐<sup>4</sup>, 陶龙光<sup>1</sup>  
(1. 中国矿业大学(北京)力学与建筑工程学院, 北京 100083  
2. 广州市城乡建设委员会, 广东 广州 510032;  
3. 华南农业大学水利与土木工程学院, 广东 广州 510642;  
4. 广州市泰基工程技术有限公司, 广东 广州 510507)

**摘要:** 基于集中力作用下的 Mindlin 解位移公式, 推导得到圆形和环形均布荷载作用下的地基沉降公式, 将刚性桩复合地基视为桩、土、筏板体系, 采用半解析法, 通过筏板、桩以及地基相互之间力的平衡与位移协调建立方程, 得到了刚性桩复合地基考虑共同作用的半解析解。文中方法未知量少, 计算速度快, 便于实际应用, 工程实例结果表明, 该方法具有较好的适应性。

**关键词:** 刚性桩; 复合地基; 共同作用; 半解析方法; 工程实例

**中图分类号:** TU 473 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2011)02-0047-07

## Case Study and Analytical Analysis of Rigid Pile Composite Foundations Considering Interaction

LI Xiping<sup>1,2</sup>, CHEN Cun'en<sup>3</sup>, LIU Bo<sup>1</sup>, NI Guangle<sup>4</sup>, TAO Longguang<sup>1</sup>

(1. School of Mechanics and Civil Engineering, China University of Mining and Technology, Beijing 100083, China; 2. Guangzhou Urban and Rural Construction Commission, Guangzhou 510032, China; 3. College of Water Conservancy and Civil Engineering, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China; 4. Guangzhou Taiji Engineering CO. Ltd, Guangzhou 510507, China)

**Abstract:** Based on Mindlin displacement solution subjected to centralized load, the settlement of circle or ring uniform load is proposed. A semi-analytical method, which makes use of compatible analysis of force and displacement between piles, slab and ground, is developed to analyze interaction among rigid pile composite foundations. This method has less unknown parameter, but it has fast calculation speed and practicality. The results from practical engineering prove that the method presented has good preciseness and practicality.

**Key words:** rigid pile; composite foundation; interaction; semi-analytical method; practical engineering

随着刚性桩复合地基在我国应用的逐渐增多, 刚性桩复合地基共同作用的研究已经成为岩土工程界研究较多的领域之一, 其研究方法除了采用试验方法之外<sup>[1-3]</sup>, 理论分析则以数值方法为主<sup>[4-6]</sup>, 主要是有限元法与边界元方法。数值方法适用性

强, 单元划分较为方便, 但是在处理地基土为半无限空间时显得较为困难, 傅景辉等<sup>[7-9]</sup>提出了简化的共同作用解析分析方法, 由于把桩和土体简单地当作压缩杆件, 因此, 其计算方法在理论上存在仍需完善之处。从陆培炎<sup>[10]</sup>、倪光乐等<sup>[11-13]</sup>提出地

\* 收稿日期: 2010-09-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50674095); 广东省科技推广计划资助项目(2007A020300010-3)

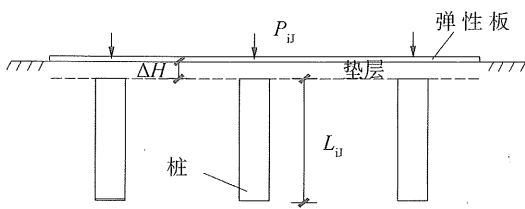
作者简介: 李希平(1956年生), 男, 博士, 副总工; E-mail: xipingl@gzcc.gov.cn

基础共同作用半解析半数值方法以来, 由于采用的理论对地基、基础等的计算都是精确的解析解, 并与数值方法相结合, 在处理一些地基基础共同作用问题上具有计算速度快、精度高等优点, 因此, 近年来, 在工程应用上越来越多。

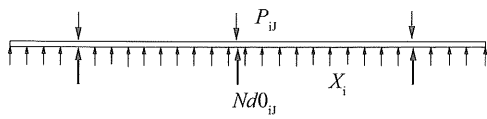
本文在有关地基基础共同作用的研究成果基础上, 通过离散, 将刚性桩复合地基看成为桩、筏板、垫层以及地基的共同作用, 考虑复合地基中桩、土、筏板和垫层之间的内力平衡和变形协调, 建立复合地基共同作用的半解析半数值分析方法。本文还将以上的方法应用于工程实例分析, 并通过现场实测来检验计算结果的可靠性。

### 1 刚性桩复合地基共同作用分析模型

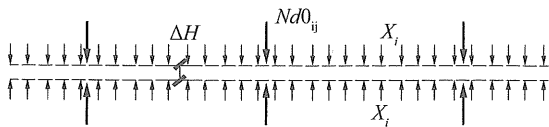
对于如图 1 (a) 所示的刚性桩复合地基系统, 可以通过离散, 将 (a) 分解为 (b)、(c)、(d)、(e) 所示的筏板、垫层、桩、地基 4 个受力体, 同时它们相互之间满足内力平衡和变形协调。



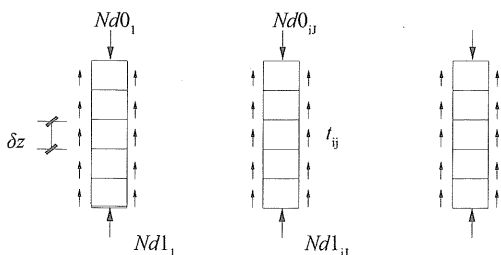
(a) 复合地基整体模型



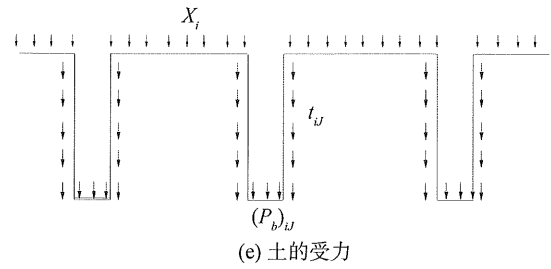
(b) 筏板的受力



(c) 垫层的受力



(d) 桩的受力



(e) 土的受力

图 1 复合地基系统分解离散

Fig. 1 Decompose of rigid pile composite foundation system

#### 1.1 弹性半空间模型 Mindlin 解

如图 2 所示, 竖向集中力作用于半空间内部一点  $(0, 0, +c)$  时, 在半空间任意点  $(x, y, z)$  处产生的沉降为<sup>[14]</sup>:

$$w = \frac{(1 + \mu)P}{8\pi E(1 - \mu)} \left[ \frac{3 - 4\mu}{R_1} + \frac{5 - 12\mu + 8\mu^2}{R_2} - \frac{(z - c)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\mu)(z + c)^2 - 6cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z + c)^2}{R_2^5} \right] \quad (1)$$

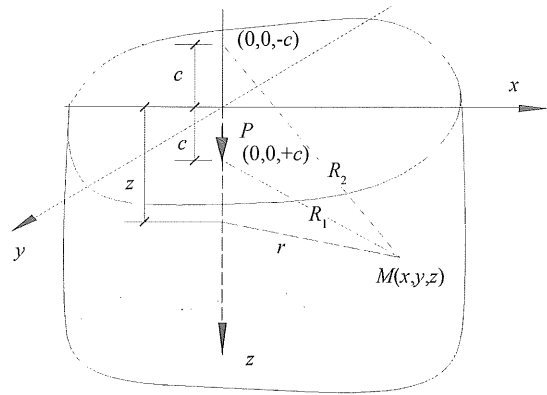


图 2 竖向集中力作用下空间某点示意图

Fig. 2 Model of vertical centralized load in an elastic semi-infinite ground

由式 (1), 当荷载作用在任意点  $(\xi, \eta, \zeta)$  时, 在半空间任意点  $M(x, y, z)$  处产生的沉降为:

$$w = \frac{(1 + \mu)P}{8\pi E(1 - \mu)} \left[ \frac{3 - 4\mu}{R_1} + \frac{5 - 12\mu + 8\mu^2}{R_2} - \frac{(z - \zeta)^2}{R_1^3} + \frac{(3 - 4\mu)(z + \zeta)^2 - 6\zeta z}{R_2^3} + \frac{6\zeta z(z + \zeta)^2}{R_2^5} \right] \quad (2)$$

式中:  $\mu$  为土的泊松比,  $R_1$ 、 $R_2$  为与力作用点和所求点相关的函数, 可表示为:

$$R_1(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}$$

$$R_2(x, y, z, \xi, \eta, \zeta) = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta + z)^2}$$

对于刚性桩复合地基, 桩体在大多情况下为圆形, 因此, 在应用土的 Mindlin 解时需要在圆形区域上进行积分。如图 3 所示, 对式 (2) 积分得到

在埋深为  $c$  的单位桩端阻力作用下的土中任一点  $M(\rho, \theta, z)$  产生的沉降  $w(\rho, z, c)$  :

$$w(\rho, z, c) = \frac{(1 + \mu)}{8\pi \cdot E \cdot (1 - \mu)} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{d}{2}} \left[ \frac{3 - 4\mu}{R_1} + \frac{5 - 12\mu + 8\mu^2}{R_2} + \frac{(3 - 4\mu) \cdot (z + c)^2 - 6c \cdot z}{R_2^3} + \frac{6c \cdot z \cdot (z + c)^2 - (z - c)^2}{R_1^3} \right] r dr d\varphi \quad (3)$$

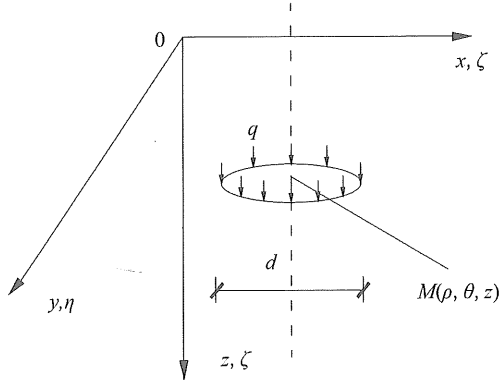


图 3 竖向均布荷载作用在圆形面积上  
Fig. 3 Vertical uniform load acting at circle area

为了求得如图 4 所示在桩周摩擦力  $\tau$  作用下土体的位移, 通过对 (2) 式积分就可得到柱面上端埋深为  $\zeta_1$ 、柱面下端埋深为  $\zeta_2$  的柱面上, 分布有单位柱面均布荷载的情况下, 土中任一点  $M(\rho, \theta, z)$  产生的沉降  $w(\rho, z, \zeta_1, \zeta_2)$  :

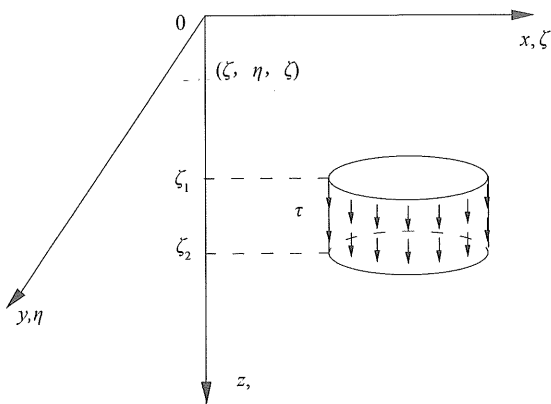


图 4 竖向环形荷载计算模型  
Fig. 4 Calculation model of a vertical annular uniform load

$$w(\rho, z, \zeta_1, \zeta_2) = \frac{(1 + \mu)}{8\pi E \cdot (1 - \mu)} \int_0^{2\pi} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \left[ \frac{3 - 4\mu}{R_1} + \frac{5 - 12\mu + 8\mu^2}{R_2} - \frac{(z - c)^2}{R_1^3} + \frac{6cz \cdot (z + c)^2}{R_2^5} + \right. \\ \left. \frac{(3 - 4\mu) \cdot (z + c)^2 - 6c \cdot z}{R_2^3} \right] d\zeta d\varphi \quad (4)$$

### 1.2 弹性地基上四周自由矩形板弹性理论解

弹性地基上的四周自由矩形板, 在荷载作用下的位移解可以由文 [11] 的叠加方法得到, 包括以下 3 部分。

1) 在板内  $\xi_2 - \xi_1 \times (\eta_2 - \eta_1)$  面积上受到局部均布力  $q$  作用时四边简支矩形板的解为

$$Wq(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Aq_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5)$$

式中:

$$Aq_{m,n} = \frac{16q}{D\pi^6} \frac{\sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{m\pi\delta\xi}{2a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} \sin \frac{n\pi\delta\eta}{2b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)}, \quad \xi = \frac{\xi_2 + \xi_1}{2}, \quad \delta\xi = \xi_2 - \xi_1,$$

$$\eta = \frac{\eta_2 + \eta_1}{2}, \quad \delta\eta = \eta_2 - \eta_1$$

2) 地基上四边简支矩形板受地基反力作用时的位移解

第  $j$  网格单位地基反力  $X$  作用下板的位移为

$$W_j(x, y, j) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Aj_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (6)$$

式中:

$$Aj_{m,n} = \frac{16}{D\pi^6} \frac{\sin \frac{m\pi\xi_j}{a} \sin \frac{m\pi\delta\xi_j}{2a} \sin \frac{n\pi\eta_j}{b} \sin \frac{n\pi\delta\eta_j}{2b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}$$

$\xi_j, \eta_j, \delta\xi_j, \delta\eta_j$  为  $X$  作用中心点坐标和长宽尺寸。

3)  $y = 0$  边广义简支, 广义位移为  $W_{y=0} =$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m \sin \frac{m\pi x}{a}, \text{ 另三边简支的解为}$$

$$W_1(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_m (1 - \mu)}{2 \text{sh } \alpha_m} \left[ \left( \frac{2}{1 - \mu} + \alpha_m \text{coth } \alpha_m \right) \cdot \text{sh } \frac{m\pi(y - b)}{a} - \frac{m\pi(y - b)}{a} \text{ch } \frac{m\pi(y - b)}{a} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (7)$$

式中:  $\alpha_m = \frac{m\pi b}{a}, \beta_n = \frac{n\pi x}{b}$

同理, 在  $y = b, x = 0, x = a$  边广义简支, 另三边简支的解分别为:

$$W_2(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{m+N} (1 - \mu)}{2 \text{sh } \alpha_m} \left[ \left( \frac{2}{1 - \mu} + \alpha_m \text{coth } \alpha_m \right) \cdot \right.$$

$$\text{sh} \frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi y}{a} \text{ch} \frac{m\pi y}{a} \left] \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (8)$$

$$W_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+2N}(1-\mu)}{2\text{sh} \beta_n} \cdot \left[ \left( \frac{2}{1-\mu} + \beta_n \coth \beta_n \right) \text{sh} \frac{n\pi(x-a)}{b} - \frac{n\pi(x-a)}{b} \text{ch} \frac{n\pi(x-a)}{b} \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (9)$$

$$W_4(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_{n+2N}(1-\mu)}{2\text{sh} \beta_n} \cdot \left[ \left( \frac{2}{1-\mu} + \beta_n \coth \beta_n \right) \text{sh} \frac{n\pi x}{b} - \frac{n\pi x}{b} \text{ch} \frac{n\pi x}{b} \right] \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (10)$$

于是有

$$W_\lambda(x, y) = \sum_{k=1}^4 W_k(x, y) \quad (11)$$

板的总变形为

$$W(x, y) = W_\lambda(x, y) + \sum_{j=1}^{nn} W_j(x, y, j) X_j + \sum_{i,j=1}^{nj} WL(x, y, i, j) \cdot Nd0_{ij} + Wq(x, y) \quad (12)$$

### 1.3 刚性桩复合地基共同作用分析模型

对于图 1 所示的刚性桩复合地基离散后, 各部分之间的内力平衡和变形协调包括以下几部分:

1) 筏板与地基位移协调。

$$\sum_{j=1}^{nn} s_{i,j} X_j + \delta\Delta H_i = \Delta + x_i \text{tg} \alpha + y_i \text{tg} \beta - w(x_i, y_i) \quad (i = 1, 2, \dots, nn) \quad (13)$$

2) 筏板的平衡。

$$\sum_{i=1}^{n,n_j} X_i = \Sigma F_z, \quad \sum_{i=1}^{n,n_j} X_i \cdot y_i = \Sigma M_x, \quad \sum_{i=1}^{n,n_j} X_i \cdot x_i = \Sigma M_y \quad (14)$$

式中:  $x_i, y_i$  为网格中心坐标,  $\Delta, \alpha, \beta$  分别为基础板的角点刚体位移以及两个方向绕角点的转角,  $\Sigma F_z, \Sigma M_x, \Sigma M_y$  为基础板面所受的外力及两个方向的弯矩。

3) 垫层的变形。

垫层在桩顶反力作用下产生压缩变形为:

$$\delta\Delta H_{ij} = \frac{Nd0_{ij}\Delta H}{Es1A} \quad (15)$$

4) 桩与地基的位移协调。

第  $iJ$  根桩在桩顶反力  $Nd0_{ij}$ 、桩底反力  $Nd1_{ij}$  与桩侧摩阻力  $\tau_{ij}$  共同作用下, 对于均质地基, 第  $iJ$  根桩顶沉降为:

$$SJ_{ij} = \begin{cases} \frac{Nd0_{ij}L_{ij}}{2E \cdot A} & (Nd0_{ij} \leq \pi L_{ij} \tau_{ij}) \\ \left( \frac{L_{ij}}{E \cdot A} + \frac{(1-\mu_s^2)\omega d_1}{A_1 \times E_s} \right) Nd0_{ij} - \pi d \tau_{ij} \left( \frac{L_{ij}}{2E \cdot A} + \frac{(1-\mu_s^2)\omega d_1}{A_1 \times E_s} \right) L_{ij} & (Nd0_{ij} > \pi d L_{ij} \tau_{ij}, Nd1_{ij} \leq P_{\lambda=1} A_1) \end{cases} \quad (16)$$

式中:  $E, E_s$  分别为桩、土的弹性模量,  $A, A_1$  为桩身和扩大头直径。

如果地基是分层的, 则  $\tau_{ij}$  在每层都是不相同的, 那么式 (16) 中与  $\tau_{ij}$  有关的第二项可通过分层求和的方法求得。

而与桩接触处土体的位移可以按叠加方法计算得到, 假定桩体的存在不影响地基沉降的计算, 按照图 1 (e) 的荷载分布, 就可以计算土体位移, 令桩土位移相等或满足某接触模型就可建立桩土位移协调方程。

5) 筏板与桩的位移协调。

筏板的位移为

$$SZ(x, y) = \Delta + x \text{tg} \alpha + y \text{tg} \beta - w(x, y) \quad (17)$$

筏板在第  $iJ$  根桩对应的位置的位移为:

$$SZ(xJ_{ij}, yJ_{ij}) = \Delta + xJ_{ij} \text{tg} \alpha + yJ_{ij} \text{tg} \beta - \sum_{j=1}^{nn} w_j(xJ_{ij}, yJ_{ij}, j) X_j - \sum_{j,j=1}^{nj} wJ(xJ_{ij}, yJ_{ij}, jJ) \cdot Nd0_{ij} - wq(xJ_{ij}, yJ_{ij}) \quad (18)$$

筏板的位移与第  $iJ$  根桩的桩顶位移  $SJ_{ij}$  之差等于垫层的压缩量  $\delta\Delta H_{ij}$ , 即

$$SZ(xJ_{ij}, yJ_{ij}) - SJ_{ij} = \delta\Delta H_{ij} \quad (19)$$

6) 基础板四边自由边界条件方程。

地基上的四边自由板必须满足四边剪力为零的边界条件, 按照剪力计算公式

$$V_x(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial x \partial y^2} \right] \\ V_y(x, y) = -D \left[ \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 W(x, y)}{\partial y \partial x^2} \right] \quad (20)$$

地基板在荷载作用下产生的板边剪力包括以下 3 部分:

I) 板面荷载  $q$  作用下在  $y = 0$  边产生的剪力为 (取级数的前  $N$  项):

$$V_{qm} = -D \sum_{n=1}^N \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right] \frac{n\pi^3}{b} Aq_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (21)$$

同理, 板面荷载  $q$  作用下在  $y = b, x = 0, x = a$  边

产生的剪力为：

$$\left\{ \begin{aligned} Vq_{m+N} &= -D \sum_{n=1}^N \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{n\pi^3}{b} Aq_{m,n} (-1)^n \sin \frac{m\pi x}{a} \\ Vq_{n+2N} &= -D \sum_{m=1}^N \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{m\pi^3}{a} Aq_{m,n} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ Vq_{n+3N} &= -D \sum_{m=1}^N \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{m\pi^3}{a} Aq_{m,n} (-1)^m \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right. \quad (22)$$

II) 地基反力 X 作用下板边剪力为：

$$\left\{ \begin{aligned} Vj_{m,j} &= -D \sum_{n=1}^N \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{n\pi^3}{b} Aj_{m,n} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ Vj_{m+N,j} &= -D \sum_{n=1}^N \left[ \left( \frac{n}{b} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{m}{a} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{n\pi^3}{b} Aj_{m,n} (-1)^n \sin \frac{m\pi x}{a} \\ Vj_{n+2N,j} &= -D \sum_{m=1}^N \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{m\pi^3}{a} Aj_{m,n} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ Vj_{n+3N,j} &= -D \sum_{m=1}^N \left[ \left( \frac{m}{a} \right)^2 + (2-\mu) \left( \frac{n}{b} \right)^2 \right] \cdot \\ &\quad \frac{m\pi^3}{a} Aj_{m,n} (-1)^m \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right. \quad (23)$$

III) 板边广义位移在  $y = 0, y = b, x = 0, x = a$  四条边产生的剪力为：

$$\begin{aligned} V\lambda_1(x) &= \left\{ \sum_{m=1}^N [k_{m,m}\lambda_m + k_{m,m+N}\lambda_{m+N}] + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [k_{m,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{m,n+3N}\lambda_{n+3N}] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ V\lambda_2(x) &= \left\{ \sum_{m=1}^N [k_{m+N,m}\lambda_m + k_{m+N,m+N}\lambda_{m+N}] + \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [k_{m+N,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{m+N,n+3N}\lambda_{n+3N}] \right\} \sin \frac{m\pi x}{a} \\ V\lambda_3(y) &= \left\{ \sum_{m=1}^N [k_{n+2N,m}\lambda_m + k_{n+2N,m+N}\lambda_{m+N}] + \sum_{n=1}^N [k_{n+2N,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{n+2N,n+3N}\lambda_{n+3N}] \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ V\lambda_4(y) &= \left\{ \sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N [k_{n+3N,m}\lambda_m + k_{n+3N,m+N}\lambda_{m+N}] + \right. \end{aligned}$$

$$\left. \sum_{n=1}^N [k_{n+3N,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{n+3N,n+3N}\lambda_{n+3N}] \right\} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (24)$$

式中：

$$\begin{cases} k_{m,m} = -D\gamma_1(\alpha_m)b^{-3} & k_{m,m+N} = D\gamma_2(\alpha_m)b^{-3} \\ k_{m,n+2N} = Db\Gamma_{m,n} & k_{m,n+3N} = -Db\Gamma_{m,n}(-1)^m \\ k_{m+N,m} = -D\gamma_2(\alpha_m)b^{-3} & k_{m+N,m+N} = D\gamma_1(\alpha_m)b^{-3} \\ k_{m+N,n+2N} = Db\Gamma_{m,n}(-1)^n & k_{m+N,n+3N} = -Db\Gamma_{m,n}(-1)^{m+n} \\ k_{n+2N,m} = Da\Gamma_{m,n} & k_{n+2N,m+N} = -Da\Gamma_{m,n}(-1)^n \\ k_{n+2N,n+2N} = -D\gamma_1(\beta_n)a^{-3} & k_{n+2N,n+3N} = D\gamma_2(\beta_n)a^{-3} \\ k_{n+3N,m} = Da\Gamma_{m,n}(-1)^m & \\ k_{n+3N,m+N} = -Da\Gamma_{m,n}(-1)^{m+n} & \\ k_{n+3N,n+2N} = -D\gamma_2(\beta_n)a^{-3} & \\ k_{n+3N,n+3N} = D\gamma_1(\beta_n)a^{-3} & \end{cases}$$

$$\Gamma_{m,n} = \frac{2(1-\mu)^2\pi^2 m^3 n^3}{(b^2 m^2 + a^2 n^2)^2}$$

$$\gamma_1(x) = \frac{(1-\mu)^2}{2} \left( \frac{3+\mu}{1-\mu} \coth x + \frac{x}{\text{sh}(x^2)} \right) x^3$$

$$\gamma_2(x) = \frac{(1-\mu)^2}{2} \left( \frac{3+\mu}{1-\mu} \frac{1}{\text{sh} x} + \frac{x \text{ch} x}{\text{sh}(x^2)} \right) x^3$$

对由方程 (21)-(24) 得到的板边剪力，令所有荷载作用下在  $y = 0, y = b, x = 0, x = a$  边剪力之和为零，可以分别得到四边剪力为零的平衡方程：

$$\left\{ \begin{aligned} &k_{m,m}\lambda_m + k_{m,m+N}\lambda_{m+N} + \sum_{n=1}^N (k_{m,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{m,n+3N}\lambda_{n+3N}) + \sum_{j=1}^{n;j} Vj_{m,j}X_j + Vq_m = 0 \\ &k_{m+N,m}\lambda_m + k_{m+N,m+N}\lambda_{m+N} + \sum_{n=1}^N (k_{m+N,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{m+N,n+3N}\lambda_{n+3N}) + \sum_{j=1}^{n;j} Vj_{m+N,j}X_j + Vq_{m+N} = 0 \\ &k_{n+2N,m}\lambda_m + k_{n+2N,m+N}\lambda_{m+N} + (k_{n+2N,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{n+2N,n+3N}\lambda_{n+3N}) + \sum_{j=1}^{n;j} Vj_{n+2N,j}X_j + Vq_{n+2N} = 0 \\ &k_{n+3N,m}\lambda_m + k_{n+3N,m+N}\lambda_{m+N} + (k_{n+3N,n+2N}\lambda_{n+2N} + k_{n+3N,n+3N}\lambda_{n+3N}) + \sum_{j=1}^{n;j} Vj_{n+3N,j}X_j + Vq_{n+3N} = 0 \end{aligned} \right. \quad (25)$$

联立以上的方程 (13) - (16)、(19)、(25), 就可以得到刚性桩复合地基共同作用整体方程组, 也即刚性桩复合地基共同作用的半解析半数值解。

## 2 工程实例分析

本文选取广东省东莞市某商业中心项目来说明该方法的具体应用。该大厦楼高 23 层, 采用筏板基础与刚性桩复合地基, 筏板厚  $h = 1.6 \text{ m}$ , 砼弹性模量  $E = 30\,000 \text{ MPa}$ , 泊松比  $\mu = 1/6$ 。考虑桩、桩间土、筏板共同作用, 按每层  $16 \text{ kN/m}^2$  的荷载值进行计算。板下垫层厚  $\Delta H = 20 \text{ cm}$ , 变形模量  $E = 35 \text{ MPa}$ 。垫层下面的桩布置如图 5 所示, 桩径  $d = 1.7 \sim 2.1 \text{ m}$ , 桩长  $L = 9.5 \sim 14.8 \text{ m}$ , 桩身砼弹性模量为  $E = 30\,000 \text{ MPa}$ 。场地地质资料参数如图 6 所示。

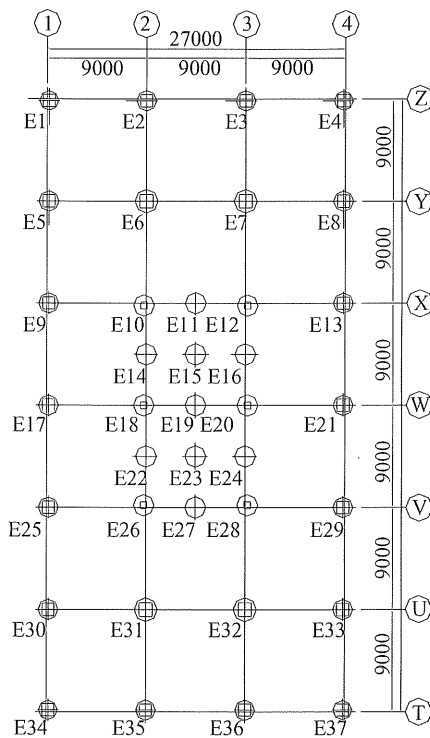


图 5 桩平面布置图 (mm)  
Fig. 5 Layout plan of pile

将筏板划分成  $x \times y = 16 \times 8 = 128$  个网格单元, 取计算级数项  $N = 25$ 。利用这些数据以及筏板和地基参数、荷载数据, 输入由本文方法用 Mathcad 编译的计算程序, 得到桩顶反力和筏板基础的沉降等, 其结果如表 1、表 2 所示。

为了检验本文方法在实际工程中的应用效果, 笔者对本项目还进行了现场实地监测, 监测得到的桩顶反力、基础沉降分别如图 7、图 8 所示。

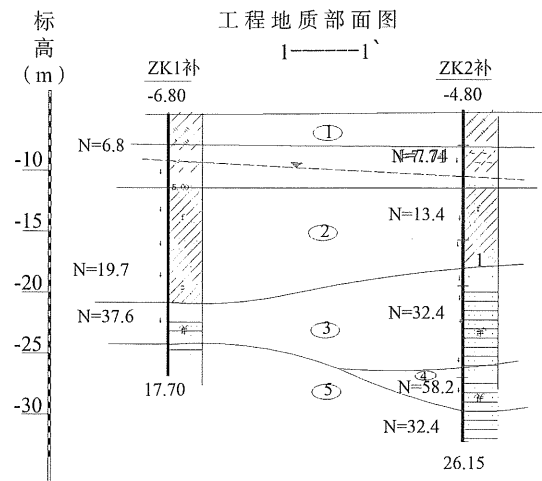


图 6 工程地质剖面图  
Fig. 6 Geological profile of foundation site

表 1 桩顶反力

Table 1 Anti-force of pile

桩编号	荷载 KN	桩编号	荷载 KN	桩编号	荷载 KN	桩编号	荷载 KN
E1	7550	E11	8568	E21	6721	E31	11847
E2	7761	E12	8551	E22	7741	E32	5923
E3	7504	E13	5404	E23	6028	E33	7020
E4	7008	E14	8549	E24	5647	E34	9399
E5	6871	E15	8551	E25	11719	E35	10835
E6	5217	E16	8990	E26	7944	E36	7230
E7	4986	E17	5812	E27	5745	E37	7604
E8	6538	E18	8491	E28	5287		
E9	5191	E19	8492	E29	6643		
E10	10181	E20	6873	E30	9938		

表 2 筏板沉降

Table 2 Settlement of raft

编号	1	2	3	4	5	6	7	8
1	50.4	50.9	51.5	52.1	52.3	52.4	52.5	53
2	48.6	48.5	48.9	49.4	49.8	50.4	51.3	53
3	46.8	46.9	47.9	48.4	49	49.9	51.1	53.5
4	44.7	45.9	47.5	48.7	49.5	50.4	51.7	54.3
5	43.9	45.7	48.4	50.3	51.3	51.9	52.7	54.7
6	42.3	45.8	50.2	52.9	54	54.2	53.9	55.1
7	41.3	46.1	51.2	54.8	55.9	55.6	54.8	55.3
8	40.7	46.5	52.6	56.2	57.2	56.6	55.2	55.1
9	39.9	46.8	53.6	56.8	57.5	56.7	55	54.3
10	39.6	46.4	53.1	56.4	57	55.7	54.1	53.8
11	38.9	45	51.5	54.5	55.5	54.4	52.7	52.5
12	38.6	43	47.8	50.7	51.9	51.5	50.8	50.9
13	38.5	41.4	44.7	47	48.4	48.9	48.8	49.9
14	39.3	40.6	42.9	44.4	45.9	46.9	46.8	47.7
15	40.1	40.6	41.7	42.9	43.9	44.7	45.1	46
16	41.4	41.7	42.3	43.1	43.5	44	44.4	45

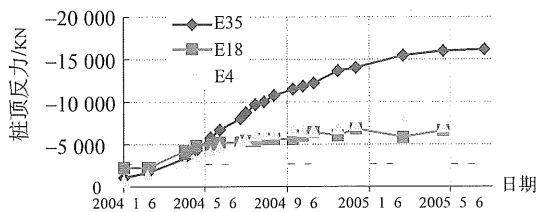


图7 桩顶反力

Fig. 7 Anti-force of pile

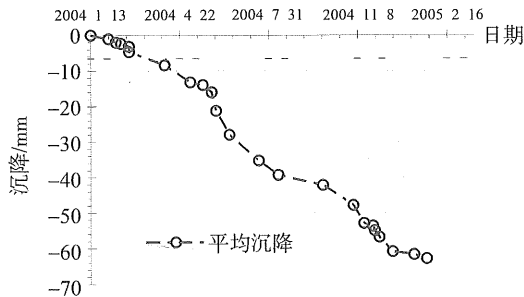


图8 基础沉降

Fig. 8 Settlement of foundation

以上的计算结果与实测情况表明:

1) 至2005年5月6日,此时E35, E18, E4三条桩的承载荷载分别为16 185 kN、6 609 kN、7 081 kN,而E35, E18, E4理论计算承载力分别为10 835 kN、8 491 kN、7 008 kN。可见桩顶反力分布与计算结果分布规律相似,计算结果与实测结果也是相近的。

2) 实测平均沉降为62 mm,理论计算平均沉降约为50 mm,可见计算结果较好的反映了实际情况。

### 3 结论

本文通过离散,利用桩、筏板、垫层以及地基之间的力的平衡及位移协调条件,给出了刚性桩复合地基共同作用的半解析半数值分析,得到如下主要结论:

1) 给出了弹性均质地基或分层地基上刚性桩复合地基受任意局部均布荷载作用下的半解析解,由此半解析解可求得板的沉降、挠度和弯矩,桩顶反力,地基反力;

2) 工程实例分析结果表明,本文采用的半解析半数值方法是可靠的,其计算结果是合理的,与现场实测结果基本吻合。该方法能较好的应用于桩筏基础与地基的共同作用分析,可作为今后类似的工程提供一种新的计算方法。

#### 参考文献:

- [1] 张晶,李斌. CFG桩复合地基承载力的试验研究[J]. 合肥工业大学学报,1999,22(5):118-121.
- [2] 池跃君,宋二祥,金淮,等. 刚性桩复合地基应力场分布的试验研究[J]. 岩土力学,2003,24(3):339-343.
- [3] 李希平,何春保,陶龙光,等. 刚性桩复合地基设计与实测研究[J]. 岩石力学与工程学报,2009,28(S2):3850-3856.
- [4] 王慧萍. 刚性桩复合地基沉降计算方法的探讨[J]. 河北建筑科技学院学报,2005,22(2):37-39.
- [5] 周翠英,谭祥韶,李德福,等. 动静荷载综合作用下桩土共同作用的机理研究[J]. 中山大学学报:自然科学版,2001,40(4):97-101.
- [6] 曹明. 刚性桩复合地基工程性状的数值分析[J]. 工业建筑,2006,(36):665-669.
- [7] 傅景辉,宋二祥. 刚性桩复合地基工作特性分析[J]. 岩土力学,2000,21(4):335-339.
- [8] 沈伟,池跃君,宋二祥. 考虑桩、土、垫层协同作用的刚性桩复合地基沉降计算方法[J]. 工程力学,2003,20(2):36-42.
- [9] 李春灵. 有边载条件下CFG桩复合地基性状研究[D]. 北京:中国建筑科学研究院,1999.
- [10] 陆培炎. 陆培炎科技著作及论文集[M],北京:科学出版社,2006.
- [11] 倪光乐,李成明,苏克之. 弹性矩形板与弹性地基共同作用的简化算法[J]. 岩石力学与工程学报,2000,19(5):659-665.
- [12] 倪光乐,苏克之,李成明. 弹性矩形板与非线性地基共同作用的简化算法[J]. 岩土力学,2000,21(3):239-243.
- [13] 何春保,蔡健,倪光乐. 深置矩形基础与地基共同作用解析分析[J]. 岩土力学,2007,28(12):2553-2559.
- [14] 宰金珉,宰金璋. 高层建筑基础分析与设计[M]. 北京:中国建筑工业出版社,1993.