第 50 卷 第 2 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 2
2011 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2011

# 非齐性空间上新型奇异积分算子的弱(1,1)不等式*

谭超强
（汕头大学理学院数学系，广东 汕头 515063）

**摘 要**：经典的奇异积分算子是满足大小条件和光滑性条件的 $L^2$ 有界线性算子，而该类算子的其中一个重要结论是满足弱(1,1)不等式。在非双倍测度空间上定义一类新型的奇异积分算子，并且证明该类算子也满足弱(1,1)不等式，推广 Duong 类奇异积分算子理论到非双倍测度的情形。

**关键词**：增长性条件；奇异积分算子；弱(1,1)不等式

**中图分类号**：O174.2 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2011）02-0020-05

# Weak (1,1) Inequality for New Type Singular Integral Operators on Nonhomogeneous Spaces

*TAN Chaoqiang*
(Department of Mathematics, Shantou University, Shantou 515063, China)

**Abstract**: It is well-known that the classical singular integral operators are linear $L^2$ bounded operators that satisfy the size and smoothness conditions. An important property of these operators is that they satisfy the weak (1,1) inequality. A new type class of singular integral operators on nonhomogeneous spaces is defined, and the weak (1,1) inequality is proved, which extend Duong's results to the nonhomogeneous spaces.

**Key words**: growth condition; singular integral operators; weak (1,1) inequality

在 $\mathbb{R}^d$ 空间中，如果测度为 Lebesgue 测度，那么经典的奇异积分算子是指满足以下条件的算子

(i) 算子 $T$ 是 $L^2$ 有界的线性算子；

(ii) 算子 $T$ 的核函数 $k(x,y)$ 满足大小条件 $|k(x,y)|\leq \frac{1}{|x-y|^d}$；

(iii) 算子 $T$ 的核函数 $k(x,y)$ 满足光滑性条件：$|k(x,y)-k(x,y')|\leq C\frac{|y-y'|^\delta}{|x-y|^{d+\delta}}$，对任意的 $|x-y|>2|y-y'|$ 成立，其中 $C$ 为常数，$\delta>0$；

或者满足更弱的条件（Hormander 条件）$\int_{|x-y|>2|y-y'|}|k(x,y)-k(x,y')|\,dx\leq C$。

经典的理论告诉我们算子 $T$ 是弱(1,1)的，即满足如下的分布不等式

$$|\{x \mid Tf(x)>\lambda\}|\leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1,\text{其中 }\lambda>0$$

随着调和分析理论发展，我们发现有很多算子是不满足 Hormander 条件[1-5]，但是他们依然满足弱(1,1)不等式估计。为了把经典的奇异积分算子理论应用到这些算子上，Duong 等[6]定义并发展一套新型的奇异积分算子理论，将上述光滑性条件减弱，并且仍然得到了算子的弱(1,1)估计。下面我们简单介绍他们的结论。

他们首先假定测度满足双倍测度条件，即 $\mu(B(x,2r))\leq C\mu(B(x,r))$，对任意 $x\in\mathbb{R}^d, r>0$

* 收稿日期：2010-03-07
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11026215）；广东高校优秀青年创新人才培育资助项目（LYM08059）；广东省自然科学基金资助项目（10451503101006384）；高等学校学科点专项科研基金资助课题（20104402120002）
作者简介：谭超强（1980 年生），男，讲师；E-mail：cqtan@stu.edu.cn

成立，其中球 $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^d \mid |x-y|<r\}$。假设存在一系列积分算子 $A_t$，$t>0$（它们相当于一类恒等逼近算子），算子 $A_t$ 的核为 $a_t(x,y)$ 在如下的意义下成立：$A_tu(x)=\int a_t(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y)$，对任意的 $u\in L^1\cap L^2$ 成立。而核 $a_t(x,y)$ 满足如下的条件：$|a_t(x,y)|\leqslant h_t(x,y)$，其中 $h_t(x,y)=\dfrac{1}{\mu(B(x,t^{1/m}))}s\left(\dfrac{|x-y|^m}{t}\right)$，其中 $m$ 为正常数，函数 $s$ 为正的有界递减的一元函数，满足条件：$\lim\limits_{r\to\infty}r^{d+k}s(r^m)=0$，对某个充分大的 $k$ 成立。在上面的假设下，他们证明了如下的命题。

**命题 1**　假定测度 $\mu$ 满足双倍测度条件，算子 $T$ 是 $L^2(\mu)$ 上的有界线性算子，其核函数为 $k(x,y)$。假设存在一系列积分算子 $A_t$，$t>0$，满足上述条件，并且假定算子 $TA_t$ 对应的核函数为 $k_t(x,y)$，它满足如下的性质

$$\int_{|x-y|>ct^{1/m}}|k(x,y)-k_t(x,y)|\,\mathrm{d}x\leqslant C$$

其中常数 $c$，$C>0$ 那么算子 $T$ 满足弱(1,1)估计，即 $|\{x\mid Tf(x)>\lambda\}|\leqslant\dfrac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mu)}$，对任意的 $\lambda>0$ 成立。

他们还证明了上述定理所对应的算子类包含了经典的奇异积分算子，即经典的奇异积分算子是他们的特殊情形，因此他们推广了经典的奇异积分算子理论。但是我们要指出的是，他们的命题要求测度 $\mu$ 满足双倍测度条件。

一个自然的问题是对于非双倍测度来说，是否存在类似的理论。我们知道非双倍测度空间上的奇异积分算子理论是近年来调和分析领域里的热门课题，经过 Tolsa、Nazarov、Treil 和 Volberg 等[7-12]的研究，经典的奇异积分算子理论的大部分结论能推广到非双倍测度空间上，譬如在文献［7］中，Tolsa 证明了满足大小条件和光滑性条件的奇异积分算子满足弱(1,1)估计。本文的主要目的是在非双倍测度空间上建立类似于 Duong 等条件的奇异积分算子理论，给出算子的弱(1,1)估计。我们指出如果测度是 Lebesgue 测度，那么我们所定义的新型奇异积分算子与 Duong 等所定义的是一致的。

## 1　定理的提出

首先我们先给出本文的记号、定义和假设条件。设 $x,y\in\mathbb{R}^d$，令 $|x-y|=\max\limits_i|x_i-y_i|$，方体 $Q(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^d \mid |x-y|<r\}$，并记 $l(Q(x,r))=r$。设 $\mu$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的拉登测度，且满足如下的增长性条件

$$\mu(Q(x,r))\leqslant C_0r^n \text{ 对任意的 } x\in\mathbb{R}^d, r>0 \text{ 成立} \tag{1}$$

其中 $n$ 为满足 $0<n\leqslant d$ 的固定常数。

给定 $\alpha>1$ 和 $\beta>\alpha^n$，方体 $Q\subset\mathbb{R}^d$ 称为 $(\alpha,\beta)$－双倍如果它满足 $\mu(\alpha Q)\leqslant\beta\mu(Q)$，其中 $\alpha Q$ 为与 $Q$ 同心且边长为其 $\alpha$ 倍的方体。中心极大算子 $M_\mu$ 定义如下

$$M_\mu f(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{\mu(Q(x,r))}\int_{Q(x,r)}|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y) \tag{2}$$

众所周知，中心极大算子 $M\mu$ 是 $L^2(\mu)$ 有界的。

我们假设存在一系列积分算子 $A_t$，$t>0$，算子 $A_t$ 的核为 $\alpha_t(x,y)$ 在如下的意义下成立

$A_tu(x)=\int\alpha_t(x,y)u(y)\mathrm{d}\mu(y)$，对任意的 $u\in L^1\cap L^2$ 成立。

并且核 $\alpha_t(x,y)$ 满足如下的估计

$$|\alpha_t(x,y)|\leqslant h_t(x,y)=C_1p(y,t)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}2^{-k\delta}\frac{1}{\mu(Q(y,2^{k+2}t^{1/m}))}\chi_{|x-y|<2^kt^{1/m}} \tag{3}$$

其中，$C_1,\delta,m$ 为正常数，$\chi$ 为特征函数 $P(y,t)=\dfrac{\inf\limits_{y'\in Q(y,t^{1/m})}\mu(Q(y',t^{1/m}))}{\mu(Q(y,7t^{1/m}))}$，显然，$p(y,t)\leqslant C$。

**注 1**　如果测度 $\mu$ 为 $\mathbb{R}^d$ 上的 Lebesgue 测度，那么 $h_t(x,y)\sim\dfrac{1}{t^{d/m}}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{|x-y|}{t^{1/m}}\right)^{d+\alpha}}$，因此我们所定义的算子类与 Duong 等所定义的是一致的。事实上，这时 $p(y,t)$ 为常数。当 $|x-y|<t^{1/m}$ 时，上面式子显然成立；当 $2^{i-1}t^{1/m}\leqslant|x-y|<2^it^{1/m}$，$i\geqslant1$ 时，

$$h_t(x,y)\leqslant C\sum_{k=i-1}^{\infty}2^{-k\delta}\frac{1}{|Q(y,2^{k+2}t^{1/m})|}\leqslant\frac{C}{t^{d/m}}\frac{1}{\left(1+\dfrac{|x-y|}{t^{1/m}}\right)^{d+\alpha}}$$

且 $\dfrac{1}{t^{d/m}}\dfrac{1}{\left(1+\dfrac{|x-y|}{t^{1/m}}\right)^{d+\alpha}}\leqslant C2^{-i(d+\alpha)}\dfrac{1}{t^{d/m}}\leqslant Ch_t(x,y)$

下面是本文的主要定理。

**定理 1**　假定测度 $\mu$ 满足增长性条件（1），算子 $T$ 是 $L^2(\mu)$ 上的有界线性算子，其核函数为 $k(x,y)$。假设存在一系列积分算子 $A_t$，$t>0$，满足上述条件（3），假定算子 $TA_t$ 对应的核函数为 $k_t(x,y)$，它满足如下的性质

$$\int_{|x-y|>c_2t^{1/m}} |k(x,y)-(k_t(x,y)| \mathrm{d}\mu(x) \leqslant C_3 \tag{4}$$

其中常数 $c_2$，$C_3>0$，那么算子 $T$ 满足弱（1，1）估计，即 $|\{x|\ Tf(x)>\lambda\}| \leqslant \frac{C}{\lambda}\|f\|_{L^1(\mu)}$，对任意的 $\lambda>0$ 成立。

## 2 定理 1 的证明

为证明定理 1，我们先给出如下几个引理：

**引理 1** 假设函数 $f\in L^2(\mu)$，那么如下的结论成立

$$|A_t^* f(y)| \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} h_t(x,y)|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leqslant CM_\mu f(y) \tag{5}$$

进一步，对任意的 $y'\epsilon Q$（$y$，$t^{1/m}$），有

$$\int_{\mathbf{R}^d} h_t(x,y)|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leqslant Cp(y,t)M_\mu f(y') \tag{6}$$

特别地，$\|A_t\|_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} = \|A_t^*\|_{L^2(\mu)\to L^2(\mu)} \leqslant C$，对所有 $t>0$ 一致成立。

**证明** 显然，$|A_t^* f(y)| \leqslant \int_{\mathbf{R}^d} h_t(x,y)\cdot |f(x)|\mathrm{d}\mu(x)$。又由于

$$\int_{\mathbf{R}^d} h_t(x,y)|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) = C_1 p(y,t)\cdot \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta}\frac{1}{\mu(Q(y,2^{k+2}t^{1/m}))}\int_{|x-y|<2^k t^{1/m}} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x)$$

注意到对任意的 $y'\in Q(y,t^{1/m})$，有 $Q(y,2^{k+2}t^{1/m}) \supset Q(y',3\cdot 2^k t^{1/m}) \supset Q(y,2^k t^{1/m})$，因此

$$\int_{\mathbf{R}^d} h_t(x,y)|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leqslant Cp(y,t)\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta}\cdot \frac{1}{\mu(Q(y',3\cdot 2^k t^{1/m}))}\int_{Q(y',3\cdot 2^k t^{1/m})} |f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leqslant$$

$$Cp(y,t)\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\delta}M_\mu f(y') \leqslant Cp(y,t)M_\mu f(y')$$

特别地，我们取 $y'=y$，即得到 $\int_{\mathbf{R}^d} h_t(x,y)|f(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leqslant CM_\mu f(y)$，最后利用中心极大算子 $M_\mu$ 的 $L^2$（$\mu$）有界性，命题得证。

下面的引理是对应于非双倍测度的 Calderon－Zygmund 分解，其证明由 Tolsa 给出[7]。

**引理 2** 假定测度 $\mu$ 满足增长性条件（1）。那么存在常数 C，对任意 $f\in L^1(\mu)$ 和任意的 $\lambda > 2^{d+1}\|f\|_{L^1(\mu)}/\mu(\mathbb{R}^d)$，下面的结论成立。

（i）存在一系列几乎不交的方体 $\{Q_i\}_i$（即 $\sum_i \chi_{Q_i}\leqslant C$）使得下面性质成立：

（a）$\frac{1}{\mu(2Q_i)}\int_{Q_i}|f|\,d\mu \leqslant \frac{\lambda}{2^{d+1}}$；

（b）$\frac{1}{\mu(2_\eta Q_i)}\int_{\eta Q_i}|f|\,d\mu \leqslant \frac{\lambda}{2^{d+1}}$ 对任意的 $\eta>2$ 成立；

（c）$|f|\leqslant\lambda$ a. e.（$\mu$）在 $\mathbb{R}^d\setminus\ \cup_i Q_i$ 上。

（ii）对任意的 $i$，令 $R_i$ 为与 $Q_i$ 同心的（6，$6^{n+1}$）－双倍方体，且 $l(R_i)>4l(Q_i)$，并记 $w_i = \frac{\chi_{Q_i}}{\sum_k \chi_{Q_k}}$。那么存在函数族 $\varphi_i$，满足下面的性质

（d）supp（$\varphi_i$）$\subset R_i$，且在其支集上恒为常数；

（e）$\int\varphi_i\mathrm{d}\mu = \int_{Q_i} fw_i\mathrm{d}\mu$；

（f）$\sum_i|\varphi_i|\leqslant C\lambda$；

（g）$\|\varphi_i\|_{L^\infty(\mu)}\mu(R_i) \leqslant C\int_{Q_i}|f|\,\mathrm{d}\mu$。

**定理 1 的证明：**

不失一般性，我们可假定定理 1 中的常数 $c_2=1$。设 $f\in L^1$（$\mu$），若 $\lambda\leqslant 2^{d+1}\|f\|_{L^1(\mu)}/\mu(\mathbb{R}^d)$，定理 1 显然成立，因此我们可假定 $\lambda\leqslant 2^{d+1}\|f\|_{L^1(\mu)}/\mu(R^d)$。令 $R_i$ 为形式为 $R_i=6^kQ_i$，$k\geqslant1$ 的最小的（$6,6^{n+1}$）－双倍方体，根据引理 2，我们可以把函数 $f$ 分解为 $f=g+b$，且满足下面的性质：

$$g = f\chi_{\mathbf{R}^d\setminus\cup_i Q_i} + \sum_i\varphi_i$$

$$\text{和 } b = \sum_i b_i = \sum_i(fw_i-\varphi_i)$$

根据引理 2 的性质（a），有

$$\mu(\cup_i 2Q_i) \leqslant \frac{C}{\lambda}\sum_i\int_{Q_i}|f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{C}{\lambda}\int|f|\,\mathrm{d}\mu$$

因此只需证明

$$\mu(x\in\mathbb{R}^d\setminus\ \cup_i 2Q_i:|Tf|>\lambda) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int|f|\,\mathrm{d}\mu$$

根据引理 2，我们易知 $|g|\leqslant C\lambda$，根据算子 $T$ 的 $L^2$ 有界性，我们有

$$\mu(x\in\mathbb{R}^d\setminus\ \cup_i 2Q_i:|Tg|>\lambda/2) \leqslant \frac{C}{\lambda^2}\int|g|^2\mathrm{d}\mu \leqslant \frac{C}{\lambda}\int|g|\,\mathrm{d}\mu \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\Big(\int|f|\,\mathrm{d}\mu + \sum_i\int|\varphi_i|\,\mathrm{d}\mu\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\Big(\int|f|\,\mathrm{d}\mu + \sum_i\int_{Q_i}|f|\,\mathrm{d}\mu\Big) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int|f|\,\mathrm{d}\mu$$

令 $t_i=(l(Q_i))^m$，我们做如下的分解

$$Tb_i(x) = TA_{t_i}b_i(x) + T(I - A_{t_i})b_i(x)$$

下面首先证明：

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2Q_i : \sum_i | T(I - A_{t_i})b_i(x) | > \frac{\lambda}{4}\Big)$$

$\leqslant \frac{C}{\lambda}\int |f| \,\mathrm{d}\mu$。根据光滑性条件（4），有

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2Q_i : \sum_i |T(I - A_{t_i})(fw_i)(x)| > \frac{\lambda}{8}\Big) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\int_{\mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2Q_i} \sum_i | T(I - A_{t_i})(fw_i)(x) | \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \int_{\mathbb{R}^d \setminus 2Q_i}\int_{Q_i} | k(x,y) - k_{t_i}(x,y) \| \cdot$$

$$(fw_i)(y) | \,\mathrm{d}\mu(y)\mathrm{d}\mu(x) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \int_{Q_i} | (fw_i)(y) | \,\mathrm{d}\mu(y) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \int_{Q_i} | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y) \leqslant \frac{C}{\lambda}\int | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y)$$

并且类似地有

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2R_i : \sum_i | T(I - A_{t_i})\varphi_i(x) | > \frac{\lambda}{8}\Big) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\int | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y)$$

根据算子 $T$ 的 $L^2(\mu)$ 有界性，$R_i$ 为 $(6,6^{n+1})$ – 双倍方体，引理 1 和引理 2 的性质（g），有

$$\mu\Big(x \in \cup_i 2R_i \setminus \cup_i 2Q_i : \sum_i |T((I - A_{t_i})\varphi_i(x)| > \frac{\lambda}{8}\Big) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\int_{\cup_i 2R_i \setminus \cup_i 2Q_i} \sum_i |T(I - A_{t_i})\varphi_i(x)|\mathrm{d}\mu(x) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \Big\{\int_{\cup_i 2R_i \setminus \cup_i 2Q_i} |T(I - A_{t_i})\varphi_i(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x)\Big\}^{1/2} \mu(2R_i)^{1/2} \cdot$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \Big\{\int_{R^d} |\varphi_i(x)|^2 \mathrm{d}\mu(x)\Big\}^{1/2} \mu(R_i)^{1/2} \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \|\varphi_i\|_{L^\infty(\mu)}\mu(R_i) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\sum_i \int_{Qi} | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\int | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y)$$

从而得到

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2Q_i : \sum_i | T(I - A_{t_i})b_i(x) | > \frac{\lambda}{4}\Big) \leqslant$$

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2Q_i : \sum_i |T(I - A_{t_i})(fw_i)(x)| > \frac{\lambda}{8}\Big) +$$

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2R_i : \sum_i |T(I - A_{t_i})\varphi_i(x)| > \frac{\lambda}{8}\Big) +$$

$$\mu\Big(x \in \cup_i 2R_i \setminus \cup_i 2Q_i : \sum_i |T(I - A_{t_i})\varphi_i(x)| > \frac{\lambda}{8}\Big) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\int | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y)$$

最后，我们只需证明

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2Q_i : \Big| \sum_i TA_{t_i}b_i(x) \Big| > \frac{\lambda}{4}\Big) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda}\int | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y) \tag{7}$$

注意到

$$\mu\Big(x \in \mathbb{R}^d \setminus \cup_i 2Q_i : \Big| \sum_i TA_{t_i}b_i(x) \Big| > \frac{\lambda}{4}\Big) \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda^2}\Big\| \sum_i TA_{t_i}b_i(x) \Big\|^2_{L^2(\mu)} \leqslant$$

$$\frac{C}{\lambda^2}\Big\| \sum_i A_{t_i}b_i(x) \Big\|^2_{L^2(\mu)} =$$

$$\frac{C}{\lambda^2}\sup_{\|h\|_{L^2(\mu)} \leqslant 1}\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_i A_{t_i}b_i(x)h(x)\mathrm{d}\mu(x) \Big|^2 \tag{8}$$

根据式（3）以及 $b_i = fw_i - \varphi_i$，我们有

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_i A_{t_i}b_i(x)h(x)\mathrm{d}\mu(x) \Big| \leqslant$$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_i \int_{Q_i} h_{t_i}(x,y) |f(y)| |\mathrm{d}\mu(y)| |h(x)| \mathrm{d}\mu(x) \Big| +$$

$$\Big| \int_{\mathbb{R}^d} \sum_i \int_{R_i} h_{t_i}(x,y) |\varphi_i(y)| \mathrm{d}\mu(y) |h(x)| \mathrm{d}\mu(x) \Big| =:$$

$$\mathrm{I} + \mathrm{II} \tag{9}$$

根据引理 1 的式（6），对变量 $y' \in Q_i$ 进行积分，得

$$\int_{\mathbb{R}^d} h_{t_i}(x,y) | f(x) | \,\mathrm{d}\mu(x) \leqslant$$

$$C\frac{p(y,t_i)}{\mu(Q_i)}\int_{Q_i} M_\mu f(y')\mathrm{d}\mu(y')$$

又易知 $\frac{p(y,t_i)}{\mu(Q_i)} \leqslant \frac{1}{\mu(6Q_i)}$，当 $y \in Q_i$，根据引理 2 的性质（a）和（b），得到

$$I \leqslant C\sum_i \int_{Q_i} \frac{1}{\mu(6Q_i)}\int_{Q_i} M_\mu h(x)\mathrm{d}\mu(x) f(y)\mathrm{d}\mu(y) \leqslant$$

$$C\lambda \sum_i \int_{Q_i} M_\mu h(x)\mathrm{d}\mu(x) = C\lambda \langle M_\mu h, \sum_i \chi_{Q_i}\rangle \leqslant$$

$$C\lambda \| M_\mu h \|_{L^2(\mu)} \Big\| \sum_i \chi_{Q_i} \Big\|_{L^2(\mu)} \leqslant$$

$$C\lambda \| h(x) \|_{L^2(\mu)} \Big\{ \sum_i \mu(Q_i) \Big\}^{1/2} \leqslant$$

$$C\lambda^{1/2}\Big\{\int | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y)\Big\}^{1/2}$$

又

$$\mathrm{II} \leqslant C\sum_i \int_{Q_i} M_\mu h(y) | \varphi_i(y) | \,\mathrm{d}\mu(y) \leqslant$$

$$C \| M_\mu h \|_{L^2(\mu)} \Big\| \sum_i \varphi_i \Big\|_{L^2(\mu)} \leqslant$$

$$C\lambda^{1/2}\Big\{\int_{\mathbb{R}^d} \Big| \sum_i \varphi_i(y) \Big| \mathrm{d}\mu(y)\Big\}^{1/2} \leqslant$$

$$C\lambda^{1/2}\Big\{ \sum_i \int_{Q_i} | f(y) | \,\mathrm{d}\mu(y)\Big\}^{1/2} \leqslant$$

$$C\lambda^{1/2}\left\{\int|f(y)|\,\mathrm{d}\mu(y)\right\}^{1/2}$$

结合Ⅰ、Ⅱ、式（8）和式（9）的估计，我们便得到式（7）的证明，从而得到定理 1 的证明。

## 参考文献：

[1] FEFFERMAN C. Inequalities for strongly singular convolution operators [J]. Acta Math, 1970, 124(1): 9 - 36.

[2] CHRIST M. Weak - type (1,1) bounds for rough operators [J]. Ann Math, 1988, 128(1): 19 - 42.

[3] CHRIST M, RUBIO DE FRANCIA J L. Weak - type (1, 1) bounds for rough operators II [J]. Invent Math, 1988, 93(1): 225 - 237.

[4] HOFMANN S. Weak (1,1) boundedness of singular integrals with nonsmooth kernel [J]. Proc Amer Math Soc, 1988, 103(1): 260 - 264.

[5] SEEGER A. Singular integral operators with rough convolution kernels [J]. J Amer Math Soc, 1996, 9(1):95 - 105.

[6] DUONG X T, MCINTOSH A. Singular integral operators with non - smooth kernels on irregular domains [J]. Rev Mat Iber, 1999, 15(2): 233 - 265.

[7] TOLSA X. A proof of the weak (1,1) inequality for singular integrals with non doubling measures based on a Calderon - Zygmund decomposition [J]. Publ Mat, 2001, 45(1): 163 - 174.

[8] GARCIA - CUERVA J, MARTELL J M. Weighted inequalities and vector - valued Calderon - Zygmund operators on nonhomogeneous spaces [J]. Publications Matemàtiques, 2000, 44:613 - 640.

[9] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Weak type estimates and Cotlar inequalities for Calderon - Zygmund operators in nonhomogeneous spaces [J]. Int Math Res Not, 1998, 9:463 - 487.

[10] NAZAROV F, TREIL S, VOLBERG A. Cauchy integral and Calderon - Zygmund operators on nonhomogeneous spaces [J]. Int Math Res Not, 1997, 15:703 - 726.

[11] TOLSA X. L2 - boundedness of the Cauchy integral operator for continuous measures [J]. Duke Math J, 1999, 98(2): 703 - 726.

[12] TOLSA X. Littlewood - Paley Theory and the T(1) Theorem with Non - doubling Measures [J]. Adv in Math, 2001, 164(1): 57 - 116.

（上接第 19 页）

## 参考文献：

[1] VÁRADY T, MARTIN R R, COX J. Reverse engineering of geometric models and introduction [J]. Computer-aided Design, 1997, 29(4):255 - 268.

[2] MEIJRING E, UNSER M. A note on cubic convolution interpolation [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12(4):477 - 479.

[3] HWANG J W, LEE H S. Adaptive image interpolation based on local gradient features [J]. IEEE Signal Processing Letters, 2004, 11(3):359 - 362.

[4] ALY H A, DUBOIS E. Image up-sampling using total-variation regularization with a new observation model [J]. IEEE Trans on Image Processing, 2005, 14(10):1647 - 1659.

[5] PARK S C, PARK M K, KANG M G. Super-resolution image reconstruction: a technical review [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2003, 5:21 - 36.

[6] THEVNAZ P, BLUR T, UNSER M. Interpolation revisited [J]. IEEE Trans on Medical Imaging, 2000, 19(7): 739 - 758.

[7] 孙庆杰,张晓鹏,吴恩华. 一种基于 Bézier 插值曲面的图像放大方法 [J]. 软件学报,1999,10(6):570 - 574.

[8] 齐东旭. 关于多结点基数型 δ - spline 插值(Ⅰ),(Ⅱ),(Ⅲ)[J]. 吉林大学学报:自然科学版,1975(2):70 - 81;1976(2):36 - 44;1979(3):1 - 8.

[9] LI H S, DING W, QI D X. Many-knot spline interpolation and any-scale refinement algorithm [J]. Journal of Image and Graphics, 1997, 2(10):701 - 706.

[10] QI D X, LI H S. Many-knot spline technique for approximation of data [J]. Science in China (Series E), 1999, 29(4):334 - 387.

[11] 齐东旭,田自贤,张玉心,等. 样条函数在飞机理论外形设计中的应用 [J]. 飞机设计,1982, 4:45 - 51.

[12] 北方工业大学 CAD 研究中心与北京电视台. 计算机卡通片《咪咪钓鱼》[CP]. 北京:北京电视台,1991.

[13] 北方工业大学 CAD 研究中心与北京科学教育电影制片厂. 计算机电影片《相似》[CP]. 北京: 广播电影电视部电影发行局,1992.