第 50 卷 第 6 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 6
2011 年 11 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 2011

Cartan-Hartogs 域上 Kähler-Einstein 度量的显表达式问题*

邓义华，肖 娟，阳志锋
（衡阳师范学院数学与计算科学系，湖南 衡阳 421008）

摘 要：讨论了 Cartan-Hartogs 域上 Kähler-Einstein 度量的显表达式以及该度量与 Bergman 度量的等价性问题。得到了 Cartan-Hartogs 域上 Kähler-Einstein 度量显表达式的统一公式。运用该公式与连续函数的性质以及 Bergman 度量显表达式的一个统一公式，得到了这类域上 Kähler-Einstein 度量和 Bergman 度量等价性的统一证明。

关键词：Cartan-Hartogs 域；Kähler-Einstein 度量；Bergman 度量；显表达式
中图分类号：O174.55 **文献标志码：**A **文章编号：**0529－6579（2011）06－0020－04

Explicit Formula of Kähler-Einstein Metric on Cartan-Hartogs Domains

DENG Yihua, XIAO Juan, YANG Zhifeng
(Department of Mathematic and Computing Sciences, Hengyang Normal University, Hengyang 421008, China)

Abstract: The explicit formula of Kähler-Einstein metric and the equivalence of the Kähler-Einstein metric and the Bergman metric on Cartan-Hartogs domains are discussed. A unified explicit formula of Kähler-Einstein metrics on Cartan-Hartogs domains is given. Using this formula and a nature of continuous functions and the unified explicit formula of Bergman metrics, a unified proof of the equivalence of the Kähler-Einstein metric and the Bergman metric on Cartan-Hartogs domains is obtained.

Key words: Cartan-Hartogs domain; Kähler-Einstein metric; Bergman metric; explicit formula

对 Einstein-Kähler 度量的研究是国际数学界的热门研究领域，很多研究复几何与多复变函数的专家都认为给出该度量的显表达式具有非常重要的意义。王安等[1]首次得到了一类非齐性域上 Einstein-Kähler 度量的显表达式，利用该表达式他们证明了这类域上 Bergman 度量和 Einstein-Kähler 度量的等价性，即证明了丘成桐猜想在一些第一类 Cartan-Hartogs 域 Y_I 上也是成立的。现在，四类 Cartan-Hartogs 域上 Einstein-Kähler 度量的显表达式已经被陆续找到，这些域上 Einstein-Kähler 度量与 Bergman 度量的等价性问题也已经进行了比较充分的研究，相关的结果可以参考文献［2－9］。本文在这些文献的基础上，给出了 Cartan-Hartogs 域上 Einstein-Kähler 度量显表达式的统一公式，运用该公式与连续函数的性质以及 Bergman 度量显表达式的一个统一公式得到了这类域上 Einstein-Kähler 度量与 Bergman 度量等价性的统一证明。

1 Cartan-Hartogs 域及其全纯自同构变换

根据参考文献［10］可知，四类 Cartan-Hartogs 域可以统一定义为

$$Y(N,D;K) = \{W \in C^N, Z \in D: |W|^{2K} < N_D(Z,\bar{Z}), D \in \mathbb{R}_H\}$$

其中 $N_D(Z,\bar{Z})$ 称为域 D 的 generic normal，R_H 是华罗庚在上世纪 50 年代研究的下列四类对称典型域的集合：

$$R_{\mathrm{I}}(m,n) = \{Z \in C^{mn}: I - Z\bar{Z}^{\mathrm{T}} > 0\},$$

$$R_{\mathrm{II}}(m,n) = \{Z \in C^{\frac{p(p+1)}{2}}: I - Z\bar{Z}^{\mathrm{T}} > 0\},$$

$$R_{\mathrm{III}}(m,n) = \{Z \in C^{\frac{q(q+1)}{2}}: I - Z\bar{Z}^{\mathrm{T}} > 0\},$$

$$R_{IV}(n) = \{Z \in C^n: 1 - 2Z\bar{Z}^{\mathrm{T}} + |ZZ^{\mathrm{T}}|^2 > 0\}$$

* 收稿日期：2011－03－07
基金项目：湖南省教育厅青年资助项目（08B010）；湖南省自然科学基金资助项目（09JJ6004）
作者简介：邓义华（1971 年生），男，副教授；E-mail：dengchen4032@126.com

这里 Z 分别表示 (m,n) 矩阵，(p,p) 对称方阵，(q,q) 斜对称方阵和 $(1,n)$ 矩阵，$\overline{Z}^{\mathrm{T}}$ 表示 Z 的共轭转置。在华罗庚域的研究中，常把 Cartan-Hartogs 域中的元素表示成行向量的形式。根据参考文献［9］的命题1.1，我们容易得到以下命题。

命题1　下列 $Y(N,D;K)$ 的全纯自同构变换把 $Y(N,D;K)$ 的任意一点 (Z,W) 变为点 $(0,W^*)$：

$$\begin{cases} W^* = \mathrm{e}^{i\theta} W N_D(Z_0,Z_0)^{\frac{1}{2K}} N_D(Z,Z_0)^{-\frac{1}{K}} \\ Z^* = \Phi(Z) \end{cases}$$

其中 Φ 是域 D 的任一全纯自同构变换。本文始终假设这些自同构变换的集合为 $\mathrm{Aut}(Y)$，并且对任意的 $f \in \mathrm{Aut}(Y)$，J_f 表示变换 f 的 Jacobian 矩阵。

2　Einstein-Kähler 度量的显表达式问题

众所周知，域 $Y(N,D;K)$ 上 Einstein-Kähler 度量的生成函数 g 是 Monge-Ampère 方程如下边值问题的唯一解：

$$\begin{cases} \det\left(\dfrac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right) = \mathrm{e}^{(r+1)g}, & z \in Y(N,D;K) \\ g = \infty, & z \in \partial Y(N,D;K) \end{cases} \tag{1}$$

其中 r 为域 $Y(N,D;K)$ 的复维数。要求出 Einstein-Kähler 度量的显表达式，只要求出其生成函数的显表达式就够了。为此，我们假设

$$g = \log\left[\frac{c}{1-X} N_D(Z,Z)^{-\frac{1}{K}}\right] \tag{2}$$

其中 c 为常数。令

$$T(Z,W;\bar{Z},\bar{W}) = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial \bar{z}_j}\right)$$

则对任意的 $f \in \mathrm{Aut}(Y)$ 有

$$T(Z,W;\bar{Z},\bar{W}) = J_f|_{Z_0=Z} T(0,W^*;0,\overline{W^*}) \bar{J}_f^{\mathrm{T}}|_{Z_0=Z} \tag{3}$$

直接计算可得

$$T(0,W^*;0,\overline{W^*}) = \begin{pmatrix} \tau\left[\dfrac{1}{K}YX + \dfrac{1}{K}\right]I & 0 \\ 0 & YI + Y^2 \overline{W^*}^{\mathrm{T}} W^* \end{pmatrix}$$

其中 τ 为域 $Y(N,D;K)$ 的特征常数，$Y = \dfrac{1}{1-X}$，函数 $X: Y(N,D;K) \to [0,1]$ 定义如下：

$$X(Z,W) = |W|^2 N_D(Z,Z)^{-\frac{1}{K}}$$

显然 X 在 $\mathrm{Aut}(Y)$ 的作用下是保持不变的。从已有的结论中不难发现，当 $Y(N,D;K)$ 为第一类和第二类 Cartan-Hartogs 域时，$\tau = 1$。当 $Y(N,D;K)$ 为第三类和第四类 Cartan-Hartogs 域时，$\tau = 2$。因为 $YX = Y(1-Y^{-1}) = Y-1$，所以

$$T(0,W^*;0,\overline{W^*}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau}{K}YI & 0 \\ 0 & YI + Y^2 \overline{W^*}^{T} W^* \end{pmatrix}$$

于是

$$\det(T(0,W^*;0,\overline{W^*})) = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{r-N}(1-X)^{-(r+1)}$$

又因为

$$|\det(J_f)|^2_{Z_0=Z} = [N_D(Z,Z)]^{-(\lambda+\frac{N}{K})}$$

其中，λ 是仅与域 $Y(N,D;K)$ 中向量 Z 的维数有关的常数。于是

$$\det(T(Z,W;\bar{Z},\bar{W})) = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{r-N}(1-X)^{-(r+1)}[N_D(Z,Z)]^{-(\lambda+\frac{N}{K})} \tag{4}$$

另一方面，将（2）式代入（1）中的 Monge-Ampère 方程的右边得

$$\mathrm{e}^{(r+1)g} = c^{r+1}(1-X)^{-(r+1)}[N_D(Z,Z)]^{-\frac{r+1}{K}} \tag{5}$$

当（4）式与（5）式相等时，容易求得

$$c = \left(\frac{\tau}{K}\right)^{\frac{r-N}{r+1}}, \qquad K = \frac{r+1-N}{\lambda} \tag{6}$$

下面验证（2）满足满足（1）中的边界条件。事实上，当 $\widetilde{W} \neq 0$ 时，若点 $(\tilde{z},\widetilde{W}) \in \partial Y(N,D;K)$，$(Z,W) \in Y(N,D;K)$ 且 $(Z,W) \to (\tilde{z},\widetilde{W})$ 时，有 $X \to 1^-$，从而 $\dfrac{1}{1-X} \to +\infty$。而此时 $N_D(Z,Z)^{-\frac{1}{K}} \to |\widetilde{W}|^2$，因此在此情况下有 $g \to +\infty$。

若 $\widetilde{W} = 0$，则 $(\tilde{z},\widetilde{W}) = (\tilde{z},0)$，从而当 $(Z,W) \in Y(N,D;K)$ 且 $(Z,W) \to (\tilde{z},0)$ 时，有 $\dfrac{1}{1-X} > 1$，$N_D(Z,Z) \to 0, N_D(Z,Z)^{-\frac{1}{K}} \to +\infty$，因此在此情况下也有 $g \to +\infty$。

综上所述，我们有如下结论。

定理1　当 $K = \dfrac{r+1-N}{\lambda}$ 时，域 $Y(N,D;K)$ 的 Einstein-Kähler 度量的生成函数的显表达式为

$$g = \log\left[\frac{1}{1-X} N_D(Z,Z)^{-\frac{1}{K}} \left(\frac{\tau}{K}\right)^{\frac{r-N}{r+1}}\right]$$

3　Bergman 度量和 Einstein-Kähler 度量的等价

在本节中，我们主要利用定理 1 来讨论 Cartan-Hartogs 域上 Bergman 度量和 Einstein-Kähler 度量的等价问题。

定义1[6]　C^n 中的域 Ω 的两个度量 B 和 ε 等价，是指存在两个正常数 $a \geqslant b$ 使得下列不等式成立

$$b \leqslant \frac{B}{\varepsilon} \leqslant a$$

综合参考文献［11］中的有关结果我们容易看出，域 $Y(N,D;K)$ 的 Bergman 度量可表示为

$$(w_B(Y))^2 = \mathrm{d}zJ_f|_{Z_0=Z}\begin{pmatrix} \tau[\frac{1}{K}V'X+\lambda+\frac{N}{K}]I & 0 \\ 0 & V'I+V''\overline{W^{*}}^{\mathrm{T}}W^{*}\end{pmatrix}\overline{J_f}^{\mathrm{T}}|_{Z_0=Z}\overline{\mathrm{d}z}^{\mathrm{T}}。$$

其中

$$V=\log G(X)\ ,\ V'=\frac{\mathrm{d}\log G(X)}{\mathrm{d}X}\ ,\ V''=\frac{\mathrm{d}^2\log G(X)}{\mathrm{d}X^2},$$

$G(X)=\sum_{j=0}^{h+1}b_j\Gamma(N+j)(1-X)^{-(N+j)}$，$h$ 为 R_H 的复维数。

仿［3］和［5］等参考文献的做法，我们把 $\mathrm{d}zJ_f|_{Z_0=Z}$ 表示为 $(\mathrm{d}\tilde{z},\mathrm{d}\tilde{s})$，则

$$(w_B(Y))^2=\tau(\frac{1}{K}V'X+\lambda+\frac{N}{K})|\mathrm{d}\tilde{z}|^2+\mathrm{d}\tilde{s}(V'I+V''\overline{W^{*}}^{\mathrm{T}}W^{*})\overline{\mathrm{d}\tilde{s}}^{\mathrm{T}}$$

类似于[3]和[5]，将向量 $W^{*}=(w_1^{*},w_2^{*},\cdots,w_N^{*})$ 表示成 $W^{*}=e^{i\theta}(\mu,0,\cdots,0)U$，其中 $\mu>0$，U 为酉方阵。然后令 $\mathrm{d}\tilde{s}\overline{U}^{\mathrm{T}}=(\mathrm{d}v,\mathrm{d}\widetilde{W})$，则进一步可以得到

$$(w_B(Y))^2=\theta(\frac{1}{K}V'X+\lambda+\frac{N}{K})|\mathrm{d}\tilde{z}|^2+(V'+V''\mu^2)|\mathrm{d}v|^2+V'|\mathrm{d}\widetilde{W}|^2 \quad (7)$$

由定理 1 的证明可知，当 $K=\frac{r+1-N}{\lambda}$ 时，域 $Y(N,D;K)$ 的 Einstein-Kähler 度量矩阵为

$$T=J_f|_{Z_0=Z}\begin{pmatrix}\frac{\tau Y}{K}I & 0 \\ 0 & Y^2\overline{W^{*}}^{\mathrm{T}}W^{*}+YI\end{pmatrix}\overline{J_f}^{\mathrm{T}}|_{Z_0=Z}$$

因此，当 $K=\frac{r+1-N}{\lambda}$ 时，域 $Y(N,D;K)$ 的 Einstein-Kähler 度量可写为

$$T=\mathrm{d}zJ_f|_{Z_0=Z}\begin{pmatrix}\frac{\tau Y}{K}I & 0 \\ 0 & Y^2\overline{W^{*}}^{\mathrm{T}}W^{*}+YI\end{pmatrix}\overline{J_f}^{\mathrm{T}}|_{Z_0=Z}\overline{\mathrm{d}z}^{\mathrm{T}}$$

类似于前面对 Bergman 度量的讨论，这时 $Y(N,D;K)$ 的 Einstein-Kähler 度量可表示为

$$(w_E(Y))^2=\frac{\tau Y}{K}|\mathrm{d}\tilde{z}|^2+(Y+Y^2\mu^2)|\mathrm{d}v|^2+Y|\mathrm{d}\widetilde{W}|^2 \quad (8)$$

为讨论问题的方便，假设

$$\Phi(X)=\frac{K^{-1}V'X+\lambda+K^{-1}N}{K^{-1}Y},$$

$$\Psi(X)=\frac{V'+V''\mu^2}{Y+Y^2\mu^2},\ \Theta(X)=\frac{V'}{Y}$$

根据 Bergman 度量和 Einstein-Kähler 度量的正定性以及(7)与(8)式，可知 $\Phi(X),\Psi(X),\Theta(X)$ 是区间［0，1）上的正值连续函数。直接计算可得

$$V'=G'(X)G^{-1}(X)=G^{-1}(X)\sum_{j=0}^{h+1}b_j\Gamma(N+j+1)(1-X)^{-(N+j+1)},$$

$$V''=G''(X)G^{-1}(X)-[G'(X)G^{-1}(X)]^2=G^{-1}(X)\sum_{j=0}^{h+1}b_j\Gamma(N+j+2)(1-X)^{-(N+j+2)}-V'^2$$

从而容易得到

$$\lim_{X\to1}\Phi(X)=\lim_{X\to1}\Psi(X)=\lim_{X\to1}\Theta(X)=r+1 \quad (9)$$

又因为 $\Phi(X),\Psi(X),\Theta(X)$ 是区间[0,1)上的连续函数，所以根据（9）可知 $\Phi(X),\Psi(X),\Theta(X)$ 在区间[0,1)上都有最大值和最小值。由于 $\Phi(X)$，$\Psi(X),\Theta(X)$ 是区间[0,1)上的正函数，所以存在正数 k_1,k_2,k_3,k_4,k_5,k_6 使得

$$k_1\leqslant\Phi(X)\leqslant k_2,\ k_3\leqslant\Psi(X)\leqslant k_4,\ k_5\leqslant\Theta(X)\leqslant k_6$$

取 $a^2=\max\{k_2,k_4,k_6\}$，$b^2=\min\{k_1,k_3,k_5\}$，则有

$$b\leqslant\frac{w_B(Y)}{w_E(Y)}\leqslant a$$

这样，我们用统一的方法证明了如下结论。

定理 2 当 $K=\frac{r+1-N}{\lambda}$ 时，域 $Y(N,D;K)$ 的 Einstein-Kähler 度量与 Bergman 度量等价。

参考文献：

［1］ 王安，殷慰萍. 超 Cartan 域的 Einstein-Kähler 度量［J］. 中国科学:A 辑,2003, 33 (4) : 384 – 396.

［2］ WANG A, WANG M J, ZHANG L Y. Kähler-Einstein metric on on Cartan-Hartogs domain［J］. 数学进展, 2009, 38 (4) : 493 – 502.

［3］ 殷慰萍,王安. Cartan-Hartogs 域经典度量的等价［J］. 中国科学:A 辑,2007, 37(1) : 113 – 128.

［4］ YIN W P, ZHANG L Y. Equivalence of the Kähler-Einstein Metric and the Bergman metric on Cartan-Hartogs domain［J］. 数学进展,2008, 37(4) : 437 – 450

［5］ 殷慰萍，张利友. Kähler-Einstein 度量和 Bergman 度量的等价问题［J］. 数学年刊,2007, 28A(4) : 545 – 556.

［6］ YIN W P, WANG A, ZHANG L Y, et al. Einstein-Kähler metric with explicit formula on non-homogeneous domain［J］. Asian J of Mathematics, 2004, 8(1) : 39 – 49.

［7］ YIN X L, ZHAO X X. The computations of Einstein-Kähler metric of Cartan-Hartogs domain［J］. Science in China (Ser A), 2005, 48: 365 – 376.

（下转第 29 页）

$$<\nu,\eta_{-k}^{2}>\geqslant c_{1}e^{-k(w_{-}+\delta_{0})},\ <\nu,\eta_{k}^{1}>\geqslant c_{2}e^{k(w_{+}-\delta_{0})}$$

从而，运用（31）式和（32）式中对熵和熵流的估计，当 $k\to\infty$ 时，(38) 式右边满足

$$\frac{<\nu,\eta_{k}^{1}q_{-k}^{2}-\eta_{-k}^{2}q_{k}^{1}>}{<\nu,\eta_{-k}^{2}><\nu,\eta_{k}^{1}>}=O(\frac{1}{k})e^{-k(w_{+}-w_{-}-2\delta_{0})}\to 0$$

在（38）式中令 $k\to\infty$，则有 $<\mu^{+},\lambda_{2}>=<\mu^{-},\lambda_{2}>$。结合（36）式和（37）式，对任意满足 $\eta_{t}+q_{x}$ 在 $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{+})$ 中紧的熵－熵流对 (η,q)，有如下关系式

$$<\mu^{+},q-\lambda_{2}\eta>=<\mu^{-},q-\lambda_{2}\eta>\quad(39)$$

在（39）式中，令 $(\eta,q)=(\eta_{-k}^{2},q_{-k}^{2})$。如果 $w_{+}-w_{-}>2\delta_{0}$，从等式（39）的左边可得

$$<\mu^{+},q-\lambda_{2}\eta>\geqslant\frac{c_{1}}{k}e^{-k(w_{+}-\delta_{0})}$$

且从等式（39）的右边可得

$$<\mu^{-},q-\lambda_{2}\eta>\leqslant\frac{c_{2}}{k}e^{-k(w_{-}+\delta_{0})}$$

其中 c_1,c_2 为适当正常数。这是不可能的，因此 $w_{-}=w_{+}$。同理用熵－熵流对 (η_{k}^{2},q_{k}^{2}) 和 $(\eta_{-k}^{1},q_{-k}^{1})$ 可证 $z_{-}=z_{+}$。因此 ν 的支集不是原点（0，0）就是另一个点 $(w*,z*)$。定理 1 证毕。

参考文献：

[1] LIU T P. Nonlinear stability and instability of transonic flows through a nozzle [J]. Comm Math Phys, 1982, 83 (2):243 – 260.

[2] WHITHAM G B. Linear and nonlinear waves [M]. New York: John Wiley and Sons, 1973.

[3] EARNSHAW S. On the mathematical theory of sound [J]. Philos Trans, 1858, 150(5):1150 – 1154.

[4] DIPERNA R J. Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of equations [J]. Comm Pure Appl Math, 1973, 26(1):1 – 28.

[5] LU Y G. Convergence of the viscosity method for nonstrictly hyperbolic conservation laws [J]. Comm Math Phys, 1992, 150(1):59 – 64.

[6] LU Y G. Existence of global entropy solutions to a nonstrictly hyperbolic system [J]. Arch Rat Mech Anal, 2005,178 (2):287 – 299.

[7] LU Y G. Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method [M]. New York: Chapman and Hall, CRC Press, 2002.

[8] LIU T P. Quasilinear hyperbolic systems [J]. Comm Math Phys, 1979, 68 (2):141 – 172.

[9] DING X X, CHEN G Q, LUO P Z. Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics [J]. Comm Math Phys, 1989,121 (1):63 – 84.

[10] CHEN G Q, GLIMM J. Global solutions to the compressible Euler equations with geometric structure [J]. Comm Math Phys, 1996,180 (1):153 – 193.

[11] 陆云光. 一类非线性双曲型偶合方程组广义解的存在性[J]. 系统科学与数学, 1996, 16(2):125 – 135.

[12] LADYZHENSKAYA O A, SOLONNIKOV V A, URALTSEVA N N. Linear and quasilinear equations of parabolic type [M]. Translation of Mathematical Monographs 23, AMS, Providence, 1968.

[13] DIPERNA R J. Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics [J]. Comm Math Phys, 1983, 91(1): 1 – 30.

(上接第 22 页)

[8] ZHAO X X, LIN P. The equivalence between Bergman metric and Einstein-Kähler metric on the Cartan-Hartogs domain of the fourth type [J]. Chin Quart J of Math, 2008, 23 (3): 317 – 324.

[9] 王安，殷慰萍，张利友，等. Cartan-Hartogs 域的 Einstein-Kähler 度量 [J]. 中国科学：A 辑，2006, 36 (11): 1201 – 1233.

[10] 殷慰萍. 华罗庚域的研究综述 [J]. 数学进展，2007, 36 (2): 129 – 152.

[11] 殷慰萍. 有界域的 Bergman 核函数显式表示的最新进展 [J]. 数学进展，2002, 31 (4): 295 – 312.