第 50 卷　第 4 期　中山大学学报（自然科学版）　Vol. 50　No. 4
2011 年　7 月　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　Jul.　2011

一类具有三个成长阶段的捕食 - 被捕食模型的持久性和灭绝性*

王爱丽
（宝鸡文理学院数学系，陕西 宝鸡 721013）

摘　要： 讨论了一类食饵种群具有三个成长阶段的捕食 - 被捕食模型。通过构造 Lyapunov 泛函，讨论了模型的非负平衡点的吸引性，给出了两物种保持持久生存，捕食者种群灭绝，及两种群均灭绝的条件。

关键词： 阶段结构；全局吸引性；时滞；持久生存；灭绝
中图分类号： O175.7　**文献标志码：** A　**文章编号：** 0529 - 6579（2011）04 - 0023 - 05

Permanence and Extinction in a Class of Predator-Prey Model with three Life Stages

WANG Aili
(Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: A class of predator-prey model with three life stages is investigated. The global attractivity of the nonnegative equilibriums is discussed by constructing Lyapunov functionals. Moreover, we obtain the conditions under which all the species keep permanent, the predator species become extinct or all the species become extinct, respectively.

Key words: stage-structure; global attractivity; delay; permanence; extinction

关于具有阶段结构的种群动力学模型，已有很多研究成果。然而，许多学者将生物种群的一生分为两个阶段：幼年和成年，只考虑物种在这两个阶段的生理机能（出生率、死亡率、扩散率、掠取食物的能力等）的差异。在文献［1］中，Aiello 和 Freedman 提出了一类具有幼体和成体两个阶段的单种群模型。文献［2－10］研究了各种不同类型的具有两个成长阶段的模型。

自然界中，存在大量的生物种群，其生长分为三个阶段：幼年，成年和老年，例如哺乳动物和昆虫。其中有少数昆虫的生长发育过程是这样的：在成虫体内繁殖幼虫，幼虫生长发育成成虫，成虫变老后退化变蛹最后死亡，五倍子虫就是一种。高淑京和陈兰荪在文献［11］中建立并研究了一类具有三个成长阶段的单种群模型。文献［12］研究了一类时变环境下的具有三个成长阶段的生态模型的全局稳定性。本文讨论一类食饵种群具有三个成长阶段的捕食 - 被捕食模型，讨论捕食者种群由幼年到成年的成熟期所引起的时滞对生物种群的稳定性的影响，即讨论如下模型

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= ax_2(t) - r_1x_1(t) - b_1x_1(t),\\
\dot{x}_2 &= b_1x_1(t) - r_2x_2(t) - c_2x_2^2(t) - \\
&\qquad b_2x_2(t) - d_1x_2(t)y(t),\\
\dot{x}_3 &= b_2x_2(t) - r_3x_3(t) - e\int_{-\tau_1}^{0} K(s)x_3(t+s)\mathrm{d}s,\\
\dot{y} &= y(t)[-r + \theta d_1x_2(t-\tau_2) - c_3y(t-\tau_3)]
\end{aligned} \tag{1}
$$

其中 x_i（t）（$i=1, 2, 3$）分别表示幼年食饵，成年食饵和老年食饵种群在 t 时刻的密度；y（t）表示捕食者种群在时刻 t 的密度。模型（1）是建立在以下的假设之上：

（H_1）幼年食饵种群的出生率与成年食饵种群

* 收稿日期：2010 - 07 - 06
基金项目：陕西省教育厅科研计划资助项目（2010JK399）；宝鸡文理学院重点科研计划资助项目（ZK0912）
作者简介：王爱丽（1978 年生），女，副教授；E-mail：aily_wang83@163.com

的密度成正比，比率系数为 a；幼年食饵种群的死亡率以及由幼年食饵种群向成年食饵种群的转化率与幼年食饵种群的密度成正比，比率系数分别为 r_1，b_1。

（H_2）成年食饵种群的死亡率以及由成年食饵种群向老年食饵种群的转化率与成年食饵种群的密度成正比，比率系数分别为 r_2，b_2；成年食饵种群的种内竞争率为 c_2；捕食者种群的捕获率为 d_1。

（H_3）老年食饵种群的死亡率与老年食饵种群的密度成正比，比率系数为 r_3；τ_1 表示老年食饵种群的化蛹期，e 表示化蛹成功的概率，$K(s)$ 是逐段连续的正规化偶函数，且 $\int_{-\tau_1}^{0} K(s)\mathrm{d}s = 1$。

（H_4）捕食者种群只捕食成年食饵种群，τ_2 表示捕食者个体对于食物消化所需要的时间，$0<\theta_1<1$；c_3 表示捕食者种群的种内竞争率。

基于生态意义，仅在 Int $\mathbb{R}_+^4$ 中考虑（1）的永久持续生存。本文假定模型（1）的初始条件为

$$x_i(t) = \varphi_i(t), \quad y(t) = \varphi_4(t),$$
$$\varphi_i \in C([-\tau,0],\mathbb{R}^+), \phi_i(0) > \lambda,$$
$$i = 1,2,3,4, \tau = \max_{i=1,2,3}\{\tau_i\} \tag{2}$$

其中 λ 为充分小的正数。

1 解的有界性

定理1 模型（1）的任一解（$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$，$y(t)$）是最终有界的，即存在 $T>0$，当 $t>T$ 时，$x_i(t) \leqslant M_1$，$i=1,2,3$，$y(t) \leqslant M_2$，其中 $M_1^* = \dfrac{a^2}{4Ac_2}$，$M_2^* = \dfrac{\theta d_1 M_1}{c_3}\exp(\theta d_1 M_1 \tau_2)$，$A=\min\{r_1, r_2, r_3\}$，$M_i = M_i^* + \epsilon$ $(i=1,2)$。

证明 令 $W(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$，则沿模型（1）计算其导数得

$$\dot{W}(t) = ax_2(t) - r_1x_1(t) - r_2x_2(t) - c_2x_2^2(t) - d_1x_2(t)y(t) - r_3x_3(t) - e\int_{-\tau_1}^{0} K(s)x_3(t+s)\mathrm{d}s \leqslant -AW(t) + ax_2(t) - c_2x_2^2(t) \leqslant -AW(t) + \frac{a^2}{4c_2}$$

从而由比较原理知，存在 $T_1>0$，当 $t \geqslant T_1$ 时，$W(t) \leqslant \dfrac{a^2}{4Ac_2}$，即有 $x_i(t) \leqslant M_1$，$i=1,2,3$。

由（1）知

$$\dot{y}(t) \leqslant y(t)[\theta d_1 M_1 - c_3 y(t-\tau_3)]$$

因此，存在 $T_2 \geqslant T_1$，当 $t \geqslant T_2$ 时，$y(t) \leqslant \dfrac{\theta d_1 M_1}{c_3}\exp\{\theta d_1 M_1 \tau_3\} + \epsilon = M_2^* + \epsilon$。

取 $T=T_2$，则当 $t>T$ 时，$x_i(t) \leqslant M_1$，$i=1,2,3$，$y(t) \leqslant M_2$。定理得证。

定理2 若模型（1）满足条件

（A_1）$a > r_1 + b_1$；

（A_2）$b_1 > r_2 + b_2 + d_1M_2$；

（A_3）$b_2m_1 > eM_1$；

（A_4）$\theta d_1 m_1 > r$，

则（1）满足（2）的解（$x_1(t)$，$x_2(t)$，$x_3(t)$，$y(t)$）是最终有下界的，即存在 $T^*>0$，当 $t>T^*$ 时，$x_i(t) \geqslant m_1$ $(i=1,2)$，$x_3(t) \geqslant m_2$，$y(t) \geqslant m_3$，其中 $m_1^* = \min\left\{\lambda, \dfrac{b_1-r_2-b_2-d_1M_2}{c_2}\right\}$，$m_2^* = \dfrac{b_2m_1-eM_1}{r_3}$，$m_3^* = \dfrac{\theta d_1 m_1 - r}{c_3}\exp\{(\theta d_1 m_1 - r)\tau_3\}$，$m_i = m_i^* - \epsilon$。

证明 取 $V(t) = \min\{x_1(t), x_2(t)\}$，则有以下两种情况：

（i）若 $x_1(t) \geqslant x_2(t)$，则

$$D_+V(t) = \dot{x}_2 \geqslant b_1x_2(t) - r_2x_2(t) - c_2x_2^2(t) - b_2x_2(t) - d_1M_2x_2(t)$$

（ii）若 $x_2(t) \geqslant x_1(t)$，则

$$D+V(t) = \dot{x}_1 \geqslant ax_1(t) - r_1x_1(t) - b_1x_1(t)$$

从而存在 $T_3 \geqslant T$，当 $t \geqslant T_3$ 时，$x_i(t) \geqslant m_1^* - \epsilon$ $(i=1,2)$。

由模型（1）的第三个方程知

$$\dot{x}_3(t) \geqslant b_2m_1 - r_3x_3(t) - eM_1$$

从而存在 $T_4 \geqslant T_3$，当 $t \geqslant T_4$ 时，$x_3(t) \geqslant m_2^* - \epsilon$。

同理可得，存在 $T_5 \geqslant T_4$，当 $t \geqslant T_5$ 时，$y(t) \geqslant m_3^* - \epsilon$。

取 $T^* = T_5$，则当 $t \geqslant T^*$ 时，$x_i(t) \geqslant m_1$ $(i=1,2)$，$x_3(t) \geqslant m_2$，$y(t) \geqslant m_3$。定理得证。

2 持久性与灭绝性

引理1 若模型（1）满足条件

（A_5）$\theta d_1ab_1 > (b_1+r_1)(\theta d_1b_2 + \theta d_1r_2 + rc_2)$

则（1）有三个非负平衡点 $E_1(0,0,0,0)$，$E_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,0)$，$E_3(x_1^*,x_2^*,x_3^*,y^*)$，其中

$$\bar{x}_2 = \frac{ab_1 - (r_1+b_1)(r_2+b_2)}{(r_1+b_1)c_2},$$

$$\bar{x}_1 = \frac{a}{r_1+b_1}\bar{x}_2, \quad \bar{x}_3 = \frac{b_2}{r_3+e}\bar{x}_2,$$

$$x_2^* = \frac{ab_1c_3 + d_1r(b_1+r_1) - c_3(b_1+r_1)(b_2+r_2)}{(b_1+r_1)(c_2c_3+\theta d_1^2)},$$

$$x_1^* = \frac{a}{r_1 + b_1} x_2^*, x_3^* = \frac{b_2}{r_3 + e} x_2^*,$$

$$y^* = \frac{\theta d_1 a b_1 - (b_1 + r_1)(\theta d_1 b_2 + \theta d_1 r_2 + r c_2)}{(b_1 + r_1)(c_2 c_3 + \theta d_1^2)}$$

定理3　若模型（1）满足条件

(A_6) $2(r_1 + b_1)c_2 > \theta d_1 b_1 (1 + c_3 M_2 \tau_3)$；

(A_7) $2c_3 > \theta d_1 (1 + c_3 M_2 \tau_3)$，

则模型（1）的平衡点 $E_1(0,0,0,0)$ 是全局吸引的，即食饵种群和捕食者种群均走向灭绝。

证明　模型（1）的第4个方程可写成

$$\dot{y}(t) = y(t)[-r + \theta d_1 x_2(t - \tau_2) - c_3 y(t)] + c_3 y(t)\int_{t-\tau_3}^{t} y(u)[-r + \theta d_1 x_2(u - \tau_2) - c_3 y(u - \tau_3)]du \tag{3}$$

令 $V_{11}(t) = x_1(t) + \beta_2 x_2(t) + \beta_3 x_3(t) + y(t)$，其中 $\beta_2 = \frac{r_1 + b_1}{b_1}$，$\beta_3 = \frac{(r_1 + b_1)(r_2 + b_2) - a b_1}{b_1 b_2}$，则沿模型(1)计算 $V_{11}(t)$ 的导数并代入（3）得

$$\begin{aligned}\dot{V}_{11}(t) &= -\beta_2 c_2 x_2^2(t) - \beta_2 d_1 x_2(t) y(t) - \beta_3 r_3 x_3(t) - \beta_3 e\int_{-\tau_1}^{0} K(s) x_3(t+s)ds + \dot{y}(t) \leqslant \\ &-\beta_2 c_2 x_2^2(t) - c_3 y^2(t) + (-r + \theta d_1 x_2(t-\tau_2)) y(t) + c_3 y(t)\int_{t-\tau_3}^{t} y(u) \cdot \\ &[-r + \theta d_1 x_2(u-\tau_2) - c_3 y(u-\tau_3)]du \leqslant \\ &-\beta_2 c_2 x_2^2(t) - \left[c_3 - \frac{\theta d_1(1 + c_3 M_2 \tau_3)}{2}\right] y^2(t) + \\ &\frac{\theta d_1}{2} x_2^2(t-\tau_2) + \frac{c_3 \theta d_1 M_2}{2}\int_{t-\tau_3}^{t} x_2^2(u-\tau_2)du\end{aligned}$$

令 $V_{12}(t) = \frac{c_3 \theta d_1 M_2}{2}\int_{t-\tau_3}^{t}\int_{s}^{t} x_2^2(u - \tau_2)duds$，则有

$$\begin{aligned}\dot{V}_{11}(t) + \dot{V}_{12}(t) \leqslant& -\beta_2 c_2 x_2^2(t) - \\ &\left[c_3 - \frac{\theta d_1(1 + c_3 M_2\tau_3)}{2}\right] y^2(t) + \\ &\frac{\theta d_1(1 + c_3 M_2 \tau_3)}{2} x_2^2(t - \tau_2)\end{aligned}$$

令 $V_{13}(t) = \frac{\theta d_1(1 + c_3 M_2 \tau_3)}{2}\int_{t-\tau_2}^{t} x_2^2(u)du$，则有

$$\begin{aligned}&\dot{V}_{11}(t) + \dot{V}_{12}(t) + \dot{V}_{13}(t) \leqslant \\ &-\left[\beta_2 c_2 - \frac{\theta d_1(1 + c_3 M_2 \tau_3)}{2}\right] x_2^2(t) - \\ &\left[c_3 - \frac{\theta d_1(1 + c_3 M_2 \tau_3)}{2}\right] y^2(t)\end{aligned}$$

令 $V_1(t) = V_{11}(t) + V_{12}(t) + V_{13}(t)$，则由条件$(A_6)$和$(A_7)$知，存在 $B_1 > 0$，使得

$$\dot{V}_1(t) \leqslant -B_1(x_2^2(t) + y^2(t))$$

对上式两边积分得

$$V_1(t) + B_1\int_{T^*}^{t}(x_2^2(s) + y^2(s))ds \leqslant V_1(T^*) < +\infty$$

所以 $x_2^2(t) + y^2(t) \in L^1[T^*, +\infty)$。又由于 $x_2(t)$ 和 $y(t)$ 是有界的，从而 $x_2^2(t) + y^2(t)$，$\dot{x}_2(t)$ 是一致连续的。由 Barblat's 引理知，$\lim_{t\to+\infty}[x_2^2(t) + y^2(t)] = 0$，$\lim_{t\to+\infty}\dot{x}_2(t) = 0$。所以

$$\lim_{t\to+\infty} x_2(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} y(t) = 0,$$

$$\lim_{t\to+\infty} x_1(t) = 0, \quad \lim_{t\to+\infty} x_3(t) = 0$$

定理得证。

定理4　若模型（1）满足条件(A_1) - (A_3)及条件

(A_8) $(r_1 + b_1)(\theta d_1 r_2 + \theta d_1 b_2) < \theta d_1 a b_1 < (r_1 + b_1)(\theta d_1 r_2 + \theta d_1 b_2 + r c_2)$；

(A_9) $2c_2 > d_1 + \frac{b_2}{m_2} + \theta d_1(1 + c_3 M_2 \tau_3)$，

(A_{10}) $\frac{r_3}{M_1} > \frac{b_2}{2m_2} + \frac{e}{m_2}$；

(A_{11}) $2c_3 > (\theta + 1)d_1 + c_3 M_2 \tau_3 \theta d_1 + 2c_3^2 M_2 \tau_3$，

则模型（1）的平衡点 $E_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, 0)$ 是全局吸引的，从而捕食者种群将会灭绝，而幼年食饵种群，成年食饵种群和老年食饵种群都是幸存的，且密度分别稳定在 $\bar{x}_1$，$\bar{x}_2$，$\bar{x}_3$。

证明　假设$(x_1(t), x_2(t), x_3(t), y(t))$是模型（1）满足条件（2）的任一解，模型（1）可改写成

$$\dot{x}_1 = \frac{a}{\bar{x}_1}[x_1(t)(x_2(t) - \bar{x}_2) - x_2(t)(x_1(t) - \bar{x}_1)],$$

$$\begin{aligned}\dot{x}_2 =& \frac{b_1}{\bar{x}_2}[x_2(t)(x_1(t) - \bar{x}_1) - x_1(t)(x_2(t) - \\ &\bar{x}_2)] - c_2 x_2(t)(x_2(t) - \bar{x}_2) - d_1 x_2(t) y(t),\end{aligned}$$

$$\dot{x}_3 = b_2(x_2(t) - \bar{x}_2) - r_3(x_3(t) - \bar{x}_3) - e\int_{-\tau_1}^{0} K(s)(x_3(t+s) - \bar{x}_3)ds,$$

$$\dot{y} = y(t)[(\theta d_1 \bar{x}_2 - r) + \theta d_1(x_2(t - \tau_2) - \bar{x}_2) - c_3 y(t - \tau_3)] \tag{4}$$

令 $V_{21}(t) = \frac{b_1 \bar{x}_1}{a \bar{x}_2}\left(x_1(t) - \bar{x}_1 - \bar{x}_1 \ln\frac{x_1(t)}{\bar{x}_1}\right) + \sum_{i=2}^{3}\left(x_i(t) - \bar{x}_i - \bar{x}_i \ln\frac{x_i(t)}{\bar{x}_i}\right) + y(t)$，沿模型(4)计算 $V_{21}(t)$ 的导数可得

$$\dot{V}_{21}(t) = -\frac{b_1}{\bar{x}_2}\left[\sqrt{\frac{x_1}{x_2}}(x_2(t) - \bar{x}_2) - \right.$$

$$
\sqrt{\frac{x_2}{x_1}}(x_1(t)-\bar{x}_1)\Big]^2 - c_2(x_2(t)-\bar{x}_2)^2 -
d_1(x_2(t)-\bar{x}_2)y(t) +
\frac{b_2}{2m_2}[(x_2(t)-\bar{x}_2)^2-(x_3(t)-\bar{x}_3)^2] -
\left(\frac{r_3}{M_1}-\frac{e}{2m_2}\right)(x_3(t)-\bar{x}_3)^2-(r-\theta d_1\bar{x}_2)y(t) +
\frac{e}{2m_2}\int_{-\tau_1}^{0}K(s)(x_3(t+s)-\bar{x}_3)^2\mathrm{d}s + y(t)\cdot
[\theta d_1(x_2(t-\tau_2)-\bar{x}_2)-c_3y(t)+c_3\int_{t-\tau_3}^{t}\dot{y}(u)\mathrm{d}u] \leqslant
-\left(c_2-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{d_1}{2}\right)(x_2(t)-\bar{x}_2)^2 -
\left(\frac{r_3}{M_1}-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{e}{2m_2}\right)(x_3(t)-\bar{x}_3)^2 -
\left(c_3-\frac{(\theta+1)d_1}{2}\right)y^2(t)+\frac{\theta d_1}{2}(x_2(t-\tau_2)-\bar{x}_2)^2 +
\frac{e}{2m_2}\int_{-\tau_1}^{0}K(s)(x_3(t+s)-\bar{x}_3)^2\mathrm{d}s +
c_3y(t)\int_{t-\tau_3}^{t}y(u)[(\theta d_1\bar{x}_2-r)+
\theta d_1(x_2(u-\tau_2)-\bar{x}_2)-c_3y(u-\tau_3)]\mathrm{d}u \leqslant
-\left(c_2-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{d_1}{2}\right)(x_2(t)-\bar{x}_2)^2 -
\left(\frac{r_3}{M_1}-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{e}{2m_2}\right)(x_3(t)-\bar{x}_3)^2 +
\frac{\theta d_1}{2}(x_2(t-\tau_2)-\bar{x}_2)^2 -
\left(c_3-\frac{(\theta+1)d_1}{2}-\frac{c_3M_2\tau_3(\theta d_1+c_3)}{2}\right)y^2(t) +
\frac{e}{2m_2}\int_{-\tau_1}^{0}K(s)(x_3(t+s)-\bar{x}_3)^2\mathrm{d}s +
\frac{c_3M_2}{2}\int_{t-\tau_3}^{t}[\theta d_1(x_2(u-\tau_2)-\bar{x}_2)^2+
c_3y^2(u-\tau_3)]\mathrm{d}u
$$

令

$$
V_{22}(t)=\frac{e}{2m_2}\int_0^{\tau_1}K(-s)\int_{t-s}^{t}(x_3(u)-\bar{x}_3)^2\mathrm{d}u\mathrm{d}s +
\frac{c_3M_2}{2}\int_{t-\tau_3}^{t}\int_{u}^{t}[\theta d_1(x_2(s-\tau_2)-\bar{x}_2)^2+
c_3y^2(s-\tau_3)]\mathrm{d}s\mathrm{d}u
$$

则有

$$
\dot{V}_{21}(t)+\dot{V}_{22}(t)\leqslant -\left(c_2-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{d_1}{2}\right)\cdot
(x_2(t)-\bar{x}_2)^2-\left(\frac{r_3}{M_1}-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{e}{m_2}\right)\cdot
(x_3(t)-\bar{x}_3)^2+\frac{c_3^2M_2\tau_3}{2}y^2(t-\tau_3) -
\left[c_3-\frac{(\theta+1)d_1}{2}-\frac{c_3M_2\tau_3(\theta d_1+c_3)}{2}\right]y^2(t) +
\left(\frac{\theta d_1}{2}+\frac{c_3M_2\theta d_1\tau_3}{2}\right)(x_2(t-\tau_2)-\bar{x}_2)^2
$$

令

$$
V_{23}(t)=\frac{\theta d_1(1+c_3M_2\tau_3)}{2}\cdot
\int_{t-\tau_2}^{t}x_2^2(u)\mathrm{d}u+\frac{c_3^2M_2\tau_3}{2}\int_{t-\tau_3}^{t}y^2(u)\mathrm{d}u
$$

则有

$$
\dot{V}_{21}(t)+\dot{V}_{22}(t)+\dot{V}_{23}(t)\leqslant
-\left[c_2-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{d_1}{2}-\frac{\theta d_1(1+c_3M_2\tau_3)}{2}\right]
(x_2(t)-\bar{x}_2)^2-\left(\frac{r_3}{M_1}-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{e}{m_2}\right)\cdot
(x_3(t)-\bar{x}_3)^2-\left[\left(c_3-\frac{(\theta+1)d_1}{2}-
\frac{c_3M_2\tau_3\theta d_1}{2}-c_3^2M_2\tau_3\right)\right]y^2(t)
$$

令 $V_2(t)=V_{21}(t)+V_{22}(t)+V_{23}(t)$，则由条件（$A_9$）－（$A_{11}$）知，存在 $B_2>0$，使得

$$
\dot{V}_2(t)\leqslant -B_2[(x_2(t)-\bar{x}_2)^2+
(x_3(t)-\bar{x}_3)^2+y^2(t)]
$$

对上式两边积分得

$$
V_2(t)+B_2\int_{T^*}^{t}[(x_2(s)-\bar{x}_2)^2+(x_3(s)-\bar{x}_3)^2+
y^2(s)]\mathrm{d}s\leqslant V_2(T^*)<+\infty
$$

所以 $[(x_2(t)-\bar{x}_2)^2+(x_3(t)-\bar{x}_3)^2+y^2(t)]\in L^1[T^*,+\infty)$。又由于 $x_2(t)$，$x_3(t)$ 和 $y(t)$ 是有界的，从而 $x_2(t)-\bar{x}_2$，$x_3(t)-\bar{x}_3$，$y(t)$ 和 $\dot{x}_2(t)$ 是一致连续的。由 Barblat's 引理知，

$$
\lim_{t\to+\infty}(x_2(t)-\bar{x}_2)^2=0,\quad \lim_{t\to+\infty}(x_3(t)-\bar{x}_3)^2=0,
\lim_{t\to+\infty}y^2(t)=0,\quad \lim_{t\to+\infty}\dot{x}_2(t)=0
$$

所以

$$
\lim_{t\to+\infty}x_1(t)=\bar{x}_1,\quad \lim_{t\to+\infty}x_2(t)=\bar{x}_2,
\lim_{t\to+\infty}x_3(t)=\bar{x}_3,\quad \lim_{t\to+\infty}y(t)=0
$$

因而模型（1）的平衡点 $E_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\bar{x}_3,0)$ 是全局吸引的。定理得证。

定理 5 若模型（1）满足条件（A_1）－（A_3）、（A_5）及条件（A_9）－（A_{11}），则模型（1）的平衡点 $E_3(x_1^*,x_2^*,x_3^*,y^*)$ 是全局吸引的，从而幼年食饵种群，成年食饵种群，老年食饵种群和捕食者种群将长期共存，它们的密度将分别趋向于 x_1^*,x_2^*,x_3^*,y^*。

证明　假设 $(x_1(t),x_2(t),x_3(t),y(t))$ 是模型（1）满足条件（2）的任一解。由条件（A_5）知，模型（1）可改写成

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \frac{a}{x_1^*}[x_1(t)(x_2(t)-x_2^*)-x_2(t)(x_1(t)-x_1^*)],\\
\dot{x}_2 &= \frac{b_1}{x_2^*}[x_2(t)(x_1(t)-x_1^*)-x_1(t)(x_2(t)-x_2^*)-\\
&\quad c_2x_2(t)(x_2(t)-x_2^*)-d_1x_2(t)(y(t)-y^*)],\\
\dot{x}_3 &= b_2(x_2(t)-x_2^*)-r_3(x_3(t)-x_3^*)-\\
&\quad e\int_{-\tau_1}^{0}K(s)(x_3(t+s)-x_3^*)\mathrm{d}s,\\
\dot{y} &= y(t)[\theta d_1(x_2(t-\tau_2)-x_2^*)-\\
&\quad c_3(y(t-\tau_3)-y^*)]
\end{aligned}
\tag{5}
$$

令

$$
\begin{aligned}
V_3(t) = {}& \frac{b_1x_1^*}{ax_2^*}(x_1(t)-x_1^*-x_1^*\ln\frac{x_1(t)}{x_1^*})+\\
&\sum_{i=2}^{3}(x_i(t)-x_i^*-x_i^*\ln\frac{x_i(t)}{x_i^*})+\\
&(y(t)-y^*-y^*\ln\frac{y(t)}{y^*})+\\
&\frac{\theta d_1}{2}\int_{t-\tau_2}^{t}(x_2(s)-x_2^*)^2\mathrm{d}s+\\
&\frac{c_3M_2}{2}\int_{t-\tau_3}^{t}\int_{s}^{t}[\theta d_1(x_2(u-\tau_2)-x_2^*)^2+\\
&c_3(y(u-\tau_3)-y^*)^2]\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\\
&\frac{e}{2m_2}\int_{0}^{\tau_1}K(-s)\int_{t-s}^{t}(x_3(u)-x_3^*)^2\mathrm{d}u\mathrm{d}s+\\
&\frac{c_3M_2}{2}[\theta d_1\tau_3\int_{t-\tau_2}^{t}(x_2(s)-x_2^*)^2\mathrm{d}s+\\
&c_3\tau_3\int_{t-\tau_3}^{t}(y(s)-y^*)^2\mathrm{d}s]
\end{aligned}
$$

则沿模型（5）计算 $V_3(t)$ 的导数可得

$$
\begin{aligned}
\dot{V}_3(t) \leqslant {}& -\left(c_2-\frac{d_1}{2}-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{\theta d_1}{2}-\frac{c_3M_2\tau_3\theta d_1}{2}\right)\cdot\\
&(x_2(t)-x_2^*)^2-\left(\frac{r_3}{M_1}-\frac{b_2}{2m_2}-\frac{e}{m_2}\right)(x_3(t)-x_3^*)^2-\\
&\left[c_3-\frac{(\theta d_1+c_3)c_3M_2\tau_3}{2}-\frac{(\theta+1)d_1}{2}-\right.\\
&\left.\frac{c_3^2M_2\tau_3}{2}\right](y(t)-y^*)^2
\end{aligned}
$$

类似于定理 4 的讨论可知

$$
\lim_{t\to+\infty}x_1(t)=x_1^*,\qquad \lim_{t\to+\infty}x_2(t)=x_2^*,
$$
$$
\lim_{t\to+\infty}x_3(t)=x_3^*,\qquad \lim_{t\to+\infty}y(t)=y^*
$$

定理得证。

参考文献：

[1] AIELLO W G, FREEDMAN H I. A time delay model of single-species growth with stage structure[J]. Math Biosci, 1990, 101(2): 139 - 153.

[2] XIAO Y N, CHEN L S. Global stability of a predator-prey system with stage-structure for the predator[J]. Acta Mathematical Sinic, 2004, 20: 63 - 70.

[3] SONG X Y, HAO M Y, MENG X Z. A stage-structured predator-prey model with distributing pulse and time delays[J]. Applied Mathematical Modelling, 2009(33): 211 - 223.

[4] XU R, MA Z E. Stability and Hopf bifurcation in a predator-prey model with stage structure for the predator[J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2008(9): 1444 - 1460.

[5] GOPALSAMY K. Stability and oscillation in delay differential equations of population dynamics[M]. Dordrecht: Kluwer Acacemic, 1992.

[6] CAI L M, FANG Q H, SONG X Y. Permanence and stability in a predator-prey system with stage structure and delays[J]. Mathematica Applicata, 2006, 19(3): 484 - 491.

[7] SHI R P, CHEN L S. Stage-structured Lotka-Volterra predator-prey model for pest managent[J]. Applied Mathematics and Computation, 2008(203): 258 - 265.

[8] ZHANG Z Q, CHI X B, CHEN L S. Global attractivity of nonautonomous stage-structrured populationmodels with dispersal and harvest[J]. Journal of Computation and Applied Mathematics, 2004(166): 411 - 425.

[9] ZHANG Z Q. Periodic solution of a predator-prey system with stage-structures for predator and prey[J]. Journal of Mathematical Analysis and Application, 2005(302): 291 - 305.

[10] 程惠东. 脉冲投放益虫化学控制害虫的害虫管理模型[J]. 中山大学学报：自然科学版, 2010, 49(3): 8 - 11.

[11] 高淑京, 陈兰荪. 具有三个成长阶段的单种群时滞模型的永久持续生存和全局稳定性[J]. 数学物理学报, 2006, 26A(3): 387 - 395.

[12] 王爱丽. 具有三个成长阶段的捕食 - 被捕食模型的永久持续生存和全局稳定性[J]. 江西师范大学学报, 2009, 33(4): 484 - 487.