第 50 卷 第 3 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 3
2011 年 5 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI May 2011

一类随机微分方程的轨道唯一性*

赵辉艳
（中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要：在漂移项系数是非 Lipschitz 并且是非凹的条件下，证明了如下随机微分方程的轨道唯一性：$X_t = x + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \sigma_i(X_s)\mathrm{d}W_s^i + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$，其中 W^i，$i = 1,2,\cdots$，为一串独立的标准布朗运动。

关键词：轨道唯一性；强解；非 Lipschitz 条件
中图分类号：O211.63 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2011）03－0008－03

Pathwise Uniqueness of a Type of Stochastic Differential Equation

ZHAO Huiyan
(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: For one-dimensional SDE $X_t = x + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \sigma_i(X_s)\mathrm{d}W_s^i + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s$, where W^i, $i = 1, 2, \cdots$, is an infinite sequence of independent standard Brownian motions, pathwise uniqueness of solutions with non-concave and non-Lipschitz drift coefficients is proved.

Key words: pathwise uniqueness; strong solution; non-Lipschitz condition

考察方程

$$X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\mathrm{d}W_s + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s \qquad (1)$$

其中 $\sigma:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^m$ 和 $b:\mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ 为连续函数，W 为布朗运动。众所周知，如果 σ 和 b 满足 Lipschitz 条件或者满足局部 Lipschitz 条件和线性增长条件，则方程（1）具有唯一的强解[1-2]。之后，Watanabe 等[3]在方程为一维的情况下在更弱的条件下得到方程解的轨道唯一性的，即方程系数满足一定意义下最弱的 Hölder 连续性。最近，在方程的系数 σ 为常数或 $b = 0$ 的情形下，方程在更弱的条件下具有解的存在唯一性得到了讨论。当方程的系数均非常数时，文献［4］中给出了一个解的存在唯一性的充分条件，之后［5］中又做了稍许的推广。

另一方面，根据 Airault-Ren[6] 和 Malliavin[7] 的工作，研究中将会碰到如下的非 Lipschitz 系数的无穷维布朗运动驱动的随机微分方程

$$X_t = x + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \sigma_i(X_s)\mathrm{d}W_s^i + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s \qquad (2)$$

文献［8］研究了这类的方程在一般非 Lipschitz 系数下的解的存在唯一性。之后，在文献［9］中，把文献［8］的存在唯一性结果推广到系数更为一般的情形，即

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leqslant \rho(|x - y|),$$
$$|b(x) - b(y)| \leqslant \gamma(|x - y|)$$

其中 ρ 为 $\mathbb{R}$ 上的有界非增的连续函数，且满足：$\rho(0) = 0, \int_0^{+\infty} \rho^{-2}(x)\mathrm{d}x = \infty$，$\gamma$ 为 R 上的有界非增的连续凹函数满足：$\gamma(0) = 0$ 和 $\int_0^{+\infty} \gamma^{-1}(x)\mathrm{d}x = \infty$。

受到了文献［10］的启发，在这篇文章中，我们同样考察方程（2），我们的主要任务是减弱 γ 的限制，即在某种意义下，把上述的条件中 γ 的凹性去掉。

* 收稿日期：2010－04－13
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10871215）；国家自然科学基金天元基金资助项目（11026202）
作者简介：赵辉艳（1982 年生），男，博士生；E-mail：huiyan.zhao@msn.com

1　基本记号及假设条件

假设 $\sigma_i(x)$，$i = 1,2,\cdots$ 和 $b(x)$ 为 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的可测函数。考虑下述的随机微分方程

$$X_t = x + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t \sigma_i(X_s)\mathrm{d}W_s^i + \int_0^t b(X_s)\mathrm{d}s \quad (3)$$

其中 W^i，$i = 1,2,\cdots$ 为一串独立的标准的布朗运动序列。记

$$\sigma(x) = (\sigma_1(x),\sigma_2(x),\cdots),$$

$$|\sigma(x)| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}\sigma_i^2(x)\right)^{1/2}$$

另外假设对所有的 $x \in \mathbb{R}$，有 $\sigma(x) \in l^2$。

我们将不加证明地陈述几个无穷维布朗运动的随机微分方程的性质，若需要证明，请查看文献[8－9]。

引理 1　假设 (F_t) 为由布朗运动 W^i（$i = 1,2,\cdots$）生成的自然流。假设 H_i（$i = 1,2,\cdots$）为一串 F_t 可测适应过程。如果对所有的 $t \geq 0$，有

$$E\int_0^t |H(s)|^2\mathrm{d}s < \infty$$

其中 $|H| = \left(\sum_{i=1}^{\infty}H_i^2\right)^{1/2}$；那么随机过程

$$M_t := \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t H_i(s)\mathrm{d}W_s^i$$

为连续的 L^2 鞅。如果对所有的 $t \geq 0$，有

$$\int_0^t |H(s)|^2\mathrm{d}s < \infty$$

那么 M 为连续的局部鞅。如果 $G_i(i = 1,2,\cdots)$ 为一族 F_t 可测适应过程，且

$$N_t := \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t G_i(s)\mathrm{d}W_s^i$$

则 M 和 N 的交互变差过程为

$$[M,N]_t = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t H_i(s)G_i(s)\mathrm{d}W_s^i$$

我们有下述的 Yamada-Watanabe 定理。

定理 1　方程（3）有唯一强解当且仅当存在弱解和轨道唯一性。

若需要了解更多的关于方程（3）的强解和弱解，请参看文献［9］。我们还有如下结果[9]。

命题 1　方程（3）存在一弱解如果 σ 和 b 为有界连续函数。

2　主要结果

定理 2　假设 $\gamma \in C^1((0,1])$ 为严格正的函数并且满足

$$\liminf_{s\to 0}\gamma(s) > 0, \qquad \liminf_{s\to 0}\frac{s\gamma'(s)}{\gamma(s)} > -1 \quad (4)$$

并且对任意的 $a > 0$，满足

$$\int_0^a \frac{\mathrm{d}s}{s\gamma(s)} = +\infty$$

对 $|x - y| < 1$，假设

$$|b(x) - b(y)| \leq c|x - y|\gamma(|x - y|)$$

我们假设严格正函数 ρ 满足

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}s}{\rho(s)^2} = +\infty \quad (5)$$

另外假设，对所有的 $x,y \in \mathbb{R}$，有

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq \rho(|x - y|)$$

则方程（1）具有轨道唯一性。

证明　根据（5）式，我们可以由 $\int_{a_k}^{a_{k-1}}\frac{\mathrm{d}u}{\rho(u)^2} = k$ 定义一个单调递减的序列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 满足：当 $k \to \infty$ 时，有 $a_k \to 0$。取连续函数序列 $f_k(u)$，$k = 1,2,\cdots$，使得其支撑包含在 (a_k,a_{k-1})，并且满足 $0 \leq f_k(u) \leq 2\rho(u)^{-2}/k$ 和 $\int_{a_k}^{a_{k-1}}f_k(u)\mathrm{d}u = 1$。令

$$g_k(u) := \int_0^{|x|}\mathrm{d}y\int_0^y f_k(u)\mathrm{d}u,\ x \in \mathbb{R}$$

因此对每一个 k，我们有 $g_k \in C^2(\mathbb{R})$，$|g'_k(x)| \leq 1$，且当 $k \to \infty$，有 $g_k(x)$ 单调上升到 $|x|$。

假设

$$\liminf_{s\to 0}\gamma(s)\left(1 + \liminf_{s\to 0}\frac{s\gamma'(s)}{\gamma(s)}\right) \geq 2$$

事实上，在（4）式中，以 $N\gamma$ 代替 γ，对足够大的 $N > 0$。那么就有

$$\liminf_{s\to 0}(s\gamma(s))' = \liminf_{s\to 0}\gamma(s)\left(1 + \liminf_{s\to 0}\frac{s\gamma'(s)}{\gamma(s)}\right) \geq 2 \quad (6)$$

令

$$\varphi_\delta(s) := \int_0^s \frac{\mathrm{d}u}{u\gamma(u) + \delta} \text{ 和}$$

$$\Phi_\delta(s) := \exp(\varphi_\delta(s)),\delta > 0,s \in (0,1]$$

则有

$$\Phi'_\delta(s) = \frac{\Phi_\delta(s)}{s\gamma(s) + \delta},$$

$$\Phi''_\delta(s) = \frac{\Phi_\delta(s)(1 - (s\gamma(s))')}{(s\gamma(s) + \delta)^2},s \in (0,1]$$

根据（6）式，可得到存在 $\varepsilon \in (0,1)$ 使得当 $0 < s < \varepsilon$ 时，有 $\Phi''_\delta(s) \leq 0$。

假设 X_t，Y_t 为方程（1）的两个强解。则有

$$Z_t := X_t - Y_t = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t(\sigma_i(X_s) - \sigma_i(Y_s))\mathrm{d}W_s^i +$$

$$\int_0^t (b(X_s) - b(Y_s))\mathrm{d}s$$

根据 Itô 公式，可以得到

$$R_t^k := g_k(Z_t) = \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t g_k'(Z_s)(\sigma_i(X_s) - \sigma_i(Y_s))\mathrm{d}W_s^i + \int_0^{t\wedge\tau} g_k'(Z_s)(b(X_s) - b(Y_s))\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^t g_k''(Z_s)(\sigma_i(X_s) - \sigma_i(Y_s))^2\mathrm{d}s$$

令 $\tau = \inf\{t > 0, |Z_t| \geqslant \varepsilon\}$，则有

$$\Phi_\delta(R_{t\wedge\tau}^k) = \Phi_\delta(R_0^k) + \sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(R_s^k)\cdot g_k'(Z_s)(\sigma_i(X_s) - \sigma_i(Y_s))\mathrm{d}W_s^i + \int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(R_s^k)g_k'(Z_s)(b(X_s) - b(Y_s))\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(R_s^k)g_k''(Z_s)(\sigma_i(X_s) - \sigma_i(Y_s))^2\mathrm{d}s + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau}\Phi''_\delta(R_s^k)g_k'(Z_s)^2(\sigma_i(X_s) - \sigma_i(Y_s))^2\mathrm{d}s$$

对上式两边同时取期望，得到

$$E(\Phi_\delta(R_{t\wedge\tau}^k)) = 1 + E(\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(R_s^k)g_k'(Z_s)\cdot |b(X_s) - b(Y_s)|\mathrm{d}s) + \frac{1}{2}E(\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(R_s^k)\cdot g_k''(Z_s)(\sigma_i(X_s) - \sigma_i(Y_s))^2\mathrm{d}s) \leqslant 1 + E(\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(R_s^k)g_k'(Z_s)|b(X_s) - b(Y_s)|\mathrm{d}s) + \frac{1}{2}E(\sum_{i=1}^{\infty}\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(R_s^k)\frac{2}{k}1_{(a_k,a_{k-1})}(Z_s)\mathrm{d}s)$$

其中第一个不等式是因为当 $0< s< \varepsilon$ 时 $\Phi''_\delta(s)\leqslant 0$ 和随机积分项的积分为0。令 $k\to\infty$，则有

$$E(\Phi_\delta(|Z_{t\wedge\tau}|)) \leqslant 1 + E(\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(|Z_s|)|b(X_s) - b(Y_s)|\mathrm{d}s) \leqslant 1 + cE(\int_0^{t\wedge\tau}\Phi'_\delta(|Z_s|)|Z_s|\gamma(|Z_s|)\mathrm{d}s) \leqslant 1 + c\int_0^{t\wedge\tau}E(\Phi_\delta(|Z_s|))\mathrm{d}s$$

根据 Gronwall 不等式，对每一个 $\delta > 0$，可以得到

$$E(\Phi_\delta(|Z_{t\wedge\tau}|)) \leqslant \exp(ct)$$

令 $\delta\to 0$，则对每一个给定的 t，有

$$|Z_{t\wedge\tau}| = 0 \quad a.s.$$

如果有 $P(\tau < +\infty) > 0$，则对某个 T 足够大，就会有 $P(\tau < T) > 0$。根据上式，几乎处处对所有的 $t \in \mathbb{Q}\cap[0,T]$，有 $|Z_{t\wedge\tau}| = 0$。因此在集合 $\{\tau \leqslant T\}$ 上，有 $|Z_\tau| = 0$，这就与 τ 的定义矛盾。因此几乎处处有 $\tau = +\infty$ 并且对任意给定的 t，几乎处处有 $|Z_t| = 0$。根据的轨道的连续性，命题得证。

根据命题 1，我们有下面的推论。

推论 1 假设 σ 和 b 为有界连续函数并且满足上述定理的条件。则方程（3）具有唯一强解。

参考文献:

[1] 黄志远. 随机分析学基础[M]. 2 版. 北京:科学出版社,2001.

[2] IKEDA N, WATANABE S. Stochastic differential equations and diffusion processes [M]. 2nd ed. Kodansha Ltd, Tokyo, 1989.

[3] WATANABE S, YAMADA T. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations II [J]. J Math Kyoto Univ, 1971, 11: 553-563.

[4] FANG S Z, ZHANG T S. A study of a class of stochastic differential equations with non-Lipschitzian coefficients [J]. Probab Theory Related Fields, 2005, 132 (3): 356-390.

[5] WANG F Y, WANG J M. Finite and infinite dimensional stochastic differential equations with non-Lipschitzian coefficients [J]. Chinese Journal of Applied Probability and Statistics, 2009, 25 (2): 126-134.

[6] AIRAULT H, REN J G. Modulus of continuity of the canonic Brownian motion "on the group of diffeomorphisms of the circle" [J]. J Funct Anal, 2002, 196 (2): 395-426.

[7] MALLIAVIN P. The canonic diffusion above the diffeomorphism group of the circle [J]. C R Acad Sci Paris Sér I Math, 1999, 329 (4): 325-329.

[8] CAO G L, HE K. On a type of stochastic differential equations driven by countably many Brownian motions [J]. J Funct Anal, 2003, 203 (1): 262-285.

[9] HE K, ZHANG X C. One dimensional stochastic differential equations with distributional drifts [J]. Acta Math Appl Sin Engl Ser, 2007, 23 (3): 501-512.

[10] CHIANG T S, LIN C Y. On pathwise uniqueness of stochastic differential equations [C] // Proceedings of the 5th Asian Mathematical Conference, Malaysia 2009: 687-694.