第 50 卷 第 3 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 50 No. 3
2011 年 5 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　May 2011

推广的 Maxwell 方程及其初步应用：载流导体中净电荷的产生或禁止导致 Joule 热或超导电性 *

佘卫龙
（中山大学光电材料与技术国家重点实验室，广东 广州 510275）

摘　要：从电荷守恒定律出发，利用微分几何方法并参照 Maxwell 方程，导出一组推广的 Maxwell 方程。这组方程适用于各向同性介质。它们包含了 Maxwell 方程和 London 方程并与 Ginzburg-Landau 方程兼容。它们既能描写正常态，也能描写超导态。Ohm 定律可从这组方程导出。对电子导电的非磁性导体，作者从这组方程得到一个新的 Joule 热公式。此公式引出一个新的物理图像：在导体中，稳定电流形成并促使净电荷产生的是正常态；稳定电流形成但禁止净电荷产生的是超导态。

关键词：推广的 Maxwell 方程；新 Joule 热公式；净电荷产生；正常态；超导态
中图分类号：O44　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 - 6579（2011）03 - 0147 - 03

1873 年 Maxwell[1]提出了后来以他的名字命名的著名电磁场方程。自那以后，这组方程一直是经典电动力学的基石，是公认的物理学基本规律之一。Maxwell 方程被广泛用于解释静电现象，静磁现象；解释电磁波的产生与传播[2]。在处理光的传播、干涉和衍射等问题时，Maxwell 方程是一个强有力的工具[3]。此外，Maxwell 方程已成为超导体或磁流体唯象理论的重要组成部分[4-6]。现代漂亮矢量形式的 Maxwell 方程是 Heaviside 和 Hertz 重新改造过的[2,7]。它包括以下 4 个微分方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \tag{4}$$

这里 $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{J}$ 和 ρ 分别是电场强度，电位移，磁感应强度，磁场强度，电流密度和净电荷密度。在实际应用中，要由这组方程求解电磁场，电流密度和净电荷密度先要给定。因此，电流密度和净电荷密度在 Maxwell 方程中所处的地位与电磁场明显不同，它们看起来似乎是先验的。如果所考虑的电磁现象包含有电流，而电流又是必须从理论上确定的，则问题分析需要求助 Ohm 定律

$$\boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E}, \tag{5}$$

这里 σ 是材料的电导率。Ohm 定律是一条实验规律，是一条公认的独立于 Maxwell 方程的物理规律。它已被广泛用于电路工程。尽管 Maxwell 方程和 Ohm 定律已取得丰硕的成果，可它们在处理超导问题特别是 Meissner 效应和超导电流无损现象时却暴露出内在的极限性。如所周知，Meissner 效应不能用 Maxwell 方程和 Ohm 定律进行解释[4]。超导电流无损耗意味着该电流不产生 Joule 热。这给 Ohm 定律带来很大的麻烦。有一种模型，它将超导体看成是电导率为无穷大的理想导体。但是，无穷大的电导率在物理上理解是有困难的。因为外加磁场要穿进理想导体需耗费无穷长的时间，那怕穿进去的只是一个薄层[4]。Meissner 效应实验否定这一点。当然，为了克服这一困难，人们可以求助于 London 或 Ginzburg-Landau 理论[4-5]。这样可以避免应用 Ohm 定律。然而，London 方程和 Ginzburg-Landau 不是 Maxwell 方程的自然要求，它们是为了解释超导现象而另外引进的。

我们从电荷守恒定律出发，利用微分几何方法并参照 Maxwell 方程，导出一组推广的电磁场方程（或称之为推广的 Maxwell 方程）。这组方程适用于各向同性介质。它们包含了 Maxwell 方程而又能避免上述 Maxwell 方程所遇到的困难。这里不讨论具体推导过程，我们直接给出结果。具体如下：

$$\frac{\partial(\alpha \boldsymbol{J})}{\partial t} + \nabla\left(\frac{c^2 \alpha \rho}{\mu_r \varepsilon_r}\right) = -\boldsymbol{E} \tag{6}$$

$$\nabla \times (\alpha \boldsymbol{J}) = \boldsymbol{B} \tag{7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{8}$$

* 收稿日期：2011 - 04 - 15
作者简介：佘卫龙（1952 年生），男，教授，博士生导师；E-mail：shewl@ mail. sysu. edu. cn

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho, \tag{9}$$

方程中 c 是真空中光速；μ_r 和 ε_r 分别是相对磁导率和相对介电常数；$\alpha = \alpha(r,t)$，是一个依赖于空间坐标和时间的参数。方程（8）和（9）正是 Maxwell 方程（2）和（3）。而方程（6）和（7）则由以下 4 个方程导出

$$\varphi - \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{c^2\alpha}{\mu_r\varepsilon_r}\rho, \tag{10}$$

$$\boldsymbol{A} + \nabla \phi = \alpha \boldsymbol{J}, \tag{11}$$

$$\boldsymbol{B} = \nabla \times (\boldsymbol{A} + \nabla \phi) = \nabla \times \boldsymbol{A}, \tag{12}$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{\partial(\boldsymbol{A} + \nabla \phi)}{\partial t} - \nabla(\varphi - \frac{\partial \phi}{\partial t}) = -\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \nabla \varphi \tag{13}$$

这里 $\boldsymbol{A}$ 和 φ 分别是矢势和标势；ϕ 是一个依赖于坐标和时间的标量函数，它与电流及净电荷密度有关但与电磁场无关。我们看到，在推广的 Maxwell 方程中，电流密度和净电荷密度与电磁场的地位是平等的，这与 Maxwell 方程的情况不同。我们知道，London 方程和 Ginzburg-Landau 方程在超导电性唯象理论中具有里程碑式的意义。当 $\alpha = -m/(n_s e^2)$ = 常数 并且 $\mu_r = \varepsilon_r = 1$ 时，方程（6）和（7）就变成 London 兄弟[8]提出的方程，这里 m 和 e 分别是电子质量和基本电荷；n_s 是超导电子数密度。也就是说，London 兄弟的方程只是我们方程的特例。要特别提醒的是，在参考文献［8］中，净电荷密度 ρ 一般不为零，例如，对一个时间依赖的超导态。推广的 Maxwell 方程与 Ginzburg-Landau 方程也是兼容的。我们只要在第二 Ginzburg-Landau 方程 $\boldsymbol{J} = -i\hbar e/2m \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - e^2/m \cdot \psi\psi^* \boldsymbol{A}$ 中令 $\psi(r) = \sqrt{n_s(r)}\exp(-ie\phi/\hbar)$，立刻就得到方程（11）[4]。此时 $\alpha = -m/(n_s(r)e^2)$，其中超导电子数密度一般是坐标的函数。在这种情况下，第一 Ginzburg-Landau 方程就变成了确定参数 α 的一种选择，或一种需要。

读者很容易从方程（6）和（7）直接导出 Maxwell 方程（1）和（4），但是我们必须给方程（6）和（7）加上一个约束条件：当 $\boldsymbol{J} = 0$ 但 $\boldsymbol{B} \neq 0$，或 $\boldsymbol{J}$ 和都为零但 $\boldsymbol{E} \neq 0$ 时，$\alpha \to \infty$。实际上，这是方程（6）-（13）的内在要求。对 $\rho = 0$，$\boldsymbol{E} = 0$ 但 $\boldsymbol{J} \neq 0$，或 $\boldsymbol{J} = 0$，$\boldsymbol{B} = 0$ 但 $\rho \neq 0$ 这两种特殊情况，α 不为无穷大。

推广的 Maxwell 方程不仅适用于超导态，而且适用于正常态。如上文提到，Ohm 定律是一条实验规律，是一条公认的独立于 Maxwell 方程的物理规律。我们发现，它可从这组方程导出。与 Ohm 定律紧密相联系的是 Joule 定律。Joule 热（功率）公式是 $Q = I^2R$，此处 I 是电流强度，R 是 Ohm 电阻。此公式告诉我们，Joule 热（功率）正比于 Ohm 电阻。因此，过去人们总是将 Joule 热归因于 Ohm 电阻。可是我们发现，在 Ohm 电阻背后，导致 Joule 热的还有其它物理因素。由推广的 Maxwell 方程，对电子导电的非磁性导体，我们得到另一个 Joule 热（功率密度）公式

$$\mathscr{P} = \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} = -\frac{c^2\rho}{\mu_e\varepsilon_r} \tag{14}$$

这里 μ_e 是电子迁移率，它确实与 Ohm 电阻密切相关。公式中的负号表明，导体中的净电荷是负的。公式指出，除了 Ohm 电阻外，Joule 热还与相对介电常数及导体中的净电荷产生密切相关。这使我们想起了超导现象。我们知道，超导电流不产生 Joule 热。或严格地说，超导电流的 Joule 热是不可观察的。从公式（14）看，导致 Joule 热不可观察有 3 种可能：① $\mu_e \to \infty$；② $\varepsilon_r \to \infty$；③ $\rho \to 0$。第一种可能对应于无穷大电导率，这在上文已讨论过，是不可能的。第二种可能也不成立，例如，一块处于超导态的 I 类超导体，不可能变成一块相对介电常数为无穷大的电介质，否则，可将其插入两块金属板之间，从而构成一个电容量为无穷大的电容器。因此，最可能的是第三种情况。也就是说，净电荷产生过程被禁止从而导致超导电性。这还是个猜测，因为公式（14）是从正常导体导出的。让我们从方程（6）-（9）出发来讨论这个问题。因为在瞬态，总有正常电流出现，情况比较复杂，所以我们直接考虑稳态情况。在稳态，$\partial(\alpha \boldsymbol{J})/\partial t = 0$，于是由方程（6）我们得到 $\nabla(c^2\alpha\rho/\mu_r\varepsilon_r) = -\boldsymbol{E}$；设 α 不为常数，如果 $\rho = 0$ 但 $\boldsymbol{J} \neq 0$，则 $\boldsymbol{E} = 0$，于是 $\boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} = 0$，没有 Joule 热产生。这应该是超导态。其实在稳态，当 α 不为常数时，方程（6）-（9）表明，将电流和电场强度联系起来的正是净电荷密度 ρ。当 $\rho = 0$ 时，这种联系已被破坏，于是我们有 $\boldsymbol{E} = 0$ 但 $\boldsymbol{J} \neq 0$。在这种情况下，Ohm 定律已经失效，谈论电导率和电子迁移率都是没意义的。对 α 为常数的情况，我们可以得出同样的结论，即超导电流要求没有净电荷的产生。让我们考虑一种最简单的情况：一个无穷长圆柱形 I 类超导体，放于均匀磁场中；磁场方向平行于圆柱的轴线；将超导体冷却到临界温度之下；此时将产生一个稳定的超导电流。假定 $\rho \neq 0$ 但 α 为常数，则由方程（6）和（9）我们立刻得到 $\nabla^2\rho = -\rho/(\alpha/\mu_0)$。

（下转封三）

（上接第 148 页）

这里μ_0为真空磁导率。因为考虑到 Meissner 效应，我们已令$\mu_r=\varepsilon_r=1$及$\alpha<0$。$\sqrt{-\alpha/\mu_0}$是净电荷穿透深度，它与 Meissner 效应中磁场及超导电流的穿透深度相同。因为穿透深度，这个ρ看起来似乎与超导现象有关，其实并无关系。当没给超导体另外加上电荷时，ρ应该为零。换句话说，当α为常数时，超导电流的出现（产生 Meissner 效应）要求净电荷不产生。这并不奇怪，因为在稳态，当α为常数时，电流（磁场）和净电荷（电场）之间的耦合已经解除。方程（6）-（9）很清楚地展示了这一点。上面的讨论展现这样一个物理图像：在导体中，稳定电流形成并促使净电荷产生的是正常态；稳定电流形成但禁止净电荷产生的是超导态。净电荷产生禁戒与超导电性微观机制例如 Cooper 对形成文［9－13］之间的联系将是一个十分有趣的课题。

致谢　作者感谢陈兵龙教授在微分几何方面的有益讨论。

参考文献：

［1］ MAXWELL J C. A treatise on electricity and magnetism［M］. The Clarendon Press, 1873.

［2］ SOMMERFELF A. Electrodynamics［M］. New York: Academic Press Inc., Publishers, 1952.

［3］ BORN M, WOLF E. Principle of optics: Electromagnetic theory of propagation, interference and diffraction of light (Vols. I and II)［M］. 5th Ed. Oxford: Pergamon Press, 1975.

［4］ SCHMIDT V V. The physics of superconductors: Introduction to fundamentals and applications (Eds. Müller P and Ustinov A V)［M］. New York: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1977.

［5］ PARKS R D (Ed.). Superconductivity (Vols. I and II)［M］. New York: Marcel Dekker, Inc, 1969.

［6］ ALFVÉN H. Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves［J］. Nature, 1942, 150:405－406.

［7］ HEAVISIDE O. Electrical Papers (Vol. I)［M］. New York: Macmillan and Co, 1892.

［8］ LONDON F, LONDON H. The electromagnetic equations of the supraconductor［J］. Proc R Soc Lond A, 149, 1935, 71－88.

［9］ COOPER L N. Bound electron pairs in a degenerate Fermi gas［J］. Phys Rev, 1956, 104: 1189－1190.

［10］ BARDEEN J, COOPER L N, Schrieffer J R. Theory of superconductivity［J］. Phys Rev, 1957, 108:1175－1204.

［11］ OTT H R. p-wave superconductivity in Ube_{13}［J］. Phys Rev Lett, 1984, 52:1915－1918.

［12］ KOTLIAR G. Resonating valence bonds and d-wave superconductivity［J］. Phys Rev B, 1988, 37: 3664－3666.

［13］ WON H, MAKI K. d-wave superconductor as a model of high-T_c superconductors［J］. Phys Rev B, 1994, 49: 1397－1402.