

光滑核紧积分算子特征值的多尺度 Galerkin 快速算法*

陈 剑¹, 曾泰山²

(1. 佛山科学技术学院理学院数学系, 广东 佛山 528000;

2. 华南师范大学数学科学学院, 广东 广州 510631)

摘 要: 考虑一类积分算子特征值问题的多尺度 Galerkin 逼近格式, 给出了相应的截断策略, 大大减少了计算量, 证明了收敛阶和计算复杂度达到几乎最优。

关键词: 紧算子; 特征值; 多尺度 Galerkin 算法

中图分类号: O241.83 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2011)03-0027-05

Fast Multiscale Galerkin Algorithms for the Eigenvalue Problem of Compact Integral Operator with Smooth Kernel

CHEN Jian¹, ZENG Taishan²

(1. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China;

2. School of Mathematical Science, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: A fast multiscale Galerkin method for solving eigenvalue problem of compact integral operator with symmetrical and smooth kernel is developed. Through corresponding truncation strategy, it is proved that the order of convergence and the computational complexity are both almost optimal.

Key words: compact operator; eigenvalue; multiscale Galerkin algorithms

设 $E := [0, 1]$, 记 $X := L^2(E)$, 算子 $K: X \rightarrow X$ 定义如下

$$Ku(t) := \int_0^1 K(t,s)u(s)ds, t \in E$$

其中 $K(t,s): E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个光滑对称核, 即

$$K(t,s) \in C^k(E \times E), K(t,s) = K(s,t)$$

于是, K 为 X 上的自共轭紧算子 K (参看 [1])。考虑 K 的特征值问题:

$$Ku(t) = \lambda u(t) \quad (1)$$

其中数 λ 和向量 $u \in X, u \neq 0$ 是待求的特征值和相应的特征向量。特征值问题具有广泛的实际应用背景, 在结构力学、工程设计、计算物理等诸多学科和技术领域都会遇到特征值问题。设计一个有效的求解特征值问题的算法, 对科学计算和工程应用都

有着巨大的意义。目前数值求解 (1) 的主要数值方法有: 有限元方法、(迭代) Galerkin 方法、配置法、退化核方法以及外推法等等, 参看文献 [2-8]。本文运用多尺度 Galerkin 方法来近似求解 (1) 的特征值, 由于所用的多尺度正交小波基底具有消失矩和紧支集 (参看 [9-11]), 使得离散所得矩阵数值稀疏 (绝大部分元素小的可以忽略不计), 从而可以实现矩阵压缩, 快速得到系数矩阵稀疏的线性方程组, 为后面矩阵特征值的求解提供极大的方便。

1 多尺度 Galerkin 格式

设 X_n 是 $L^2(E)$ 上的一个有限维子空间, 则求

* 收稿日期: 2010-05-05

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10771224)

作者简介: 陈剑 (1981年生), 男, 博士; E-mail: chenjian704@163.com

解 (1) 的 Galerkin 方法为: 求数 λ_n 和向量 $u_n \in X_n, u_n \neq 0$, 使得

$$(Ku_n, v) = \lambda_n(u_n, v) \quad \forall v \in X_n \quad (2)$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示空间 $L^2(E)$ 上的内积。

设 $\mu \geq 2$ 是一正整数, 我们取 X_n 为以 $j/\mu^n, j - 1 \in Z_{\mu^{n-1}}$ 为节点次数小于 k 的分片多项式空间, 其中 $Z_N := \{0, 1, \dots, N - 1\}$, 显然 $\dim(X_n) = k\mu^n$, $X_n \subset X_{n+1}$, 从而 X_n 可以写成 X_{n-1} 与其在 X_n 中的正交补空间 W_n 的直和。记 $w(i)$ 为空间 W_i 的维数。按照文献 [9 - 11] 的构造方法, 我们得到 X_n 的一组具有 k 阶消失矩和紧支集的多尺度正交小波基 $\{w_{i,j}; (i,j) \in U_n\}$, 其中 $U_n := \{(i,j) : i \in Z_{n+1}, j \in Z_{w(i)}\}$ 。利用多尺度小波基, 可以将 (2) 的特征向量表示成

$$u_n = \sum_{(i,j) \in U_n} c_{i,j} w_{i,j} \quad (3)$$

其中 $c_{i,j}$ 是待求系数。将上式代入方程 (2) 中, 得到多尺度 Galerkin 格式:

$$\sum_{(i,j) \in U_n} c_{i,j} (w_{i',j'}, Kw_{i,j}) = \lambda_n \sum_{(i,j) \in U_n} (w_{i',j'}, w_{i,j}) \quad (4)$$

定义

$$\begin{aligned} K_n &:= [(w_{i',j'}, Kw_{i,j})]_{(i',j'),(i,j) \in U_n}, \\ E_n &:= [(w_{i',j'}, w_{i,j})]_{(i',j'),(i,j) \in U_n}, \\ C_n &:= [c_{i,j}; (i,j) \in U_n] \end{aligned}$$

于是方程 (4) 可导出如下线性方程组

$$(K_n - \lambda_n E_n) C_n = 0 \quad (5)$$

2 矩阵压缩算法

记 $K_{i',j';i,j} := (w_{i',j'}, Kw_{i,j})$, $I_{i,j}, I'_{i',j'}$ 分别表示 $w_{i,j}$ 和 $w_{i',j'}$ 的支集, 我们估计矩阵 K_n 中元素的大小。

引理 1 存在正常数 $c > 0$, 使得

$$|K_{i',j';i,j}| \leq c\mu^{-(k+\frac{1}{2})(i+i')} \quad (6)$$

证明 设 s_0 和 t_0 分别是 $I_{i,j}$ 和 $I'_{i',j'}$ 之中点。将 $K(t,s)$ 在 $t = t_0, s = s_0$ 处作泰勒展开:

$$K(t,s) = p(t,s) + q(t,s) + \frac{(t-t_0)^k (s-s_0)^k}{k!k!} r(t,s)$$

其中 $p(t, \cdot)$ 和 $q(s, \cdot)$ 分别表示 t 和 s 的次数低于 k 的多项式,

$$\begin{aligned} r(t,s) &= \int_0^1 \int_0^1 K^{k,k}(t_0 + \theta'(t-t_0), s_0 + \theta(s-s_0)) \cdot \\ &\quad (1-\theta)^{k-1} (1-\theta')^{k-1} d\theta d\theta' \end{aligned}$$

其中 $0 < \theta' < 1, 0 < \theta < 1$ 。由于 $K(t,s) \in C^k([0,1] \times [0,1])$, 则存在 $M > 0$ 使

$$\max_{\substack{s \in I(i,j) \\ t \in I'(i',j')}} |K^{(k,k)}(t,s)| < M$$

注意到 $w_{i,j}$ 和 $w_{i',j'}$ 具有 k 阶消失矩, 从而

$$\begin{aligned} |K_{i',j';i,j}| &= \left| \int_0^1 \int_0^1 K(t,s) w_{i,j}(s) w_{i',j'}(t) ds dt \right| \leq \\ &\frac{M}{k^2 k! k!} \left| \int_{I_{i,j}} w_{i,j}(s) (s-s_0)^k ds \right| \cdot \\ &\left| \int_{I'_{i',j'}} w_{i',j'}(t) (t-t_0)^k dt \right| \leq \\ &\frac{M}{k^2 k! k!} \left[\int_{I_{i,j}} (s-s_0)^{2k} ds \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_{I'_{i',j'}} (t-t_0)^{2k} dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\frac{M}{k^2 k! k!} \mu^{-ki} |I_{i,j}|^{\frac{1}{2}} \mu^{-ki'} |I'_{i',j'}|^{\frac{1}{2}} = \\ &\frac{M}{k^2 k! k!} \mu^{-(k+\frac{1}{2})(i+i')} := c\mu^{-(k+\frac{1}{2})(i+i')} \end{aligned}$$

引理得证。

上述引理表明, 当 $i + i'$ 比较大时, 矩阵元素 $K_{i',j';i,j}$ 的绝对值非常小, 这使得我们可以采用相应的截断策略。为此, 我们将矩阵 K_n 按以下方式分块

$$K_n := [K_{i',i}]_{i',i \in Z_{n+1}}$$

其中 $K_{i',i} = [K_{i',j';i,j}]_{j' \in Z_{w(i')}, j \in Z_{w(i)}}$ 。对块矩阵 $K_{i',i}$ 我们给出如下压缩策略, 并将压缩而产生的新的块矩阵记为

$$\bar{K}_{i',i} := [K_{i',j';i,j}]_{j' \in Z_{w(i')}, j \in Z_{w(i)}}$$

其中

$$\bar{K}_{i',i} = \begin{cases} K_{i',i}, & i + i' \leq n \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad (8)$$

从而矩阵 K_n 被压缩成新的稀疏矩阵 $\bar{K}_n := [\bar{K}_{i',i}]_{i',i \in Z_{n+1}}$ 。用矩阵 \bar{K}_n 代替方程 (5) 中的 K_n , 得到新的线性方程组

$$(\bar{K}_n - \bar{\lambda}_n E_n) \bar{C}_n = 0 \quad (9)$$

其中 $\bar{\lambda}_n$ 是 \bar{K}_n 的特征值, \bar{C}_n 是 \bar{K}_n 的特征向量。利用矩阵 \bar{K}_n , 可以定义一个线性积分算子 $\bar{K}_n: X_n \rightarrow X_n$, 其核函数为

$$\bar{K}_n(t,s) := \sum_{(i',j') \in U_n} \sum_{(i,j) \in U_n} b_{i',j';i,j} w_{i',j'}(t) w_{i,j}(s)$$

其中 $b_{i',j';i,j}$ 表示矩阵 \bar{K}_n 的元素。由截断策略及核函数的定义, 易知 \bar{K}_n 是自共轭紧线性算子。于是求解 (1) 的 Galerkin 压缩格式为: 求 $\bar{\lambda}_n$ 与 $\bar{u}_n =$

$$\sum_{(i,j) \in U_n} \bar{c}_{i,j} w_{i,j} \text{ 使}$$

$$(\bar{K}_n - \bar{\lambda}_n I) \bar{u}_n = 0 \quad (10)$$

对于 (10) 的离散形式 (9), 我们指出矩阵 \bar{K}_n 并不是在计算完 K_n 的每个元素之后作截断来获得, 而是根据我们的截断策略 (8), 判断 K_n 中哪些元素不需要计算 (直接赋值为 0), 将需要计算的元素计算出来而获得 \bar{K}_n 。对于 Galerkin 方法而言, 这大大减少了计算积分的次数, 从而大大减少了计

算量, 实现快速计算。在接下来的这一节, 我们将证明在截断策略 (8) 下, 压缩格式 (10) 可以获得几乎最优收敛阶和几乎线性的计算复杂度。

3 压缩格式的收敛性和复杂性分析

引理 2 存在一个与 n 无关的常数 $c > 0$, 使得

$$\|K_{i',i}\|_2 \leq c\mu^{-k(i+i')} \quad (11)$$

证明 注意到 $w(i) \sim \mu^i, w(i') \sim \mu^{i'}$ 有

$$\|K_{i',i}\|_\infty = \max_{j' \in Z_{w(i')}} \sum_{j \in Z_{w(i)}} |K_{i',j';i,j}| \leq w(i)c'\mu^{-(k+\frac{1}{2})(i+i')} \leq c_1\mu^{-(k+\frac{1}{2})(i+i'+i)}$$

同理

$$\|K_{i',i}\|_1 \leq c_2\mu^{-(k+\frac{1}{2})(i+i'+i')}$$

于是

$$\|K_{i',i}\|_2 \leq (\|K_{i',i}\|_\infty \cdot \|K_{i',i}\|_1)^{\frac{1}{2}} \leq (c_1c_2)^{\frac{1}{2}}\mu^{-k(i+i')}$$

记 $c = (c_1c_2)^{\frac{1}{2}}$, 即得引理结论。

引理 3 设 P_n 是 $X \rightarrow X_n$ 的正交投影算子, 算子 K_n, \bar{K}_n 如前文所定义, 则存在一个与 n 无关的常数 $c > 0$, 对任意的 $u \in L^2(E)$ 有

$$\|(K_n - \bar{K}_n)P_n u\| \leq c\mu^{-nk} \log(s(n)) \|u\|$$

其中 $s(n) = \dim X_n = k\mu^n$ 。

证明 对任意 $u, v \in L^2[0,1]$, 有

$$\begin{aligned} (K_n - \bar{K}_n)P_n u, v &= ((K_n - \bar{K}_n)P_n u, P_n v) = \\ &= \sum_{(i,i') \in Z_{n+1}} ((K_n - \bar{K}_n)(P_i - P_{i-1})u, (P_{i'} - P_{i'-1})v) = \\ &= \sum_{(i,i') \in Z_{n+1}} \sum_{j \in Z_{w(i)}} \sum_{j' \in Z_{w(i')}} ((K_{i',j';i,j} - \bar{K}_{i',j';i,j})u_{i,j}v_{i',j'}) \end{aligned}$$

其中 $P_{-1} := 0$ 。由 Cauchy - Schwarz 不等式可得

$$\begin{aligned} |((K_n - \bar{K}_n)P_n u, v)| &\leq \sum_{(i,i') \in Z_{n+1}} \|K_{i',i} - \bar{K}_{i',i}\|_2 \cdot \\ &\| (P_i - P_{i-1})u \| \| (P_{i'} - P_{i'-1})v \| \end{aligned}$$

注意到 P_n 为正交投影, 由引理 2 和截断策略 (8) 可知

$$\begin{aligned} |((K_n - \bar{K}_n)P_n u, v)| &\leq \sum_{(i,i') \in Z_{n+1}} \|K_{i',i} - \bar{K}_{i',i}\|_2 \cdot \\ &\| (P_i - P_{i-1})u \| \| (P_{i'} - P_{i'-1})v \| \leq \\ &c' \sum_{i+i' > n} \mu^{-k(i+i')} \|u\| \|v\| \end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned} \sum_{i+i' > n} \mu^{-k(i+i')} &= \sum_{i=0}^n \mu^{-ki} \sum_{i'=n-i+1}^n \mu^{-ki'} = \\ &= \frac{\mu^{-k}}{1 - \mu^{-k}} (n+1)\mu^{-nk} \leq c''(\log s(n))\mu^{-nk} \end{aligned}$$

记 $c = c'c''$, 于是

$$\|(K_n - \bar{K}_n)P_n u\| = \sup_{\substack{v \in L^2[0,1] \\ \|v\| \neq 0}} \frac{|((K_n - \bar{K}_n)P_n u, v)|}{\|v\|} \leq c\mu^{-nk} \log(s(n)) \|u\|$$

引理获证。

接下来对自共轭紧算子 $K_n - \bar{K}_n$ 进行估计。因为

$$|((K_n - \bar{K}_n)u, u)| = |((K_n - \bar{K}_n)P_n u, u)| \leq \|(K_n - \bar{K}_n)P_n u\| \|u\|$$

从而

$$\begin{aligned} \|K_n - \bar{K}_n\| &= \sup_{\substack{u \in L^2[0,1] \\ \|u\|=1}} |((K_n - \bar{K}_n)u, u)| = \\ &= \sup_{\substack{u \in L^2[0,1] \\ \|u\|=1}} |((K_n - \bar{K}_n)P_n u, u)| = c\mu^{-nk} \log(s(n)) \end{aligned}$$

于是我们可以得到以下结论

定理 1 存在一个与 n 无关的常数 $c > 0$, 使得

$$\|K_n - \bar{K}_n\| \leq c\mu^{-nk} \log(s(n)) \quad (12)$$

下面这个引理将在特征值误差估计中被用到, 是一个很有用的结论 (参看 [1])。

引理 4 设 K_1 和 K_2 都是 Hilbert 空间 X 到 X 的自共轭紧线性算子, 算子 $K = K_1 + K_2$, K_1, K_2 的第 n 个正特征值 (单调下降排列) 分别为 $\lambda_n^+, \lambda_{1n}^+, \lambda_{2n}^+$, 第 n 个负特征值 (单调上升排列) 分别为 $\lambda_n^-, \lambda_{1n}^-, \lambda_{2n}^-$, 则

$$|\lambda_n^+ - \lambda_{1n}^+| \leq \max(\lambda_{21}^+, -\lambda_{21}^-) = \|K_2\| \quad (13)$$

定理 2 设自共轭紧线性算子 K 和 \bar{K}_n 的第 j 个正特征值 (按单调下降排列) 分别为 $\lambda_j^+, \bar{\lambda}_{nj}^+$, 第 j 个负特征值 (按单调上升排列) 分别为 $\lambda_j^-, \bar{\lambda}_{nj}^-$, 若特征向量 $u \in H^k(E)$, 则存在与 n 无关的常数 $c > 0$, 使得

$$|\bar{\lambda}_{nj}^\pm - \lambda_j^\pm| \leq c\mu^{-kn} \log(s(n)) \quad (14)$$

证明 由引理 4 有

$$|\bar{\lambda}_{nj}^\pm - \lambda_j^\pm| \leq |\bar{\lambda}_{nj}^\pm - \lambda_{nj}^\pm| + |\lambda_{nj}^\pm - \lambda_j^\pm| \leq \|K_n - \bar{K}_n\| + \|K - K_n\|$$

此处, λ_{nj}^\pm 是 K_n 的特征值。由于

$$\|K - K_n\| = \|K - P_n K\| =$$

$$\sup_{\|u\|=1} |((K - P_n K)u, u)| \leq \|(K - P_n K)u\|$$

因为 $u \in H^k(E)$, P_n 为正交投影, K 为紧算子, 从而

$$\|(K - P_n K)u\| \leq c'\mu^{-kn} \|u\|_{H^k} =: c''\mu^{-kn}$$

于是

$$|\bar{\lambda}_{nj}^\pm - \lambda_j^\pm| \leq c_1\mu^{-kn} \log(s(n)) + c''\mu^{-kn} \leq c\mu^{-kn} \log(s(n))$$

定理得证。

下面我们讨论压缩格式的计算复杂度。记

$$\bar{A}_n := \bar{K}_n - \bar{\lambda}_n E_n, \bar{A}_{i',i} := \bar{K}_{i',i} - \bar{\lambda}_n E_{i',i}, i', i \in Z_{n+1}$$

其中

$$E_{i',i} = [(w_{i',j}, w_{i,j})]_{j' \in Z_{w(i')}, j \in Z_{w(i)}}$$

我们用 $N(\bar{A}_n)$ 和 $N(\bar{K}_n)$ 分别表示矩阵 \bar{A}_n 和 \bar{K}_n 中非零元素的个数, 以之来衡量算法的计算复杂度。

定理 3 存在两个与 n 无关的常数 $c_1 > 0, c_2 > 0$, 使得

$$N(\bar{K}_n) \leq c_1 \mu^n \log(s(n))$$

从而

$$N(\bar{A}_n) \leq c_2 \mu^n \log(s(n))$$

证明 \bar{K}_n 的矩阵块 $\bar{K}_{i',i}$ 的元素个数为 $w(i') \times w(i)$ 。注意到

$$w(i) \sim \mu^i, \quad w(i') \sim \mu^{i'}$$

从而, 存在与 n 无关的常数 $c' > 0$, 使得

$$w(i') \times w(i) \leq c' \mu^{i+i'}$$

记 $N(\bar{K}_{i',i})$ 表示矩阵块 $\bar{K}_{i',i}$ 的非零元素个数, 则有

$$N(\bar{K}_n) = \sum_{i+i' \leq n} N(\bar{K}_{i',i}) \leq \sum_{i+i' \leq n} c' \mu^{i+i'} \leq c' \sum_{i=0}^n \mu^i \sum_{i'=0}^{n-i} \mu^{i'}$$

简单计算可得

$$c' \sum_{i=0}^n \mu^i \sum_{i'=0}^{n-i} \mu^{i'} = \frac{c'}{\mu - 1} (n + 1) \mu^{n+1} -$$

$$\frac{1 - \mu^{n+1}}{1 - \mu} \leq c_1 \mu^n \log(s(n))$$

注意到 E_n 是单位矩阵, 所以 $\bar{\lambda}_n E_n$ 最多有 n 个非零元素。因此

$$N(\bar{A}_n) \leq N(\bar{K}_n) + n \leq c_2 \mu^n \log(s(n))$$

定理得证。

4 数值算例

考虑如下积分算子的最大特征值逼近

$$(Ku)(t) = \int_0^1 e^{st} u(s) ds$$

取 $\mu = 2$, 并令 X_n 为分片线性多项式空间 ($k = 2$), 则 $\dim W_1 = \dim X_0 = 2$, 构造 X_0 的基底为: $w_{00} = 1; w_{01} = \sqrt{3}(2t - 1), t \in [0, 1]$ 。

W_1 的基底为:

$$w_{10} = \begin{cases} 1 - 6t, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 5 - 6t, & t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$

$$w_{11} = \begin{cases} \sqrt{3}(1 - 4t), & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \sqrt{3}(4t - 3), & t \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

当 $n \geq 1$ 时, W_n 的基底可以通过 W_1 的基底来递推生成, 详细构造过程可参看文[9, 11]。我们采用前

面介绍的压缩策略, 利用 Galerkin 压缩格式 (10) 进行数值求解, 所得的数值结果见表 1, 其中 n 表示层数, λ 为算子 K 的最大特征值, 由于原问题没有真解, 我们用 12 层的 Galerkin 有限元方法获得的近似解作为真解, 用于数值比较。 $\bar{\lambda}_n$ 为 \bar{K}_n 的最大特征值, Conv. Rate 是收敛阶, 用 $\log_2 \frac{|\bar{\lambda}_{n-1} - \lambda|}{|\bar{\lambda}_n - \lambda|}$ 来计算, Comp. Rate 是压缩率, 即矩阵中的非零元素的个数与矩阵总元素个数之比。

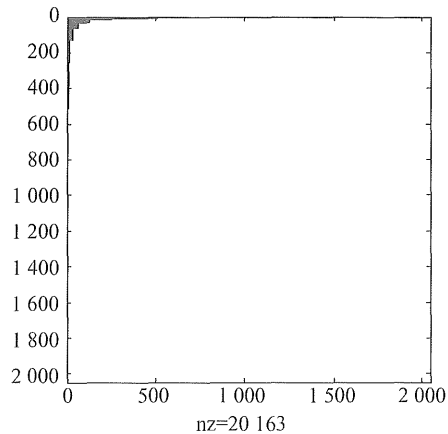


图 1 采用截断策略需要计算的矩阵元素 ($n = 10$)

Fig 1 The elements need to be calculated via truncation strategy with $n = 10$

表 1 多尺度 Galerkin 方法的数值结果

Table 1 Numerical results of multiscale Galerkin method

n	$ \bar{\lambda}_n - \lambda $	Conv. Rate	Comp. Rate
2	2.174e-05		1.000
3	1.385e-06	3.972 3	0.750
4	8.732e-08	3.987 8	0.500
5	5.489e-09	3.991 7	0.312
6	3.447e-10	3.992 7	0.187
7	2.165e-11	3.992 6	0.109
8	1.359e-12	3.993 5	0.062 5
9	8.992e-14	3.918 4	0.035 1
10	9.992e-15	3.169 6	0.019 5

从表 1 可以看出, 多尺度 Galerkin 压缩格式的特征值的收敛阶 (接近 4) 已经超过了理论阶 (接近 2), 出现这种情况可能是由于核函数足够光滑。此外, 矩阵压缩程度随层数的增加而增大 (压缩率减小), 即层数越大, 压缩格式节省的计算量越多 (图 1 阴影部分显示了 $n = 10$ 时, \bar{K}_n 中需要计算的非零元素, 可以看到非零元素个数非常少)。

(下转第 34 页)

段,有望推广应用于单晶、薄膜等其它铁电样品,发展成为一种描述极化疲劳效应的有力手段。

参考文献:

- [1] RAMESH R, AGGARWAL S, AUCIELLO O. Science and technology of ferroelectric films and heterostructures for non-volatile ferroelectric memories[J]. *Materials Science and Engineering*, 2001,32: 191-236.
- [2] TAGANTSEV A K, STOLICHNOV I, COLLA E L, et al. Polarization Fatigue in Ferroelectric Films [J]. *J Appl Phys*, 2001,90(3): 1387-1420.
- [3] GRUVERMAN A, RODRIGUEZ B J, NEMANICH R J, et al. Nanoscale observation of photoinduced domain pinning and investigation of imprint behavior in ferroelectric thin films [J]. *Journal of Applied Physics*, 2002, 92(5): 2734-2739.
- [4] GROSSMANN M, LOHSE O, BOLTEN D, et al. Lifetime estimation due to imprint failure in ferroelectric Sr-Bi2Ta2O9 thin films [J]. *Applied Physics Letters*, 2000,76(3): 363-365.
- [5] LI KWOK TUNG, LO V C. Simulation of oxygen vacancy induced phenomena in ferroelectric thin films[J]. *J Appl Phys*, 2005,97(034107): 1-8.
- [6] OKATAN M B, MANTESE J V, ALPAY S P. Effect of space charge on the polarization hysteresis characteristics of monolithic and compositionally graded ferroelectrics [J]. *Acta Materialia*, 2010,58: 39-48.
- [7] 李景德,李智强,陆夏莲,等. 铁电屏蔽理论[J]. *物理学报*, 2000,49(01): 160-163.
- [8] 丘翠环,陈丽,李智强. 铁电和铁磁微分回线谱分析[J]. *广东工业大学学报*, 2002,19(2): 69-72.
- [9] 沈韩,陈敏,朱贵文,等. 铁电极化疲劳效应的微分电滞回线谱分析[J]. *四川大学学报:自然科学版*, 2005,42(S2): 73-76.
- [10] 朱贵文,周伟华,沈韩,等. 铁电体的极化疲劳和历史记忆效应[J]. *中山大学学报:自然科学版*, 2005, 44(4): 40-44.
- [11] YU JUN, DONG XIAOMING, ZHOU WENLI, et al. Study on the I - V characteristics of ferroelectric thin film systems with the structure of MFSM[J]. *Materials Science and Engineering B*, 2000,76: 22-25.
- [12] ZHU G D, LUO X Y, ZHANG J H, et al. Imprint effect in ferroelectric poly(vinylidene fluoride-trifluoroethylene) thin films [J]. *Journal of Applied Physics*, 2009,106(7):074113.
- [13] 李景德,沈韩,陈敏. 电介质理论[M]. 北京:科学出版社,2003.
- [14] PONTES F M, LONGO E, LEITE E R, et al. Study of the dielectric and ferroelectric properties of chemically processed BaxSrl-xTiO3 thin films [J]. *Thin Solid Films*, 2001,386(1): 91-98.

(上接第 30 页)

参考文献:

- [1] CHEN M, CHEN Z, CHEN G. Approximate solutions of operator equations [M]. World Scientific Publishing Co, 1997.
- [2] BABUSK I, OSBORN J. Eigenvalue problems, handbook of numerical analysis [M]. II. Vol. II Finite Element Methods (Part I), North-Holland, 1991.
- [3] SLOAN I H. Iterated Galerkin method for eigenvalue problem [J]. *SIAM J Numer Anal*, 1976, 13: 753-760.
- [4] KULKARNI R P. A new superconvergent collocation method for eigenvalue problem [J]. *Comp Math*, 2006, 75: 847-857.
- [5] CHEN Z, GNANESHWAR N, XU Y, et al. A fast collocation method for eigen-problems of weakly singular integral operators [J]. *J Sci Comput*, 2009,41: 256-272.
- [6] GNANESHWAR N. A degenerate kernel method for eigenvalue problems of compact integral operator [J]. *Adv Comput Math*, 2007, 27: 339-354.
- [7] KULKARNI R P. Use of extrapolation for improving the order of convergence of eigenvalue approximations [J]. *IMA J Numer Anal*, 1997,17: 271-284.
- [8] CHEN Z, LONG G, GNANESHWAR N. Richardson extrapolation of iterated discrete projection methods for eigenvalue approximation [J]. *J Comp App Math*, 2009, 223: 48-61.
- [9] CHEN Z, MICCHELLI C A, XU Y. The Petrov-Galerkin methods for second kind integral equations II: multiwavelets scheme [J]. *Adv Comput Math*, 1997, 7: 199-233.
- [10] 黄敏. Fredholm 第二型积分方程的小波 Petrov-Galerkin 算法[D]. 北京:中国科学院,2003.
- [11] HUANG M. A construction of multiscale bases for Petrov-Galerkin methods for integral equations [J]. *Adv Comput Math*, 2006, 25:7-22.