一类无搅拌 Chemostat 模型平衡态正解存在性与数值模拟*

姜洪领[1,2]，王利娟[1,2]
（1. 陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西 西安 710062；
2. 宝鸡文理学院数学系，陕西 宝鸡 721016）

摘　要：讨论一类含有 Beddington-DeAngelis 反应功能函数的 Chemostat 非单链生态模型平衡态正解的存在性，利用特征值比较原理得到正解存在的必要条件。利用度理论、锥映射不动点指数、微分算子的谱半径理论得到正解存在的充分条件。应用 MATLAB 软件进行数值模拟，验证了正解的存在性。

关键词：Chemostat；特征值比较原理；不动点指数；数值模拟
中图分类号：O175.26　**文献标志码**：A　**文章编号**：0529－6579（2011）03－0011－06

Existences and Numerical Simulation of Positive Solution for a Class of Unstirred Chemostat Model

JIANG Hongling[1,2], *WANG Lijuan*[1,2]
(1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;
2. Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China)

Abstract: The coexistence of the steady-state solutions of an unstirred multiple food chain Chemostat model with Beddington-DeAngelis functional response is discussed. The necessary condition is given by comparison theorem of eigenvalue. By using degree theory, index of fixed point of map in cone, and spectral radius of differentiation operator theory, a sufficient condition is obtained for the existence of steady state positive solution. The coexistence is verified by numerical simulation with MATLAB software.

Key words: Chemostat; comparison theorem of eigenvalue; index of fixed point; numerical simulation

Chemostat 模型又称恒化器模型，它是一个自然生态模型，对恒化器的研究以及各种推广是目前非常活跃的课题，研究者对模型进行各种合理的改进和推广以使其能更加逼真地描述自然现象。Butler 和 Wolkowicz[1] 于 1986 年在生物数学学报上给出下列模型

$$S' = (S^{(0)} - S)\theta - \frac{1}{\delta_1} m_1 f_1(S) u - \frac{1}{\delta_2} m_2 f_2(S) v,$$
$$u' = u(m_1 f_1(S) - \theta) - \frac{1}{\delta_3} m_3 f_3(u) w,$$
$$v' = v(m_2 f_2(S) - \theta),$$
$$w' = w(m_3 f_3(u) - \theta)$$

其中 $f_i(p) = \dfrac{p}{(a_i + p)}$ 称为 Michaelis-Menten (M-M) 功能反应函数。初始条件 $S(0) \geqslant 0, u(0) \geqslant 0, v(0) \geqslant 0, w(0) \geqslant 0$，其中 $S^{(0)}$ 代表营养物的初始浓度，θ 代表输出率，$m_i (i = 1,2,3)$ 分别是 u, v, w 最大增长率，a_i 是 Michaelis-Menten 常数，$\dfrac{1}{\delta_i}$ 分别是 u, v, w 的生长影响因子，且 m_i, δ_i, a_i 都是正数。Butler 等人对上述系统所做的定性分析表明，在引入 u 的捕食者 w 后，可以打破原有的竞争排斥原理，使得 u, v 共存。在无搅拌下，使用较 M-M 功能函数更合理化的 Beddington-DeAngelis (B-D)

* 收稿日期：2010－07－17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971124）；宝鸡文理学院重点资助项目（Zk10116，Zk0691）
作者简介：姜洪领（1978 生），男，博士生；E-mail：jhonglings@163.com

功能反应函数$f_i(p,q)=\dfrac{p}{(1+\alpha_i p+\beta_i q)}(\alpha_i\geqslant 0,\beta_i\geqslant 0)$时，上述培养模式的数学模型可由下列反应扩散方程组（无量纲化后）给出

$$\begin{aligned} S_t &= S_{xx}-m_1f_1(S,u)u-m_2f_2(S,v)v,\\ u_t &= u_{xx}+m_1f_1(S,u)-m_3f_3(u,w)w,\\ v_t &= v_{xx}+m_2f_2(S,v),\\ w_t &= w_{xx}+m_3f_3(u,w) \end{aligned}\tag{1}$$

B-D 功能函数的推导见文献［2－3］。涉及使用 B-D 功能函数研究的部分文献可见［4－6］。对式（1）的平衡态系统，令 $z(x)=S(x)+u(x)+v(x)+w(x)$，则 $z(x)$ 满足

$$z_{xx}=0,\quad x\in(0,1),$$
$$z_x(0)=-1,z_x(1)+\gamma z(1)=0\tag{2}$$

显然式（2）有唯一解 $z(x)>0$。因此方程组（1）可等价与下列方程组

$$\begin{aligned} &u_{xx}+m_1uf_1(z-u-v-w,u)-m_3wf_3(u,w)=0,\\ &v_{xx}+m_2fv_2(z-u-v-w,v)=0,\\ &w_{xx}+m_3wf_3(u,w)=0,\\ &u_x(0)=0,u_x(1)+\gamma u(1)=0;\\ &v_x(0)=0,v_x(1)+\gamma v(1)=0;\\ &w_x(0)=0,w_x(1)+\gamma w(1)=0 \end{aligned}\tag{3}$$

对式（3）除有平凡解（0，0，0）外，其他的非负解可以分成两类：①半平凡解：（$\hat{u}$，0，0），（0，$\hat{v}$，0），（$\bar{u}$,$\bar{v}$，0），（$\tilde{u}$，0，$\tilde{w}$）。形如$(0,0,w)$,$(0,v,w)$的非负解不存在。②三个分量全为正的正解(u,v,w)。本文将讨论极限系统式（3），我们首先利用特征值比较原理给出正解存在的一个必要条件（见定理5），然后利用特征值比较原理，度理论及锥映射不动点指数方法分析式（3）正解存在性（见定理6），最后应用 MATLAB 软件进行数值模拟，检验正解的存在性。

1 主要引理

引理1[7] 设 $q(x)\in C(\overline{\Omega})$ 定义边界算子 B 为 $Bu=u$ 或者 $\dfrac{\partial u}{\partial x}+bu$，记 $\lambda[-\Delta+q(x)]$ 是下列特征问题的主特征

$$-\Delta\varphi+q(x)\varphi=\lambda\varphi,x\in\Omega,B\varphi=0,x\in\partial\Omega$$

则 $\lambda[-\Delta+q(x)]$ 关于 $q(x)$ 连续且具有单调性：当 $q_1(x)\leqslant q_2$ 时，$\lambda[-\Delta+q(x)]\leqslant\lambda[-\Delta+q_2(x)]$；特别地，如果 $q_1(x)\not\equiv q_2(x)$，则 $\lambda[-\Delta+q_1(x)]<\lambda[-\Delta+q_2(x)]$。

引理2[7] 对任意的 $a(x)\in C(\overline{\Omega})$，存在 $P>0,P\in\mathbb{R}$,使得 $a+P>0$，若 $\lambda[-\Delta-a(x)]>0$，则下列特征值问题

$$-\Delta\varphi+P\varphi=\xi(a(x)+P)\varphi,$$
$$x\in\Omega,\quad B\varphi=0,\quad x\in\partial\Omega\tag{4}$$

没有小于1的特征值；反之若 $\lambda[-\Delta-a(x)]<0$ 则式（4）有小于1的特征值。

引理3[7-8] 设 W 是 Banach 空间 E 的一个锥，θ 是 E 中的零元。设 $F:W\to W$ 是紧的，连续可微算子且 $\theta\in W$ 是 F 的不动点，$A=F'(\theta)$ 表示 F 在 θ 处的 Fréchet 导数。进而假设 $W-W$ 在 E 中稠密，则有以下结论

（i）如果特征值问题 $Ah=\lambda h,h\in W$ 不以1为特征值，则 θ 是 F 的孤立不动点。

（ii）如果上述特征值问题没有大于1的特征值，则 $\mathrm{index}_W(F,\theta)=1$。

（iii）如果上述特征值问题有大于1的特征值，则 $\mathrm{index}_W(F,\theta)=0$。

考察边值问题

$$-\Delta u=f(x,u),x\in\Omega,Bu=0,x\in\partial\Omega\tag{5}$$

向量 $u=(u_1,u_2,\cdots,u_m)$，$f=(f_1,f_2,\cdots,f_m)$，$f(x,0)=0$，$f(x,u)$ 关于 $x\in\Omega$ 整体 Hölder 连续，关于 u 局部 Lipschitz 连续。$C_B^0(\overline{\Omega})=\{u:u\in C(\overline{\Omega}),Bu|_{\partial\Omega}=0\}$，其中 B 是第一或第三边界算子。$E=[C_B^0(\overline{\Omega})]^m$，则 E 是一个 Banach 空间，$K_0=\{u\in C_B^0([0,1])\ u\geqslant 0\}$。利用式（5）做辅助问题

$$-\Delta v+\mu Pv=\mu[f(x,u)+Pu],$$
$$x\in\Omega,\quad B\varphi=0,\quad x\in\partial\Omega\tag{6}$$

其中 $u\in E,\mu\in[0,1]$，P 是一个适当大的正常数，定义算子 $T_\mu:[0,1]\times E\to E$，$T_\mu(u)=v,T=T_1$，则 T_μ 是紧的，且易知 u 是式（5）的古典解当且仅当 u 是式（6）的不动点。特别的当 $m=3,u=(u_1,u_2,u_3)$，$f=(f_1,f_2,f_3)$ 时，有下面的结论。

引理4[7] 设 $y_1=(u_1^*,0,0)$ 是式（5）的解且 $u_1^*>0$。如果

（i）边值问题

$$-\Delta u=D_uf(x,u_1^*,0,0)u,$$
$$x\in\Omega,\quad u\in C_B^0(\overline{\Omega})\times K_0\times K_0$$

只有零解；

（ii）特征值问题

$$-\Delta\varphi+\mu P\varphi=\lambda\Big[\Big(\frac{\partial f_2(x,y_1)}{\partial u_2}+P\Big)\varphi+\Big(\frac{\partial f_2(x,y_1)}{\partial u_3}\Big)\psi\Big],\quad x\in\Omega$$

$$-\Delta\psi+\mu P\psi=\lambda\Big[\Big(\frac{\partial f_3(x,y_1)}{\partial u_2}+P\Big)\psi+$$

$$(\frac{\partial f_3(x,y_1)}{\partial u_3})\varphi],\quad x\in\Omega$$

$$\varphi,\psi\in K_0$$

有特征值 $\lambda\in(0,1)$；则 $\mathrm{index}_W(T,y_1)=0$。

注：对 $y_2=(0,u_2^*,0)$ 和 $y_3=(0,0,u_3^*)$ 也有类似结论。

引理 5[9-10]　设 E_1,E_2 是两个有序的 Banach 空间，分别具有正锥 P_1,P_2。记 $E=E_1\oplus E_2$，$P=P_1\oplus P_2$，则 E 是以 P 为正锥的有序 Banach 空间 $(u,v)\in P$ 定义为 $u\in P_1$，$v\in P_2$，设 P' 是 P 中含有零元的开集，$F_i:\bar{P}'\to P_i,(i=1,2)$ 是全连续算子，定义 $F:P'\to P$ 为 $F(u,v)=(F_1(u,v),F_2(u,v))$，记 $P_2(\varepsilon)=\{v\in P_2:v_{E_2}<\varepsilon\}$。假设 $D_1\subset P_1\cap P'$ 是相对开的和有界的，且 $F_1(u,0)\neq u$ 于 $u\in\partial D_1$，$F_2(u,0)\equiv 0$ 于 $u\in\overline{D_1}$。又假设 $F_2:P'\to P_2$ 可延拓为 P' 的一个邻域到 E_2 的一个连续可微映射，P_2-P_2 是再生的，且 $B=\{u\in D_1:u=F_1(u,0)\}$（即 B 是 F_1 的不动点集），则有下面的结论：

（i）如果对任意的 $u\in B$，谱半径 $r(F'_2(u,0)|_{P_2})>1$，且 1 不是 $F_2'(u,0)|_{P_2}$ 的特征值，那么对充分小的 $\varepsilon>0$ 有 $\deg_P(I-F,D_1\times P_2(\varepsilon),0)=0$。

（ii）如果对任意的 $u\in B$，谱半径 $r(F'_2(u,0)|_{P_2})<1$，那么对充分小的 $\varepsilon>0$ 有 $\deg_P(I-F,D_1\times P_2(\varepsilon),0)=\deg_{P_2}(I-F_1|_{P_1},D_1,0)$。

2　半平凡解存在性

弱半平凡解（$\hat{u}$，0，0），(0，$\hat{v}$，0）的存在性等价于下列方程组解的存在性

$$u_{xx}+m_1uf_1(z-u,u)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$u_x=0,\quad u_x(1)+\gamma u(1)=0\qquad(7)$$
$$v_{xx}+m_2vf_2(z-v,v)=0,\quad x\in(0,1),\quad v_x=0,$$
$$v_x(1)+\gamma v(1)=0\qquad(8)$$

定理 1　设 u 是式（7）的非负解且 $u\neq 0$，则 $0<u<z(x)$；v 是式（8）的非负解且 $v\neq 0$，则 $0<v<z(x)$，$x\in[0,1]$。

定理 2　若 $m_1>\lambda_1$，则式（7）有唯一正解 $\hat{u}$；若 $m_2>\mu_1$，则式（8）有唯一正解 $\hat{v}$。这里 λ_1,μ_1 分别是下列特征问题的第一特征值，φ_1,ψ_1 分别是其对应的第一特征函数。

$$\varphi_{xx}+\lambda\varphi f_1(z,0)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$\varphi_x(0)=0,\quad \varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0;$$
$$\psi_{xx}+\mu\psi f_2(z,0)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$\psi_x(0)=0,\quad \psi_x(1)+\gamma\psi(1)=0$$

强半平凡解（$\bar{u},\bar{v}$，0)，($\tilde{u}$，0，$\tilde{w}$）的存在性分别等价于下列方程组正解的存在性

$$u_{xx}+m_1uf_1(z-u-v,u)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$u_x(0)=0,u_x(1)+\gamma u(1)=0;$$
$$v_{xx}+m_2vf_2(z-u-v,v)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$v_x(0)=0,v_x(1)+\gamma v(1)=0\qquad(9)$$
$$u_{xx}+m_1uf_1(z-u-w,u)-m_3f_3(u,w)=0,$$
$$w_{xx}+m_3wf_3(u,w)=0,$$
$$u_x(0)=0,\quad u_x(1)+\gamma u(1)=0;$$
$$w_x(0)=0,\quad w_x(1)+\gamma w(1)=0\qquad(10)$$

令 $\bar{\lambda}_1,\bar{\mu}_1,\eta_1$ 分别是下列特征问题（11）、（12）、（13）的第一特征值，$\bar{\varphi}_1,\bar{\psi}_1,\varphi_1$ 是其对应的第一特征函数

$$\bar{\varphi}_{xx}+\lambda\bar{\varphi}f_1(z-\hat{v},0)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$\bar{\varphi}_x(0)=0,\quad \bar{\varphi}_x(1)+\gamma\bar{\varphi}(1)=0\qquad(11)$$
$$\bar{\psi}_{xx}+\mu\bar{\psi}f_2(z-\hat{u},0)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$\bar{\psi}_x(0)=0,\quad \bar{\psi}_x(1)+\gamma\bar{\psi}(1)=0\qquad(12)$$
$$\varphi_{xx}+\eta\varphi f_3(\hat{u},0)=0,\quad x\in(0,1),$$
$$\varphi_x(0)=0,\quad \varphi_x(1)+\gamma\varphi(1)=0\qquad(13)$$

定理 3　若 $m_1>\bar{\lambda}_1,m_2>\bar{\mu}_1$，则式（9）有唯一正解（$\bar{u},\bar{v}$）；且 $0<\bar{u}\leqslant\hat{u},0<\bar{v}\leqslant\hat{v}$。

定理 4　若 $m_1>\lambda_1,m_3>\eta_1$，则式（10）有唯一正解（$\tilde{u},\tilde{w}$）；且 $0<\tilde{u}\leqslant\hat{u},0<\tilde{u}+\tilde{w}\leqslant z$。

定理 1 - 3 的详细证明见文献［11 - 12］，定理 4 见文献[13]。由定理 1 - 4 易知对式(3) 的任意非负解 (u,v,w) 是一致有界且满足 $0\leqslant u(x)<\hat{u},0\leqslant v(x)<\hat{v},0\leqslant u(x)+v(x)+w(x)<z$。下面给出系统（3）正解存在的一个必要条件。

定理 5　若 (u,v,w) 是式（3）的正解，则 $m_1\geqslant\lambda_1,m_2\geqslant\mu_1,m_3\geqslant\eta_1$。

证明　首先依据 $f_i(p,q)$ 的定义有 $f_{ip}>0,f_{iq}<0$，故 $f_1(z,0)\geqslant f_1(z,u)\geqslant f_1(z-u-v-w,u)$，对式（3）式中第一个方程应用上述结果有 $u_{xx}+m_1uf_1(z,0)\geqslant 0$，左右同乘 λ_1 对应的特征函数 φ_1 在[0，1]上积分得 $(m_1-\lambda_1)\int_0^1 u\varphi_1f_1(z,0)\mathrm{d}x\geqslant 0$，所以 $m_1\geqslant\lambda_1$。利用 $f_2(z,0)\geqslant f_2(z,v)\geqslant f_2(z-u-v-w,v)$，$f_3(\hat{u},0)\geqslant f_3(\hat{u},w)\geqslant f_3(u,w)$ 可证其余两个不等式。

3　正解存在性

引入式（3）的辅助问题

$$-u_{xx}+\mu Mu=\mu[M+m_1f_1(z-u-v-w,u)]$$

$$u - m_3wf_3(u,w),$$
$$-v_{xx} + \mu Mv = \mu[M + m_2f_2(z-u-v-w,v)]v,$$
$$-w_{xx} + \mu Mw = \mu[M + m_3f_3(u,w)]w \quad (14)$$

其中边界条件与式（3）一致。$\mu \in [0,1]$，M 是个充分大的正数且使得 $Mu_i + f_i \geqslant 0$，则对已知的 $(u,v,w) \in E$，下列线性问题

$$-U_{xx} + \mu MU = \mu[M + m_1f_1(z-u-v-w,u)] \cdot u - m_3wf_3(u,w),$$
$$-V_{xx} + \mu MV = \mu[M + m_2f_2(z-u-v-w,v)]v,$$
$$-W_{xx} + \mu MW = \mu[M + m_3f_3(u,w)]w \quad (15)$$

有唯一解。

令 $D = \{(u,v,w) \in W \mid 0 \leqslant u(x) < \hat{u}, 0 \leqslant v(x) < \hat{v}, 0 \leqslant u(x) + v(x) + w(x) < z\}$，$W = [K_0]^3$，$K_0 = \{u \in C_B^0([0,1]) \mid u \geqslant 0\}$，$E = [C_B^0([0,1])]^3$，则 W 是 E 的一个锥，D 是 W 的一个有界集。通过式（15）我们定义 $F_\mu:(u,v,w) \to (U,V,W)$，$\mu \in [0,1]$。可知 $F_\mu: D \to W$ 是紧的可微的，且 F_μ 的不动点就是式（14）的古典解。令 $F = F_1$，则 F 的不动点就是式（3）的古典解。

命题 1 （i）若 $m_1 > \lambda_1, m_2 \neq \mu_1$ 或 $m_1 \neq \lambda_1, m_2 > \mu_1$，则 $\mathrm{index}_W(F,\theta) = 0$；

（ii）若 $m_1 < \lambda_1$ 且 $m_2 < \mu_1$，则 $\mathrm{index}_W(F,\theta) = 1$。

证明 令 $K = (-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + M)^{-1}$，$A = \mathrm{D}F_{(0,0,0)}$，考察特征方程：$A(u,v,w) = \lambda(u,v,w)$，假设 1 是 A 的特征值，从而 $\theta = (0,0,0)$ 是 F 的孤立不动点。此时特征问题 $A(u,v,w) = \lambda(u,v,w)$ 即为下列方程组

$$-u_{xx} + Mu = \frac{1}{\lambda}[M + m_1f_1(z,0)]u,$$
$$-v_{xx} + Mv = \frac{1}{\lambda}[M + m_2f_2(z,0)]v,$$
$$-w_{xx} + Mw = \frac{1}{\lambda}Mw \quad (16)$$

考虑辅助问题

$$-\varphi_{xx} - m_1f_1(z,0)\varphi = \xi\varphi; \quad \varphi_x(0) = 0,$$
$$\varphi_x(1) + \gamma\varphi(1) = 0$$

因为 $m_1 > \lambda_1$ 可知 $\xi_1 = \xi[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m_1f_1(z,0)] < \xi[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \lambda_1f_1(z,0)] = 0$，再由引理 2 知存在 $\frac{1}{\lambda} < 1$，即特征问题 $A(u,v,w) = \lambda(u,v,w)$ 存在大于 1 的特征值，应用引理 3 可得 $\mathrm{index}_W(F,\theta) = 0$。对于结论（ii）同理可证。

命题 2 $\deg_W(I - F, D, \theta) = 1$。

证明 由拓扑度的同伦不变性有

$$\deg_W(I - F, D, \theta) = \deg_W(I - F_\mu, D, \theta), \mu \in [0,1]$$

当 $\mu \to 0$ 时，F_μ 在 W 上只有 θ 这个不动点，根据 Leray-schauder 度的定义知 $\deg_W(I - F_\mu, D, \theta) = \mathrm{index}_W(F_\mu, \theta)$，且此时可使得 $\mu m_1 < \lambda_1, \mu m_2 < \mu_1$，再重复命题 1 的证明可得 $\mathrm{index}_W(F,\theta) = 1$，从而有 $\deg_W(I - F, D, \theta) = 1$。

为了书写方便，我们引进记号 $G = (g_1, g_2, g_3)$，DG 为 G 的线性化算子

$$g_1 = m_1uf_1(z-u-v-w,u) - m_3wf_3(u,w),$$
$$g_2 = m_2vf_2(z-u-v-w,v),$$
$$g_3 = m_3wf_3(u,w)$$

命题 3 若 $m_1 > \lambda_1, m_2 > \bar{\mu}_1, m_3 > \eta_1$，则 $\mathrm{index}_W(F,(\hat{u},0,0)) = 0$。

证明 由定理 2 知当 $m_1 > \lambda_1$ 时，存在 $(\hat{u},0,0)$。下面依引理 4 来证明。

1）考察边值问题

$$-(u,v,w)_{xx} = DG(\hat{u},0,0)(u,v,w), x \in [0,1];$$
$$(u,v,w) \in C_B^0([0,1]) \times K_0 \times K_0 \quad (17)$$

则该问题等价于

$$-u_{xx} = [m_1f_1(z-\hat{u},\hat{u}) + m_1\hat{u}\frac{\partial f_1}{\partial u}|_{(\hat{u},0,0)}]u + m_1\hat{u}\frac{\partial f_1}{\partial v}|_{(\hat{u},0,0)}v + [m_1\hat{u}\frac{\partial f_1}{\partial w}|_{(\hat{u},0,0)} - m_3f_1(\hat{u},0)|_{(\hat{u},0,0)}]w,$$
$$-v_{xx} = m_2f_2(z-\hat{u},0)v,$$
$$-w_{xx} = m_3f_3(\hat{u},0)w,$$
$$(u,v,w) \in C_B^0([0,1]) \times K_0 \times K_0$$

先考察第二个方程，若有解 $v_0 \in K_0$，则有 $\lambda[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m_2f_2(z-\hat{u},0)] = 0$，另一方面，由于条件 $m_2 > \bar{\mu}_1$，及 $\bar{\mu}_1$ 的定义可得到

$$0 = \lambda[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m_2f_2(z-\hat{u},0)] < \lambda[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - \bar{\mu}_1f_2(z-\hat{u},0)] = 0$$

矛盾。同理对第三个方程也只有零解，于是得

$$-u_{xx} = [m_1f_1(z-\hat{u},\hat{u}) + m_1\hat{u}\frac{\partial f_1}{\partial u}|_{(\hat{u},0,0)}]u,$$
$$u \in C_B^0([0,1])$$

假设存在 $u_0 \in C_B^0([0,1]), u_0 \neq 0$ 是它的解，则有 $\lambda[-\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} - m_1f_1(z-\hat{u},\hat{u}) - m_1\hat{u}\frac{\partial f_1}{\partial u}|_{(\hat{u},0,0)}] \leqslant 0$；另一方面，$\hat{u} > 0$，$\frac{\partial f_1}{\partial u}|_{(\hat{u},0,0)} < 0$，可知 $-m_1\hat{u}\frac{\partial f_1}{\partial u}$

$|_{(\hat{u},0,0)} > 0$，应用引理 1 有

$$\lambda[-\frac{d^2}{dx^2} - m_1 f_1(z-\hat{u},\hat{u})] < 0$$

当 $m_1 > \lambda_1$ 时，$\hat{u}$ 是式（7）的正解，说明，$\lambda[-\frac{d^2}{dx^2} - m_1 f_1(z-\hat{u},\hat{u})] = 0$，于是得到矛盾。至此就证明了式（17）只有零解。

2）考察特征问题

$$-v_{xx} + Mv = \lambda[(\frac{\partial g_2}{\partial v}|_{(\hat{u},0,0)} + M)v + \frac{\partial g_2}{\partial w}|_{(\hat{u},0,0)} w],$$
$$-w_{xx} + Mw = \lambda[(\frac{\partial g_3}{\partial w}|_{(\hat{u},0,0)} + M)w + \frac{\partial g_3}{\partial v}|_{(\hat{u},0,0)} v] \quad (18)$$

化简得下列方程组

$$-v_{xx} + Mv = \lambda[M + m_2 f_2(z-\hat{u},0)]v,$$
$$-w_{xx} + Mw = \lambda[M + m_3 f_3(\hat{u},0)]w,$$
$$(v,w) \in K_0 \times K_0$$

考虑其辅助问题 $-w_{xx} - m_3 f_3(\hat{u},0)]w = \xi w$，因为 $m_3 > \eta_1$，利用特征值比较原理得

$$\xi_1 = \xi[-\frac{d^2}{dx^2} - m_3 f_3(\hat{u},0)] <$$
$$\xi[-\frac{d^2}{dx^2} - \eta_1 f_3(\hat{u},0)] = 0$$

根据引理 2 知式（18）有小于 1 的特征值，再应用引理 4 知 $\mathrm{index}_W(F,(\hat{u},0,0)) = 0$。

同理可证命题 4。

命题 4　若 $m_1 > \bar{\lambda}_1, m_2 > \mu_1$，则 $\mathrm{index}_W(F,(0,\hat{v},0)) = 0$。

命题 5　若 $m_1 > \bar{\lambda}_1, m_2 > \bar{\mu}_1, m_3 > \bar{\eta}_1$，则 $\mathrm{index}_W(F,(\bar{u},\bar{v},0)) = 0$ 其中 $\bar{\eta}_1$ 是下列特征问题的主特征值

$$\varphi_{xx} + \eta\varphi f_3(\bar{u},0) = 0, x \in (0,1);$$
$$\varphi_x(0) = 0, \quad \varphi_x(1) + \gamma\varphi(1) = 0$$

证明　首先，由于 $m_1 > \bar{\lambda}_1, m_2 > \bar{\mu}_1$，从而存在解 $(\bar{u},\bar{v},0)$。记：

$$E_1 = C_B^0([0,1]) \times C_B^0([0,1]), E_2 = C_B^0([0,1]),$$
$$K_0 = \{u \in C_B^0([0,1]) | u > 0\},$$
$$D = \{u,v,w \in W | 0 \leqslant u < \hat{u}+1;$$
$$0 \leqslant v < \hat{v}+1; 0 \leqslant u+v+w < z\},$$
$$D_1 = \{(u,v) \in P_1 | u > 0, v > 0, u,v \in D\},$$
$$D_2 = \{u \in P_2 | u > 0, u \in D\},$$
$$D_2(\varepsilon) = \{u \in D_2 | u_{E_2} < \varepsilon, \forall \varepsilon > 0\}$$

其中 $P_1 = K_0 \times K_0, P_2 = K_0, W = P_1 \oplus P_2$。依引理 5 来证明。由 F 的定义，令

$$F_1(u,v,w) = K[Mu + m_1 u f_1(z-u-v-w,u) - m_3 w f_3(u,w),$$
$$Mv + m_2 v f_2(z-u-v-w,v)],$$
$$F_2(u,v,w) = K[Mw + m_3 w f_3(u,w)]$$

1）对 F_1，考察方程 $F_1(u,v,0) = (u,v),(u,v) \in \partial D_1$，等价方程（9）在 ∂D_1 有解。由条件 $m_1 > \bar{\lambda}_1, m_2 > \bar{\mu}_1$，和定理 3 的论证知 $u \leqslant \hat{u}, v \leqslant \hat{v}$，所以 $F_1(u,v,0) \neq (u,v),(u,v) \in \partial D_1$。

2）$F_2(u,v,0) \equiv 0$，对任意的 $(u,v) \in \bar{D}_1$ 显然成立。

3）现计算 $F'_2(\bar{u},\bar{v},0)$ 在 K_0 上的谱半径

$$F'_2(\bar{u},\bar{v},0) = (\frac{\partial F_2}{\partial u},\frac{\partial F_2}{\partial v},\frac{\partial F_2}{\partial w})|_{(\bar{u},\bar{v},0)} =$$
$$K[0,0,M + m_3 f_3(\bar{u},0)]$$

利用 $F'_2(\bar{u},\bar{v},0)$ 的特征值来判断它的谱半径大小，考察特征值问题 $F'_2(\bar{u},\bar{v},0)(\phi,\psi,\varphi) = \lambda(\phi,\psi,\varphi)$，即

$$-\varphi_{xx} + M\varphi = \frac{1}{\lambda}[M + m_3 f_3(\bar{u},0)]\varphi \quad (19)$$

由辅助问题 $-\varphi_{xx} - m_3 f_3(\bar{u},0)\varphi = \xi\varphi$，当 $m_3 > \bar{\eta}_1$ 时有

$$\xi[-\frac{d^2}{dx^2} - m_3 f_3(\bar{u},0)] < \xi[-\frac{d^2}{dx^2} - \bar{\eta}_1 f_3(\bar{u},0)] = 0$$

应用引理 2 知式（19）有小于 1 的特征值，即 $\lambda > 1$。从而谱半径 $r(F'_2(\bar{u},\bar{v},0)|_{K_0}) > 1$，再由引理 5，对 $\forall\varepsilon > 0$，$\deg_W(I-F, D_1 \times D_2(\varepsilon), \theta) = 0$ 上述度值不依赖于 ε 的选取，故 $\mathrm{index}_W(F,(\bar{u},\bar{v},0)) = 0$。

同理可证命题 6。

命题 6　若 $m_1 > \lambda_1, m_2 > \tilde{\mu}_1, m_3 > \eta_1$，则 $\mathrm{index}_W(F,(\tilde{u},0,\tilde{w})) = 0$，其中 $\tilde{\mu}_1$ 是下列特征问题的主特征值

$$\varphi_{xx} + \mu\varphi f_3(z-\tilde{u}-\tilde{v},0) = 0, x \in (0,1);$$
$$\varphi_x(0) = 0, \quad \varphi_x(1) + \gamma\varphi(1) = 0$$

由特征值变分原理可得到 $\bar{\lambda}_1 > \lambda_1, \bar{\mu}_1 > \mu_1, \bar{\eta}_1 > \eta_1$，令 $a_1 = \bar{\lambda}_1, a_2 = \max\{\bar{\mu}_1,\tilde{\mu}_1\}, a_3 = \bar{\eta}_1$，则我们有系统（3）正解存在的充分条件。

定理 6　当 $m_1 > a_1, m_2 > a_2, m_3 > a_3$ 时，系统（3）存在正解 (u,v,w)。

证明　当 $m_1 > a_1, m_2 > a_2, m_3 > a_3$ 时，由定理 1－4，命题 1 和命题 3－6 知，系统（3）存在 $(0,0,0),(\hat{u},0,0),(0,\hat{v},0),(\bar{u},\bar{v},0),(\tilde{u},0,\tilde{w})$ 的解且其指数都为 0，又根据命题 2 知 F 在 W 中至少还有一个异于上述解的非平凡不动点，即系统（3）还存在正解。

4 数值模拟分析

本节用 MATLAB 软件工具箱中的 bvp4c 算法模拟 2 - 3 节所给出的结论。区间采用等分法，计算［0，1］中等分节点处 u,v,w 的值。取 $\alpha_1 = 1$，$\alpha_2 = 1.5$，$\alpha_3 = 0.5$，$\beta_1 = 0.7$，$\beta_2 = 0.3$，$\beta_3 = 0.6$，$\gamma = 1$，模拟结果如图 1（a） -（e）。

图 1（a）显示 v,w 消亡，u 生存，其中 $m_1 = 3$，$m_2 = 1.5$，$m_3 = 2$；图 1（b）显示 u,w 消亡，v 生存，其中 $m_1 = 1.8$，$m_2 = 1.9$，$m_3 = 2$；图 1（c）显示 v 消亡，u,w 生存，其中 $m_1 = 2$，$m_2 = 1.7$，$m_3 = 3.2$；图 1（d）显示 w 消亡，u,v 生存，其中 $m_1 = 1.8$，$m_2 = 2$，$m_3 = 0.1$；图 1（e）显示 u,v,w 生存，其中 $m_1 = 3$，$m_2 = 2$，$m_3 = 2.6$。此外在数值模拟的过程中，还发现 u,v 有周期共存现象，有待进一步研究。

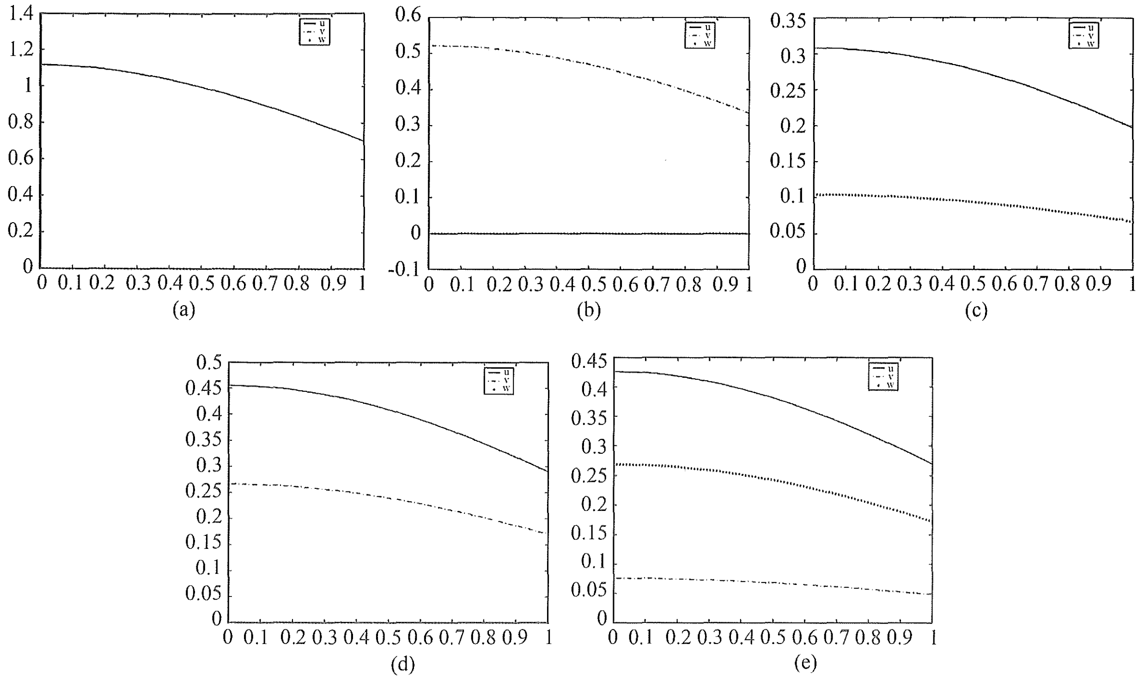

图 1 模拟结果

Fig. 1 Simulation results

参考文献：

[1] BUTLER G J, WOLKOWICZ G S K. Predator-mediated competition in the Chemostat [J]. J Math Biol, 1986, 24: 167 - 191.

[2] BEDDINGTON J R. Mutual interference between parasites or predators and its effect on searching efficiency [J]. Animal Ecol, 1975, 44: 331 - 340.

[3] RUXTON G, GURNEY W S C, DEROOS A. Interference and generation cycles [J]. Theoret Population Biol, 1992, 42: 235 - 253.

[4] CANTRELL R S, CONSER C. On the dynamics of predator-prey models with the Beddington- DeAnglis functional response [J]. J Math Anal Appl, 2001, 257: 206 - 222.

[5] CANTRELL R S, CONSER C. Practical persistence in ecological models via comparision methods [J]. Proc Roy Soc Edinburgh Sect, 1996, 126(A): 247 - 272.

[6] CANTRELL R S, CONSER C. Practical persistence in diffusive food chain models [J]. Nat Res Modelling, 1998, 11: 21 - 34.

[7] 王明新. 非线性抛物型方程［M］. 北京：科学出版社，1993.

[8] ZHENG S N, LIU J. Coexistence solutions for a reaction-diffusion system of un-stirred Chemostat model [J]. Appl Math Comp, 2003, 145: 579 - 590.

[9] DANCER E N. On positive solutions of some pairs of differential equations [J]. Trans Am Math Soc, 1984, 284: 729 - 743.

[10] DANCER E N. Positive solutions for a three-species competition system with diffusion-1 general existence results [J]. Nonlinear Anal, 1995, 254: 337 - 357.

[11] 王艳娥，吴建华. 一类 Chemostat 模型正平衡解的存在性和稳定性［J］. 陕西师范大学学报，2006，34 (2): 9 - 12.

[12] WU J H, WOLKOWICZ G S K. A system of resource-based growth models with two resources in the unstirred Chemostat [J]. J Differential Equations, 2001, 172: 330 - 332.

[13] 李海侠. 一类非均匀搅拌 Chemostat 模型解的性质［D］. 西安：陕西师范大学，2006.