

二层海中立于可渗透海床上的大直径墩柱的波浪渗流力*

黄 华, 曾昭奎, 詹杰民, 付 静, 李 奇

(中山大学工学院应用力学与工程系, 广东 广州 510275)

摘 要: 应用特征函数展开法, 研究了作用在二层海洋中可渗透弹性海床上垂直圆柱的波浪渗流力问题, 给出了由表面波和内波分别所引起的渗流压力场的解析解, 由此推导了作用于固立墩柱底部由波浪渗流压力所导致的浮托力和倾覆力矩算式, 并进行了相应的计算。计算结果反应了二层海中渗流波浪力的各种可能变化趋势, 说明内波对波浪渗流力可能存在明显影响。

关键词: 二层海; 波浪绕射; 海床; 波浪渗流力

中图分类号: O353 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2011) 02-0036-06

Wave-induced Seepage Forces on Large Diameter Vertical Circular Cylinder Resting on Porous Elastic Seabed in Two Layer Ocean

HUANG Hua, ZENG Zhaoluan, ZHAN Jiemin, FU Jing, LI Qi

(Department of Applied Mechanics and Engineering, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: The wave seepage forces on vertical circular cylinder resting on porous elastic seabed in two layer ocean has been investigated by applying the eigenfunction expansion approach. The analytical solutions to seepage pressure fields caused by surface wave and inner wave respectively are given and, accordingly, the formulas of the wave-induced lift force and moment caused by the seepage pressure on the bottom of vertical circular cylinder are derived and evaluated. The results reflect possible changes of wave seepage forces on the bottom of vertical circular cylinder in two layer. It is demonstrated that inner wave may have an obvious influence on wave seepage forces.

Key words: two layer ocean; wave diffraction; sea bed; wave-Induced seepage force

海床上的建筑物一般会受到孔隙海床中由海洋波浪引起的渗流压力作用。波浪渗流压力可对其产生波浪浮托力和倾覆力矩, 进而对结构实际承受的波浪载荷产生明显影响。因此, 研究波浪渗流作用具有重要的工程应用上的意义^[1]。在假设土介质不变形和孔隙水不可压, 渗流为达西流的条件下, Durand 和 Monkmeyer^[2]对无限厚度海床的情况求得渗流压力分布的解析解。邱大洪和庄严^[3]给出了重力式平台底部所受浮托力及力矩的数值解。孙昭晨和邱大洪^[4]基于 Biot 固结理论, 考虑了土介质弹性变形和孔隙流体的压缩性, 给出了圆墩柱下有

限深度海床波浪渗流压力解析解。邹志利和邱大洪等^[5-9]考虑了墩柱直接放置在海床上和放置在埋入海床中抛石基床上两种情况, 给出了安置在海床上大尺度墩桩底面波浪渗流压力的计算方法和一些数值结果, 以及计算了在线性波或椭圆余弦波作用下双墩柱波浪渗流力, 讨论了双墩柱沿波向串列和并列布置时墩柱上渗流力随墩距的变化。另外, 实际海洋在一定条件下会呈现层化现象, 而海洋的层化性将导致海水内波的生成, 内波的产生将导致波浪作用机制的改变, 对海上建筑物的作用不容忽视。吴建华等^[10]计算了层化海中浮筒水波辐射的

* 收稿日期: 2010-05-25

基金项目: 广东省海洋渔业重大科技专项资助项目 (A200901G5)

作者简介: 黄华 (1961年生), 男, 副教授; E-mail: tsyhh1982@163.com

附加质量和阻尼系数。YEUNG 等^[11]对两层海结构的辐射和绕射问题进行了探讨。尤云祥等^[12]对两层海中大直径圆柱的波浪力进行了计算分析。付静等^[13-14]研究了二层海中透空圆柱（群）的水动力学特性问题。

本文将 Biot 固结理论与层化海绕射波理论相结合来研究表面波和内波、结构及海床间相互作用，因而是对均匀海波浪渗流力问题研究的推广。通过特征函数展开法对二层海中固立直柱的海底渗流压力场进行求解。在采用分区法时，本文按海水上下层流域及渗流压力场内域，分别使用多种特征级数解，给出了表面波和内波分别所致的渗流压力数学解，并进而推导了直柱底部所受波浪渗流浮托力和倾覆力矩的解析算式。计算结果反应了结构底部的波浪浮托力和倾覆力矩随海水上下层密度比等各种参数的变化趋势，说明内波和表面波所致波浪渗流力与波浪对圆柱的直接水平作用在一定条件下具有相同量级，因而在实际海工结构设计中应对此加以一定重视。

1 二层海中圆柱绕射波场与压力场的求解

如图 1 所示，设上、下层流体的密度分别为 ρ_1 和 ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$)，厚度分别为 h_1 和 h_2 ，水深为 d ，海床厚度为 h 。另采用 Biot 固结理论的相关假设，即假定立于海床上的圆柱结构与海床间无相对滑动，海床底部不透水，土体各向同性、可渗且具有线弹性性质。由于波浪在海底处的水质点速度一般远大于海床内的渗流速度，故在绕射波浪场的求解中可设海底不可渗透，即海域的波浪场不受海床渗

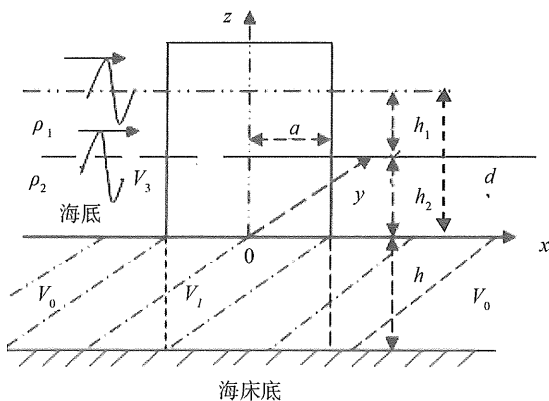


图 1 二层海中可渗透海底上的直立圆柱
Fig. 1 A large diameter vertical cylinder resting on a porous elastic seabed in two layer ocean

透影响，因而波浪场与渗流场可分别求解。对于波浪场，对应的 Stokes 一阶绕射波势的边值问题可表达为：

$$\Phi = \text{Re}(\varphi^\pm e^{-i\omega_\pm t}), \varphi^\pm = \varphi_i^\pm + \varphi_s^\pm, \nabla^2 \varphi^\pm = 0 \quad (1)$$

$$g \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial z} - \omega^2 \varphi^\pm = 0 \quad (z = h_1 + h_2) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi^\pm}{\partial z} = 0 \quad (z = 0), \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial r} = 0 \quad (z = a, 0 \leq z \leq d) \quad (3)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{1/2} \left[\frac{\partial \varphi_s^\pm}{\partial r} - ik \varphi_s^\pm \right] = 0, \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial z} \Big|_{z=h_2+0} = \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial z} \Big|_{z=h_2-0} \quad (4)$$

$$\rho_1 \left(g \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial z} - \omega_\pm^2 \varphi^\pm \right) \Big|_{z=h_2+0} = \rho_2 \left(g \frac{\partial \varphi^\pm}{\partial z} - \omega_\pm^2 \varphi^\pm \right) \Big|_{z=h_2-0} \quad (5)$$

式中， φ^\pm 、 φ_i^\pm 、 φ_s^\pm 分别为总波势、入射和绕射波势分量（ φ^+ 、 φ^- 分别对应表面波及内波）； k 为入射波波数，在此波数下有两种不同频率的波系存在，即表面波和内波，其各自波频分别为 ω_+ 和 ω_- ，且满足色散关系：

$$\omega_\pm^2 = gk \frac{(T_1 + T_2) \pm \sqrt{(T_1 + T_2)^2 - 4(1 - \lambda)T_1 T_2 (1 + \lambda T_1 T_2)}}{2(1 + \lambda T_1 T_2)} \quad (6)$$

式中， $T_1 = \tanh kh_1$ ， $T_2 = \tanh kh_2$ ， $\lambda = \rho_1/\rho_2$ 。由线性绕射波的相关理论，利用圆柱径向表面条件可得：

$$\varphi^\pm = - \frac{igA_\pm}{\omega_\pm} Z_\pm(z) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n [J_n(kr) - \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)'}(ka)} H_n^{(1)}(kr)] \cos n\theta \quad (7)$$

$$Z(z) = Z_\pm(z) = \begin{cases} \cosh k(z-h) + T_\pm(k) \sinh k(z-h), & h_2 \leq z \leq h \\ E_\pm(k) \cosh kz, & 0 \leq z < h_2 \end{cases} \quad (8)$$

式中， $E_\pm(k) = (T_\pm(k) \cosh kh_1 - \sinh kh_1) / \sinh kh_2$ ， A_+ 和 A_- 分别为表面波和内波波幅，另有 $\beta_n = (2 - \delta_n) i^n$ 。 $J_n(x)$ 、 $J'_n(x)$ 为 n 阶第一类 Bessel 函数及其导数， $H_n^{(1)}(x)$ 、 $H_n^{(1)'}(x)$ 为 n 阶第一类 Hankel 函数及其导数， $I_n(x)$ 、 $K_n(x)$ 为第一类和第二类修正 Bessel 函数。

圆柱侧面流场动压强由伯努利方程可得：

$$P^\pm = \text{Re}(p^\pm), \quad p^\pm = \rho g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} Z_\pm(z)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2i\beta_n}{\pi ka H_n^{(1)}(ka)} \cos n\theta \quad (9)$$

水平总波浪力 F^\pm 及相应的力矩分别为 $F^\pm = \text{Re}(F_1^\pm)$ 和 $M^\pm = \text{Re}(M_1^\pm)$, 其中

$$F_1^\pm = -\int_0^d \int_0^{2\pi} p^\pm |_{r=a} a \cos \theta d\theta dr = \frac{4\rho_1 g \pi A_\pm e^{-i\omega_\pm t}}{k^2 H_1^{(1)}(ka)}$$

$$[T_\pm(k) + (1 - \frac{1}{\lambda})(\sinh kh_1 - T_\pm(k) \cosh kh_1)] \quad (10)$$

$$M_1^\pm = -\int_0^d \int_0^{2\pi} zp^\pm |_{r=a} a \cos \theta d\theta dr =$$

$$\frac{4g\pi A_\pm e^{-i\omega_\pm t}}{k^2 H_1^{(1)}(ka)} [\rho_2 (h_2 \sinh kh_2 + \frac{1 - \cosh kh_2}{k}) +$$

$$\rho_1 (h_2 \sinh kh_1 + T_\pm(k)(d - h_2 \cosh kh_1) -$$

$$\frac{1 - \cosh kh_1}{k} - \frac{T_\pm(k)}{k} \sinh kh_1)] \quad (11)$$

2 渗流波浪压力的计算

如图 1 所示, 将海床内的渗流场划分为 v_1 和 v_0 内外两个区域。设 P_w^+ 和 P_w^- 分别为由表面波和内波引起的海底处的动水压力, 且, 其中应有 $p_w^\pm = p_i^\pm + p_s^\pm$, 其中 p_i^\pm 和 p_s^\pm 分别对应入射波和绕射波压力, 且有

$$p_i^\pm = \rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(kr) \cos n\theta \quad (12)$$

$$p_s^\pm = -\rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta \quad (13)$$

再设海床内渗流场区域 v_0 中所对应的由入射和绕射表面波及内波所引起的波浪渗流压力分别为 $p_i^{\pm(0)}$ 和 $p_s^{\pm(0)}$, 总压力为 $p^{\pm(0)}$ ($p^{\pm(0)} = p_i^{\pm(0)} + p_s^{\pm(0)}$), 而区域 v_1 中为 $p^{\pm(1)}$, 则各波浪渗流压力场所对应的边值问题可表达为:

$$\nabla^2 p_i^{\pm(0)} = C_s \frac{\partial p_i^{\pm(0)}}{\partial t}, \quad \nabla^2 p_s^{\pm(0)} = C_s \frac{\partial p_s^{\pm(0)}}{\partial t} \quad (14)$$

$$p_i^{\pm(0)} = p_i^\pm, \quad p_s^{\pm(0)} = p_s^\pm \quad (z=0, r>a) \quad (15)$$

$$\frac{\partial p_i^{\pm(0)}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p_s^{\pm(0)}}{\partial z} = 0$$

$$(z=-h, r>a) \quad (16)$$

$$\nabla^2 p^{\pm(1)} = C_s \frac{\partial p^{\pm(1)}}{\partial t} \quad (17)$$

$$\frac{\partial p^{\pm(1)}}{\partial z} = 0 \quad (z=0, r<a);$$

$$\frac{\partial p^{\pm(1)}}{\partial z} = 0 \quad (z=-h, r<a) \quad (18)$$

式 (14)、(17) 为孔隙水压的控制方程; C_s 为影响多孔介质海洋土变形的综合特性系数, 其算式为: $C_s = \frac{\rho g}{k_s} (n_0 \beta_f + \frac{1}{G} \frac{1-2\nu}{2-2\nu})$ 。式中, k_s 为渗透系数; β_f 为孔隙流体的压缩系数; n_0 为海床的孔隙率; G 、 ν 分别为海床土介质的剪切模量和泊松比。分别求解 $p_i^{\pm(0)}$ 、 $p_s^{\pm(0)}$ 和 $p^{\pm(1)}$, 可得:

$$p_i^{\pm(0)} = \rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \cdot$$

$$\frac{\cosh k_1^\pm (z+h)}{\cosh k_1^\pm h} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n J_n(kr) \cos n\theta \quad (19)$$

$$p_s^{\pm(0)} = \rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) [-\frac{\cosh k_1^\pm (z+h)}{\cosh k_1^\pm h}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \frac{J'_n(ka)}{H_n^{(1)}(ka)} H_n^{(1)}(kr) \cos n\theta +$$

$$\sum_{n=0m=0}^{\infty} \sum_{n=0m=0}^{\infty} A_{nm}^\pm H_n^{(1)}(k_{2m}^\pm r) \sin(m + \frac{1}{2}) \frac{\pi z}{h} \cos n\theta] \quad (20)$$

$$p^{\pm(1)} = \rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} B_{nm}^\pm J_n(k_{3m}^\pm r) \cos \frac{m\pi z}{h} \cos n\theta \quad (C_s \neq 0) \quad (21)$$

$$p^{\pm(1)} = \rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \sum_{n=0}^{\infty} [B_{n0}^\pm (\frac{r}{a})^n +$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2B_{nm}^\pm \frac{I_n(m\pi r/h)}{I_n(m\pi a/h)} \cos \frac{m\pi z}{h}] \cos n\theta \quad (C_s = 0) \quad (22)$$

式中, A_{nm}^\pm 与 B_{nm}^\pm 为待定系数; $k_1^\pm = \sqrt{k^2 - i\omega_\pm C_s}$; $k_{2m}^\pm = \sqrt{i\omega_\pm C_s - (m+1/2)^2 (\pi/h)^2}$; $k_{3m}^\pm = \sqrt{i\omega_\pm C_s - (m\pi/h)^2}$, 若 $C_s = 0$, 则有 $k_1^\pm = k$, $k_{2m}^\pm = i(m+1/2)(\pi/h)$ 。

利用区域 v_0 与 v_1 在交界面处的匹配条件及傅氏数展开定理, 由函数系 $\{\cos(m\pi z/h), -h \leq z \leq 0\}$ 和 $\{\sin((1/2)+m)(\pi z/h), -h \leq z \leq 0\}$ 的正交性, 即可得待定系数 A_{nm}^\pm 与 B_{nm}^\pm 的完备代数方程组。

由式 (21) 和 (22) 有:

$$p^{\pm(1)} |_{z=0} = \rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \cdot$$

$$\sum_{n=0m=0}^{\infty} \sum_{n=0m=0}^{\infty} B_{nm}^\pm J_n(k_{3m}^\pm r) \cos n\theta \quad (C_s \neq 0) \quad (23)$$

$$p^{\pm(1)} = \rho_2 g A_\pm e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \cdot$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} [B_{n0}^\pm (\frac{r}{a})^n + \sum_{m=1}^{\infty} 2B_{nm}^\pm \frac{I_n(m\pi r/h)}{I_n(m\pi a/h)}] \cos n\theta \quad (C_s = 0) \quad (24)$$

设圆柱底面上所受渗流浮托力和倾覆力矩分别为 $F_v^\pm = \text{Re}(F_1^\pm)$ 及 $M_v^\pm = \text{Re}(M_1^\pm)$ ，则有：

$$F_1^\pm = \int_0^a \int_0^{2\pi} P^{\pm(1)}|_{z=0} r d\theta dr = (A_\pm \rho_2 g a^2 \pi) E_\pm(k) e^{-i\omega_\pm t} \cdot [B_{00}^\pm + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4B_{0m}^\pm}{m\pi} \frac{h}{a} \frac{I_1(m\pi a/h)}{I_0(m\pi a/h)}] \quad (25)$$

$$M_1^\pm = \int_0^a \int_0^{2\pi} P^{\pm(1)}|_{z=0} r^2 \cos \theta d\theta dr = (A_\pm \rho_2 g a^3 \pi) e^{-i\omega_\pm t} E_\pm(k) \cdot [\frac{B_{10}^\pm}{4} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2B_{1m}^\pm}{m\pi} \frac{h}{a} \frac{I_2(m\pi a/h)}{I_1(m\pi a/h)}] \quad (26)$$

3 算例与分析

为方便计，实算中设海床不变形及孔隙水不压缩，即可取 $C_s = 0$ ，另设 $A^+ = A^- = A$ 。对水平波浪力与垂直浮托力，本文采用 $\rho_1 g A \pi a^2$ 进行无量纲化；对水平波浪力矩和倾覆力矩，本文用 $\rho_1 g \pi A a^3$ 进行无量纲化； ka 为无量纲波数。

图 2 表明，在一定的 ka 范围，表面波水平波浪力较内波波浪力大。表面波波浪力随 ka 的增大而增大，达到极值后减少；内波波浪力则呈单调增的趋势。在一个 ka 取值较小范围内，表面波水平力矩与内波力矩大致相等；随着 ka 的增大，两者都呈现出先增后减再增的变化趋势，且表面波水平力矩较内波力矩略小，反映了在层化海洋中，内波对结构的直接倾覆作用可能超过表面波作用。

图 3 表明，在相同的海况条件下，当 ka 较小时，表面波水平波浪力较浮托力小，而 ka 较大时，情形相反。而在一定的 ka 取值范围内，内波水平波浪力明显比内波所致浮托力要小，表明内波引起的浮托力作用不容忽视。

图 4 表明，在一定海况条件下，当 ka 较小时，表面波引起的浮托力及倾覆力矩均超过了内波引起的波浪渗流作用，而随着 ka 的增大，情况相反，反映了由内波所致对结构的波浪渗流作用与波浪直接作用一样可能超过表面波对应的作用，故对内波影响要加以足够重视。

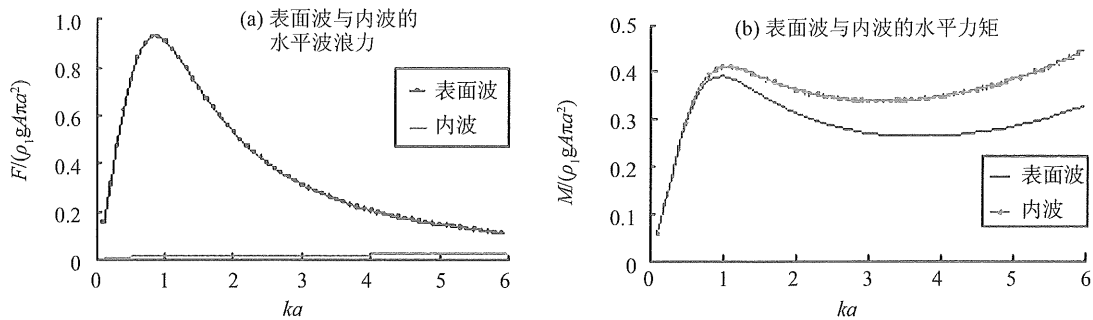


图 2 $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$ ，表面波与内波的水平波浪力（矩）

Fig. 2 Surface-wave and internal-wave force and moment for $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$

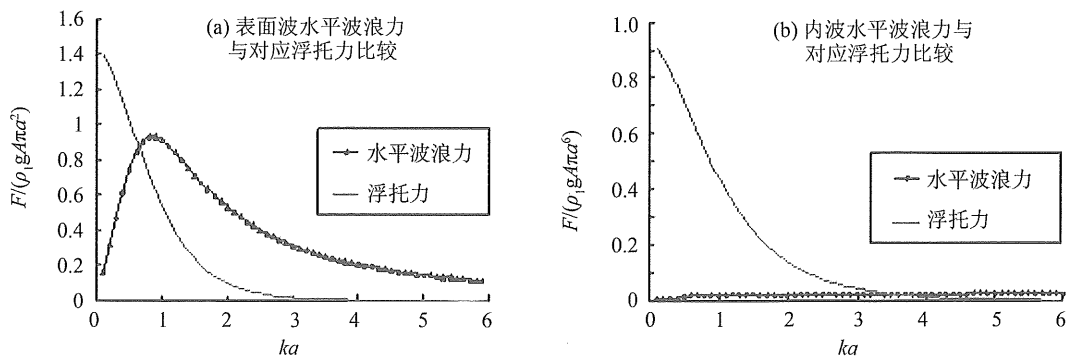


图 3 $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$ ，表面波及内波波浪力与对应浮托力的比较

Fig. 3 Comparison of surface-wave and internal-wave force and uplift force for $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$

图 5 表明, 表面波、内波引起的水平力矩均较相应的倾覆力矩大, 且随着 ka 的增大, 两者差距增大。但在 ka 较小时, 两者相差不大, 量级基本相同, 因此在结构的实用当中对渗流倾覆力矩应给予充分重视。当 ka 较大时, 表面波及内波引起的倾覆力矩趋弱。

图 6-7 表明, 在一定海况条件下, 随着上下层流体密度的变化, 表面波及内波所致浮托力变化不大, 但由其引起的倾覆力矩变化较为明显; 密度

比越小, 浮托力及倾覆力矩越大, 反映出海洋层化性对渗流波浪力具有一定的影响。

4 结 论

本文将两层海的波浪理论推广应用于波浪渗流作用场的理论研究, 推导了由表面波与内波分别所致可渗透海床内渗流压力场的解析算式, 进而对渗流压力所致对圆柱底部的浮托力和倾覆力矩进行了计算。结果表明, 在一定条件下, 内波所致浮托力

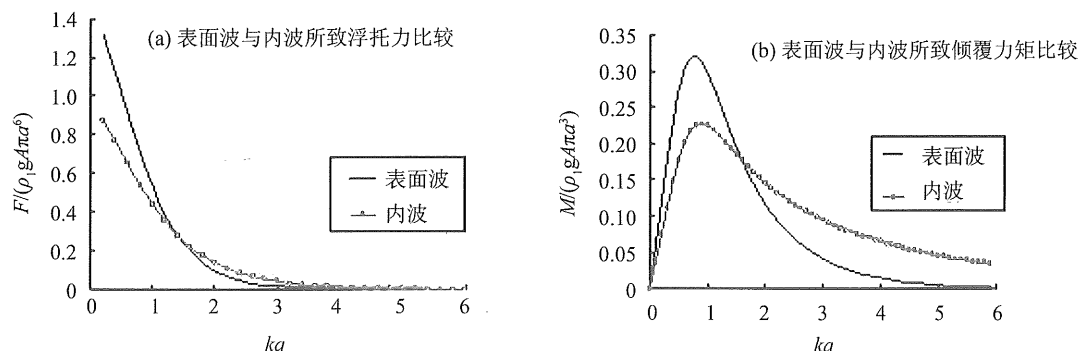


图 4 $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$, 表面波与内波所致浮托力及倾覆力矩的比较

Fig. 4 Comparison of the surface-wave and internal-wave uplift force and overturning moment for $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$

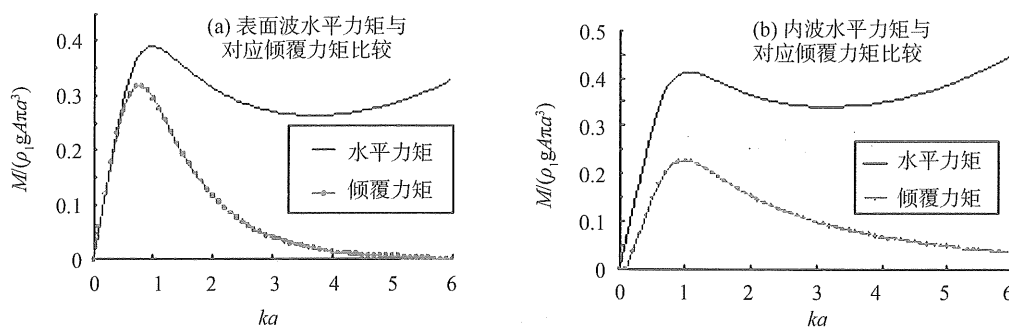


图 5 $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$, 水平波浪力矩与倾覆力矩的比较

Fig. 5 Comparison of surface-wave and internal-wave moment and overturning moment for $h/a = 3/4, h_1/h_2 = 2/3, \lambda = 0.9$

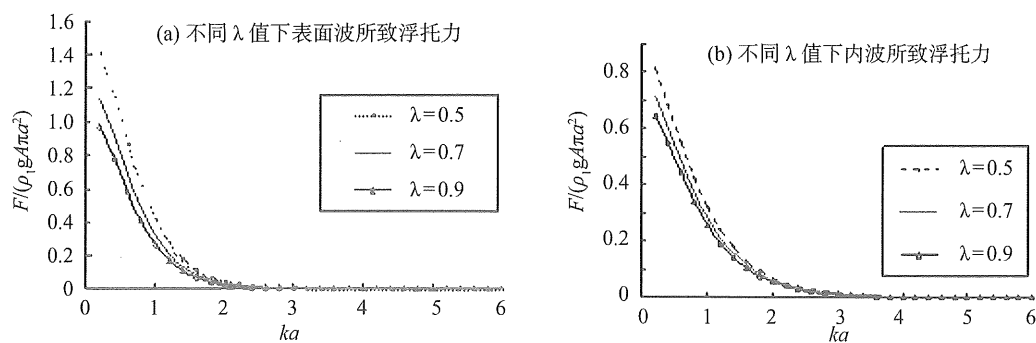


图 6 $d = h = a, h_1/h_2 = 2/3$, 不同 λ 值下的表面波及内波所致浮托力

Fig. 6 Wave-induced uplift forces with different λ for $d = h = a, h_1/h_2 = 2/3$

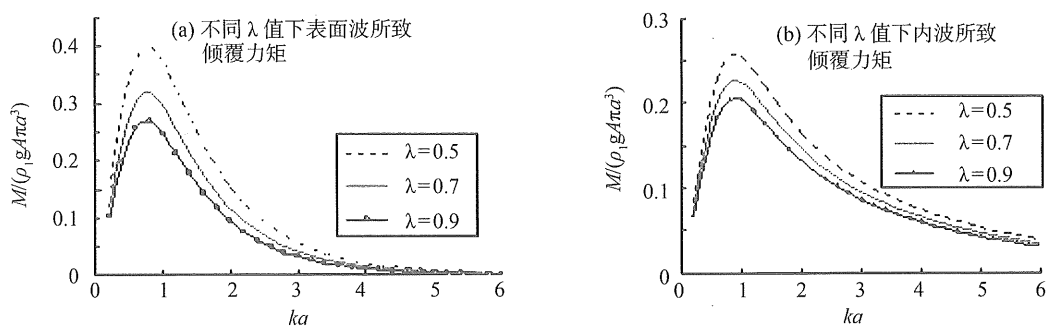


图7 $d = h = a, h_1/h_2 = 2/3$, 不同 λ 值下的表面波及内波所致倾覆力矩

Fig. 7 Wave-induced overturn moment with different λ for $d = h = a, h_1/h_2 = 2/3$

可能超过内波水平波浪力, 而内波波浪渗流作用与其波浪直接作用类似均可能超过表面波作用, 因而对内波的影响不容忽视。另一方面, 波浪引起的水平力矩和渗流倾覆力矩量级可能接近, 因此对于软基海底的固立结构, 在实际设计和使用中应对渗流倾覆力矩给予关注。此外, 上下层流体密度比趋小将可能增强渗流倾覆力矩的作用。

参考文献:

- [1] 邱大洪. 波浪渗流力学[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006: 193 - 203.
- [2] DURAND T J P, MONKMEYER P L. Wave-induced seepage effects on a vertical cylinder [C]. Proceeding of Coastal Engineering, 1980: 1781 - 1798.
- [3] 庄严, 邱大洪. 海上重力式建筑物基底的渗压荷载[J]. 海洋学报, 1987, 9(2): 239 - 254.
- [4] 孙昭晨, 邱大洪. 作用于可渗可压缩海床上的墩柱底面上的波浪力[J]. 海洋学报, 1989, 11(3): 364 - 371.
- [5] 邹志利, 邱大洪. 无限深可压缩海床上圆柱墩波浪渗流压力解析解[J]. 海洋学报, 1993, 15(3): 106 - 115.
- [6] 邹志利, 邱大洪. 可渗可压缩海床上墩柱底面波浪渗流压力的计算[J]. 海洋工程, 1993, 11(4): 47 - 58.
- [7] 邱大洪, 邹志利. 双墩柱波浪渗流力[J]. 大连理工大学学报, 1993, 33(2): 232 - 237.
- [8] 邱大洪, 陈健. 抛石基床上圆柱墩底部的波浪浮托力[J]. 海洋学报, 1994, 16(1): 114 - 123.
- [9] 邱大洪, 臧军. 群墩上的波浪浮托力[J]. 中国港湾建设, 1995(5): 8 - 12.
- [10] 吴建华, 吴秀恒, 李世漠. 大尺度物体在层化海洋中的波浪绕射和散射理论(IV)本征函数展开法[J]. 水动力学研究与进展, 1991, 6(3): 46 - 53.
- [11] YEUNG R W, NGUYEN T. Radiation and Diffraction of Waves in a Two-layer Fluid [C] // Proceedings of the 22th Symposium on Naval Hydrodynamics. Washington, D. C.: National Academy Press, 1999: 875 - 887.
- [12] 尤云祥, 朱伟, 缪国平. 分层海洋中大直径桩柱的波浪力[J]. 上海交通大学学报, 2003, 37(8): 1181 - 1185.
- [13] 付静, 黄华, 朱庆勇. 二层流体中透空大直径桩柱的波浪特性分析[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(3): 14 - 18.
- [14] 付静, 黄华, 詹杰民, 等. 二层海洋中波浪对透空圆柱群的绕射作用分析[J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2008, 47(2): 76 - 80.