第 50 卷 第 5 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 5
2011 年 9 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Sep. 2011

四分之一平面域上 Helmholtz 方程的混合边值问题*

黄民海[1,2]
（1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
2. 肇庆学院数学与信息科学学院，广东 肇庆 526061）

摘 要：利用一种新型的 Fokas 变换方法，讨论 1/4 平面域上 Helmholtz 方程的混合边值问题，给出了解的封闭形式积分表达式，所得结果方便于进一步对解作渐近分析和数值计算。

关键词：Helmholtz 方程；混合边值问题；Fokas 变换方法
中图分类号：O175.2；O175.8 **文献标志码：**A **文章编号：**0529－6579（2011）05－0007－04

The Mixed Boundary-Value Problem of Helmholtz Equation in a Quarter-Plane

HUANG Minhai[1,2]
（1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. College of Mathematics and Information Sciences, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, China）

Abstract: The mixed boundary-value problem of Helmholtz equation in a quarter-plane is studied by means of a new type transform method introduced by Fokas. The integral representation of the solution in closed form is obtained. The results have conveniences both in asymptotic analysis and numerical calculation.

Key words: Helmholtz equation; mixed boundary-value problem; Fokas'transform method

众所周知，求解偏微分方程有各种各样的方法：分离变量法、傅立叶变换法、格林函数法、逆散射方法，等等。20 世纪末，Fokas 提出一套新颖灵活的变换方法，用于求解二维线性和可积性非线性偏微分方程的初（边）值问题[1-2]。随后，Fokas 和他的学生及其合作者不断改进和完善此方法，取得了一系列的研究成果[3-5]。

利用 Fokas 方法得到的解，是一个谱平面上包含已知边界值的封闭积分表达式。相比于经典方法，这种积分表达式具有两个重要特点：一是积分路径可以变形到包含指数下降的被积函数的曲线；二是积分在区域的边界上一致收敛。这两个特点可以方便对解作进一步的渐近分析和数值计算[6-7]。

许多时间调和声波或电磁波的散射问题都能表成某个 Helmholtz 方程[8-9]。本文就是利用 Fokas 变换方法研究如下 1/4 平面域上 Helmholtz 方程的混合边值问题

$$\begin{cases} \Delta q(z,\bar{z}) + 4\beta^2 q(z,\bar{z}) = 0, z \in \Omega \\ q(0,y) = d(y), z \in \Gamma_1 \\ \dfrac{\partial q(x,0)}{\partial \vec{n}} = n(x), z \in \Gamma_2 \end{cases} \tag{1}$$

其中，$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$ 为通常的 Laplace 算子，$z = x + iy, \bar{z} = x - iy$，$\Omega$ 为第一象限所围成的区域，Ω 的边界 Γ_1 和 Γ_2 分别为正半虚轴和正半实轴，$\vec{n}$ 为外法线向量，$d(y), n(x) \in L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^2(\mathbb{R}^+)$。此外，为了保证解的存在唯一，我们假定 $q(z,\bar{z})$ 在 ∞ 处满足如下辐射条件[10]

* 收稿日期：2010－12－20
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10871212）
作者简介：黄民海（1965 年生），男，副教授，博士生；E-mail：hmh9520@sina.com

$$q(z,\bar{z}) = O(\frac{1}{r^{1/2}}),\frac{\partial q}{\partial r} - 2\mathrm{i}\beta q(z,\bar{z}) = O(\frac{1}{r^{3/2}}),$$
$$r = |z| \to \infty \tag{2}$$

1 解的积分表达式

Fokas 变换方法源于逆散射方法，利用到 Lax pair 和 Riemann-Hilbert 技术。本节我们将简要推导第一象限（1/4 平面）Ω 内 Helmholtz 方程解的一般积分表达式。为了方便后面讨论，这里与 Fokas 的推导过程稍有改动。

引理 1 (Fokas)[3]. 设 Ω 为第一象限所围成的平面区域，假定在 Ω 内 Helmholtz 方程存在一个解 $q(z,\bar{z})$ 满足辐射条件（2）并在 Ω 的边界上有足够的光滑，则 $q(z,\bar{z})$ 可以表示成如下形式

$$q(z,\bar{z}) = \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\sum_{j=1}^{2}\int_{L_j}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(kz+\frac{\bar{z}}{k})}\rho_j(k)\frac{\mathrm{d}k}{k} \tag{3}$$

其中，谱函数 $\rho_1(k)$ 和 $\rho_2(k)$ 分别定义为

$$\rho_1(k) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(k+\frac{1}{k})x}[-\mathrm{i}q_y(x,0) + \mathrm{i}\beta(k-\frac{1}{k})\cdot q(x,0)]\mathrm{d}x, \mathrm{Im}\, k \leqslant 0 \tag{4}$$

$$\rho_2(k) = -\int_0^\infty \mathrm{e}^{\beta(k-\frac{1}{k})y}[\mathrm{i}q_x(0,y) - \beta(k+\frac{1}{k})\cdot q(0,y)]\mathrm{d}y, \mathrm{Re}\, k \leqslant 0 \tag{5}$$

而

$$L_1 = \{|k| \leqslant 1, \arg k = \pi\} \cup \{|k| \geqslant 1, \arg k = 0\} \cup \{|k| = 1, \pi \leqslant \arg k \leqslant 2\pi\},$$
$$L_2 = \{|k| \leqslant 1, \arg k = \frac{3\pi}{2}\} \cup \{|k| \geqslant 1, \arg k = \frac{\pi}{2}\} \cup \{|k| = 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg k \leqslant \frac{\pi}{2}\},$$

此外，如下全局关系成立

$$\rho_1(k) + \rho_2(k) = 0, k \in D \tag{6}$$

其中 $D = \{|k| > 1, \pi \leqslant \arg k \leqslant \frac{3\pi}{2}\} \cup \{|k| < 1, 0 \leqslant \arg k \leqslant \frac{\pi}{2}\} \cup \{|k| = 1, 0 < \arg k < \frac{3\pi}{2}\}$。

证明 函数 $q(z,\bar{z})$ 满足 Helmholtz 方程当且仅当如下微分形式是闭的

$$W = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(kz+\frac{\bar{z}}{k})}[(q_z + \mathrm{i}k\beta q)\mathrm{d}z - (q_{\bar{z}} + \frac{\mathrm{i}\beta}{k}q)\mathrm{d}\bar{z}], k \in \mathbb{C} \tag{7}$$

这一点很容易证实，因为 $\mathrm{d}W = 2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(kz+\frac{\bar{z}}{k})}[(q_{z\bar{z}} + \beta^2 q)\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}, k \in \mathbb{C}, z \in \Omega$。利用 Cauchy 定理和（2），有

$$\int_{\Gamma_1} W = \int_{\Gamma_2} W, k \in D \tag{8}$$

由此得到全局关系（6），其中用到符号：
$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_x - \mathrm{i}\,\partial_y), \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$。

为了推导积分表达式（3），我们需要对微分形式 W 进行谱分析。由于闭的微分形式 W 也是完全的，因此存在 $\mu\exp[-\mathrm{i}\beta(kz + \frac{\bar{z}}{k})]$ 使得

$$W = W(z,\bar{z},k) := \mathrm{d}[\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta(kz+\frac{\bar{z}}{k})}\mu(z,\bar{z},k)] \tag{9}$$

由（7）和（9），直接推得 Helmholtz 方程具有如下的 Lax pair：

$$\mu_z - \mathrm{i}\beta k\mu = q_z + \mathrm{i}\beta kq, \mu_{\bar{z}} - \frac{\mathrm{i}\beta}{k}\mu = -q_{\bar{z}} - \frac{\mathrm{i}\beta}{k}q \tag{10}$$

相应地固定某点 z_j，由（9）有

$$\mu_j(z,\bar{z},k) = \int_{z_j}^{z}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta[k(z-\zeta)+\frac{1}{k}(\overline{z-\zeta})]}\cdot[(q_\zeta + \mathrm{i}k\beta q)\mathrm{d}\zeta - (q_{\bar{\zeta}} + \frac{\mathrm{i}\beta}{k}q)\mathrm{d}\bar{\zeta}], z \in \Omega \tag{11}$$

由 W 的完全性知，$\mu_j(z,\bar{z},k)$ 仅依赖于 z_j 和 z，而与积分路径无关。同时，$\mu_j(z,\bar{z},k)$ 也满足 Lax pair 方程（10）。

分别取 z_j 为 $(0,0)$，(x,∞) 和 (∞,y)，相应地得到

$$\mu_0(z,\bar{z},k) = \int_0^z \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta[k(z-\zeta)+\frac{1}{k}(\overline{z-\zeta})]}\cdot[(q_\zeta + \mathrm{i}k\beta q)\mathrm{d}\zeta - (q_{\bar{\zeta}} + \frac{\mathrm{i}\beta}{k}q)\mathrm{d}\bar{\zeta}], k \in D_0 \tag{12}$$

$$\mu_{\mathrm{i}\infty}(z,\bar{z},k) = \int_\infty^y \mathrm{e}^{-\beta(k-\frac{1}{k})(y-\eta)}\cdot[\mathrm{i}q_x(x,\eta) - \beta(k+\frac{1}{k})q(x,\eta)]\mathrm{d}\eta, k \in D_{\mathrm{i}\infty} \tag{13}$$

$$\mu_\infty(z,\bar{z},k) = \int_\infty^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta(k+\frac{1}{k})(x-\xi)}\cdot[-\mathrm{i}q_y(\xi,y) + \mathrm{i}\beta(k-\frac{1}{k})q(\xi,y)]\mathrm{d}\xi, k \in D_\infty \tag{14}$$

这里，$\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$，

$$\begin{cases} D_0 = \{|k| \geqslant 1, 0 \leqslant \arg k \leqslant \frac{\pi}{2}\} \cup \{|k| \leqslant 1, \pi \leqslant \arg k \leqslant \frac{3\pi}{2}\} \cup \{|k| = 1, 0 \leqslant \arg k \leqslant 2\pi\}, \\ D_{\mathrm{i}\infty} = \{|k| \geqslant 1, \mathrm{Re}\, k \leqslant 0\} \cup \{|k| \leqslant 1, \mathrm{Re}\, k \geqslant 0\}, \\ D_\infty = \{|k| \geqslant 1, \mathrm{Im}\, k \leqslant 0\} \cup \{|k| \leqslant 1, \mathrm{Im}\, k \geqslant 0\} \end{cases} \tag{15}$$

$D_0, D_{i\infty}, D_\infty$ 分别为函数 $\mu_0, \mu_{i\infty}, \mu_\infty$ 在谱平面上关于 k 的有界解析区域。事实上，记 $z-\zeta = r_0 e^{i\varphi_0}, \varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$，$k = |k| e^{i\varphi_1}, \varphi_1 \in [0, 2\pi]$，则有

$$\mathrm{Re}[ik(z-\zeta) + \frac{i}{k}(\overline{z-\zeta})] = -(|k| - \frac{1}{|k|}) \cdot r_0 \sin(\varphi_0 + \varphi_1) \tag{16}$$

容易看出，对于 $\varphi_0 \in (0, \frac{\pi}{2})$，要使（12）中积分的指数部分有界，当且仅当 $\varphi_1 \in [0, \frac{\pi}{2}], |k| \geqslant 1$ 或者 $\varphi_1 \in [\pi, \frac{3\pi}{2}], |k| \leqslant 1$ 或者 $\varphi_1 \in [0, 2\pi]$，$|k| = 1$，这正是 D_0。类似可以确定 $D_{i\infty}, D_\infty$。

由（12）－（14）以及（10）的第一个方程，考虑到 $q(z,\bar{z})$ 不依赖于 k，有

$$\mu = -q + O(\frac{1}{k}), k \to \infty \tag{17}$$

其中 $\mu = \mu_0, \mu_{i\infty}, \mu_\infty$ 定义在其相应的有界解析区域 $D_0, D_{i\infty}, D_\infty$。

注意到 $\mu_\infty = \mu_{i\infty}, k \in D$，由此，可以定义如下分区全纯函数（与文［3］有所不同）

$$\mu(z,\bar{z},k) = \begin{cases} \mu_0(z,\bar{z},k),\ k \in \{|k| \geqslant 1, 0 \leqslant \arg k \leqslant \frac{\pi}{2}\} \cup \{|k| \leqslant 1, \pi \leqslant \arg k \leqslant \frac{3\pi}{2}\}; \\ \mu_{i\infty}(z,\bar{z},k),\ k \in \{|k| \geqslant 1, \frac{\pi}{2} \leqslant \arg k \leqslant \pi\} \cup \{|k| \leqslant 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg k \leqslant \frac{\pi}{2}\}; \\ \mu_\infty(z,\bar{z},k),\ k \in \{|k| \geqslant 1, \pi \leqslant \arg k \leqslant 2\pi\} \cup \{|k| \leqslant 1, \frac{\pi}{2} \leqslant \arg k \leqslant \pi\} \end{cases} \tag{18}$$

从而，可以构造 Riemann-Hilbert 问题

$$\mu^+ - \mu^- = \rho(k) e^{i\beta(kz - \bar{z}/k)}, k \in L = L_1 \cup L_2 \tag{19}$$

这里，$\mu^\pm$ 分别表示 μ 在边界 L 的正侧和负侧的极限值。容易证明，跳函数具有（19）的形式，这是因为 $\mu_0, \mu_{i\infty}, \mu_\infty$ 均满足方程（10），所以任意两个解的差具有形式 $\rho(k) e^{i\beta(kz - \bar{z}/k)}$。另一方面，由于假定 $q(z,\bar{z})$ 在 Ω 的边界有足够的光滑，所以 $\mu_0, \mu_{i\infty}$，μ_∞ 关于 z 在 $\bar{\Omega}$ 上连续。

记 $l = \{|k| = 1, -\frac{\pi}{2} \leqslant \arg k \leqslant 0\}$，以下我们来确定 $\rho(k)$。由（19），有

$$\rho(k) = \mu^+(0,0,k) - \mu^-(0,0,k) = \begin{cases} \mu_0(0,0,k) - \mu_\infty(0,0,k) = \rho_1(k), k \in L_1 \setminus l, \\ \mu_{i\infty}(0,0,k) - \mu_0(0,0,k) = \rho_2(k), k \in L_2 \setminus l, \\ \mu_{i\infty}(0,0,k) - \mu_\infty(0,0,k) = \rho_1(k) + \rho_2(k), k \in l, \end{cases} \tag{20}$$

$\rho_1(k), \rho_2(k)$ 称为谱函数，分别由（4），（5）定义。

根据解析函数边值理论[11]，满足条件（17）的 Riemann-Hilbert 问题（19）有唯一解

$$\mu = -q + \frac{1}{2\pi i}\int_L \rho(s) e^{i\beta(sz + \frac{\bar{z}}{s})} \frac{ds}{s-k}, k \in \mathbb{C} \setminus L \tag{21}$$

将（21）代入（10）的第二个方程，得到积分表达式（3），这样，引理得证。

2　混合问题的解

式（3）和（4）－（5）常称作 Fokas 变换。一般地，解的积分表达式（3）含有 Dirichlet 和 Neumann 边界值。对于具体问题如本文所讨论的混合边值问题（1），已知边界 Γ_1 上的 Dirichlet 边值和 Γ_2 上的 Neumann 边值，而边界 Γ_1 上的 Neumann 边值和 Γ_2 上的 Dirichlet 边值未知。对于一些特定的区域，利用全局关系（6）和某些映射关系，可以消除表达式中的未知量，从而得到解的封闭积分表达式。

定理 1　设 $q(z,\bar{z})$ 满足混合边值问题（1）和辐射条件（2），则 $q(z,\bar{z})$ 有如下封闭的积分表达式

$$q(z,\bar{z}) = \frac{1}{\pi i}\int_{L_1} e^{i\beta(kz + \frac{\bar{z}}{k})} [\int_0^\infty n(x) \sin\beta(k + \frac{1}{k}) x dx + \beta(k + \frac{1}{k}) \int_0^\infty d(y) \mathrm{sh}\beta(k - \frac{1}{k}) y dy] \frac{dk}{k} \tag{22}$$

证明　引入辅助函数

$$N_1(k) = -i\int_0^\infty e^{-i\beta(k + \frac{1}{k})x} q_y(x,0) dx = i\int_0^\infty e^{-i\beta(k + \frac{1}{k})x} n(x) dx,$$

$$D_1(k) = i\beta(k - \frac{1}{k}) \int_0^\infty e^{-i\beta(k + \frac{1}{k})x} q(x,0) dx,$$

$$N_2(k) = -i\int_0^\infty e^{\beta(k - \frac{1}{k})y} q_x(0,y) dy,$$

$$D_2(k) = \beta(k + \frac{1}{k}) \int_0^\infty e^{\beta(k - \frac{1}{k})y} q(0,y) dy = \beta(k + \frac{1}{k}) \int_0^\infty e^{\beta(k - \frac{1}{k})y} d(y) dy$$

由全局关系（6），得

$$N_1(k)+D_1(k)+N_2(k)+D_2(k)=0, k\in D \tag{23}$$

令 $k\mapsto -\frac{1}{k}$ 并注意到辅助函数的定义，得

$$N_1(-k)-D_1(-k)+N_2(k)-D_2(k)=0, k\in D_*$$

即

$$N_2(k)=D_1(-k)-N_1(-k)+D_2(k), k\in D_* \tag{24}$$

其中

$$D_*=\{|k|>1,\frac{\pi}{2}\leqslant \arg k\leqslant \pi\}\cup\{|k|<1,-\frac{\pi}{2}\leqslant \arg k\leqslant 0\}\cup\{|k|=1,-\frac{\pi}{2}<\arg k<\pi\}$$

注意到，(24) 和 (6) ($k\mapsto -k$) 在 L_2 上有效，(24) ($k\mapsto -k$) 和 (6) ($k\mapsto -k$) 在 L_1 上有效。由 (6) 和 (24) 消去 $N_2(k)$，得

$$N_1(k)-N_1(-k)+D_1(k)+D_1(-k)+2D_2(k)=0,\ k=-t,t\in L_1 \tag{25}$$

令 $k\mapsto -k$，得

$$N_1(-k)-N_1(k)+D_1(-k)+D_1(k)+2D_2(-k)=0,\ k\in L_1$$

即

$$D_1(k)=-D_1(-k)+N_1(k)-N_1(-k)-2D_2(-k)=0,\ k\in L_1 \tag{26}$$

由于 $\rho_1(k)=N_1(k)+D_1(k)$，$\rho_2(k)=N_2(k)+D_2(k)$，将 (24)，(26) 代入 (3)，得

$$q(z,\bar z)=\frac{1}{4\pi i}\sum_{j=1}^{2}\int_{L_j}e^{i\beta(kz+\frac{\bar z}{k})}\rho_j(k)\frac{dk}{k}:=H+R$$

其中

$$H=\frac{1}{4\pi i}\int_{L_2-L_1}e^{i\beta(kz+\frac{\bar z}{k})}D_1(-k)\frac{dk}{k},$$

$$R=\frac{1}{4\pi i}\Big(\int_{L_1}e^{i\beta(kz+\frac{\bar z}{k})}[2N_1(k)-N_1(-k)-2D_2(-k)]\cdot\frac{dk}{k}+\int_{L_2}e^{i\beta(kz+\frac{\bar z}{k})}[-N_1(-k)+2D_2(k)]\frac{dk}{k}\Big)$$

利用柯西定理，$H=0$，再把 L_2 的积分转化到 L_1 上，得到所要证的结论

$$q(z,\bar z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_1}e^{i\beta(kz+\frac{\bar z}{k})}[N_1(k)-N_1(-k)+D_2(k)-D_2(-k)]\frac{dk}{k}=\frac{1}{\pi i}\int_{L_1}e^{i\beta(kz+\frac{\bar z}{k})}\Big[\int_0^\infty n(x)\sin\beta\cdot(k+\frac{1}{k})x dx+\beta(k+\frac{1}{k})\int_0^\infty d(y)\mathrm{sh}\beta(k-\frac{1}{k})y dy\Big]\frac{dk}{k}$$

参考文献：

[1] FOKAS A S. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs[J]. Proc Roy Soc London, Ser A, 1997, 453:1411－1443.

[2] FOKAS A S. Lax pairs and a new spectral method for linear and integrable nonlinear PDEs[J]. Selecta Mathematica, New ser, 1998, 4: 31－68.

[3] FOKAS A S. A unified approach to boundary value problems[M]. Philadelphia: SIAM, 2008.

[4] DASSIOS G, FOKAS A S. Methods for solving elliptic PDEs in spherical coordinates[J]. SIAM J Appl Math, 2008, 68: 1080－1096.

[5] FOKAS A S, FLYER N, SMITHEMAN S A, et al. A semi-analytical numerical method for solving evolution and elliptic partial differential equations[J]. J Comp Appl Math, 2009, 227: 59－74.

[6] FLYER N, FOKAS A S. A hybrid analytical-numerical method for solving evolution partial differential equations, I: The half-line[J]. Proc R Soc London, Ser A, 2008, 464: 1823－1849.

[7] FOKAS A S, SCHULTZ P F. The long-time asymptotics of moving boundary problems using an Ehrenpreis-type representation and its Riemann-Hilbert nonlinearisation [J]. Comm Pure Appl Math, 2002, LVI :1－40.

[8] 李松华. 小波在 Helmholtz 方程和采样中的应用[D]. 广州:中山大学数学与计算科学学院, 2006.

[9] 张伯坚. 浅海硬障碍物声波的反散射问题[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2000,39(4):35－39.

[10] SPENCE E A. Boundary value problems for linear elliptic PDEs[D]. University of Cambridge, 2008.

[11] LU C K. Boundary value problems for analytic functions [M]. World Scientific, Singapore, 1993.