

6类图完美匹配的数目*

唐保祥¹, 任韩²

(1. 天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001;

2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)

摘要: 图的完美匹配计数问题是匹配理论研究中的一个重要课题, 此问题有很强的物理学和化学背景, 历来引起众多数学家, 物理学家和化学家的广泛关注。但是, 一般图的完美匹配计数问题却是 NP -难的。用划分, 求和, 再递推的方法给出了6类特殊图完美匹配数目的计算公式。作为应用, 计算出了一类棋盘 1×2 的多米诺覆盖的数目。

关键词: 线性递推式; 棋盘; 完美匹配

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2012) 02-0040-05

The Number of Perfect Matchings in Six Types of Graphs

TANG Baoxiang¹, REN Han²

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;

2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: It is an interesting and important problem to count the number of the perfect matchings in graphs, which origin from both physics and chemistry. So far, many mathematicians, physicists and chemists gave most of their attention to counting perfect matchings of graphs. But the problem of counting the number of the perfect matchings for general graphs is NP -difficult. By applying differentiation, summation and re-recursion calculation, the several counting formulas of the perfect matching for six specific types of graphs are given. As an application, the number of one type chessboard of the 1×2 dominoes covering is calculated.

Key words: linear recurrence relation; chessboard; perfect matching

本文所指的图均是有限简单无向标号图 (即顶点间是有区别的), 未给出的定义见文献^[1]。

图的完美匹配计数是匹配理论的一个重要方面, 它既与组合论中棋盘的多米诺覆盖问题有关, 又与统计晶体物理中的 dimmer 问题有关^[2-3]。此问题有很强的物理学和化学背景。目前, 已有一些文献对图的完美匹配作了相关的研究, 给出了一些图完美匹配的计数方法^[4-13]。遗憾的是, Valiant 在 1979 年证明了, 图 (即使是偶图) 的完美匹配计数是 NP -难的问题。因此, 计算出一般图的完

美匹配数是困难的, 特别是要得到显式的计算公式是更加困难, 只有对具有特殊结构或形状的部分图, 才可以给出其完美匹配数的显式计算表达式。本文用划分, 求和, 再递推的方法给出了6类图完美匹配数的显式表达式, 所给方法, 适合于整体是“条形”的, 相同结构重复出现的很多图类完美匹配数目的求解。

1 基本概念

定义 1 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有

* 收稿日期: 2011-04-12

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10671073); 上海市自然科学基金资助项目 (07XD14011); 上海市重点学科建设基金资助项目 (B407)

作者简介: 唐保祥 (1961 年生), 男, 副教授; E-mail: tbx0618@sina.com

一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同完美匹配。

定义 2 设 G 是 2 连通平面图, 其每个内部面都是边长为 1 的单位正方形, 所有的正方形构成一个 $m \times n$ 的矩形, 其中 m 和 n 是正整数, 则称 G 为 $m \times n$ 的棋盘。本文将 $m \times n$ 的棋盘记为 $Q_{m \times n}$ 。

设 $Q_{m \times n}$ 表示一个 $m \times n$ 的棋盘, 其中 $V(Q_{m \times n}) = \{u_{ij} \mid 1 \leq i \leq m + 1, 1 \leq j \leq n + 1\}$, $E(Q_{m \times n}) = \{u_{ij}u_{kl} \mid i = k \text{ 且 } l = j + 1, \text{ 或 } j = l \text{ 且 } k = i + 1, 1 \leq i, k \leq m + 1, 1 \leq j, l \leq n + 1\}$ 。易知 $m \times n$ 的棋盘 $Q_{m \times n}$ 有完美匹配的充要条件是 m 和 n 中至少有一个是奇数。

2 结果及其证明

定理 1 设图 $G_i (i = 1, 2, \dots, 2n)$ 是一个 6 面体, $V(G_i) = \{v_{i1}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, v_{i2}\}$, $E(G_i) = \{u_{i1}u_{i2}, u_{i2}u_{i3}, u_{i3}u_{i1}, v_{i1}u_{i1}, v_{i1}u_{i2}, v_{i1}u_{i3}, v_{i2}u_{i1}, v_{i2}u_{i2}, v_{i2}u_{i3}\}$, 分别连结 G_j 与 G_{j+1} 的两个顶点 u_{j1} 与 $u_{j+1,1}, u_{j2}$ 与 $u_{j+1,3} (j = 1, 2, \dots, 2n - 1)$ 所得的图记为 $2 - 2nV_6$, 如图 1 所示。 $\sigma(n) (n \geq 1)$ 表示 $2 - 2nV_6$ 的所有不同的完美匹配数, 则 $\sigma(n) = 8^n$ 。

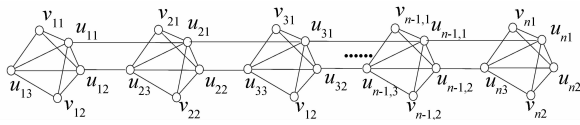


图 1 $2 - 2nV_6$ 图

Fig. 1 Figure of $2 - 2nV_6$

证明 显然图 $2 - 2nV_6$ 有完美匹配。设图 $2 - 2nV_6$ 的完美匹配集合为 M , 图 $2 - 2nV_6$ 含边 $v_{11}u_{11}, v_{11}u_{12}, v_{11}u_{13}$ 的完美匹配集合分别为 M_1, M_2, M_3 。则 $M_i \subseteq M, M_i \neq \emptyset (i = 1, 2, 3)$, 且 $M_i \cap M_j = \emptyset (i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3)$, 因此 $\sigma(n) = |M| = \sum_{i=1}^3 |M_i|$ 。

求 $|M_1|$ 因为 $v_{11}u_{11} \in M_1$, 所以必有 $u_{13}v_{12}, u_{12}u_{23} \in M_1$ 。此时, 若 $u_{21}v_{22} \in M_1$, 必有 $v_{21}u_{22} \in M_1$, M_1 中这类完美匹配的数目是 $\sigma(n - 1)$; 若 $u_{21}v_{22} \notin M_1$, 必有 $v_{22}u_{22}, v_{21}u_{21} \in M_1$, M_1 中这类完美匹配的数目也是 $\sigma(n - 1)$ 。因此, $|M_1| = 2\sigma(n - 1)$ 。类似地可以求得 $|M_2| = 2\sigma(n - 1)$ 。

求 $|M_3|$ 因为 $v_{11}u_{13} \in M_3$, 所以必有 $u_{11}v_{12} \in M_3$, 或 $u_{12}v_{12} \in M_3$ 。

情形 1 $u_{11}v_{12} \in M_3$

因为 $u_{11}v_{12} \in M_3$, 所以必有 $u_{12}u_{23} \in M_3$ 。此时,

若 $u_{21}v_{22} \in M_3$, 必有 $v_{21}u_{22} \in M_3$, M_3 中这类完美匹配的数目是 $\sigma(n - 1)$; 若 $u_{21}v_{22} \notin M_3$, 必有 $v_{22}u_{22}, v_{21}u_{21} \in M_3$, M_3 中这类完美匹配的数目也是 $\sigma(n - 1)$ 。

情形 2 $u_{12}v_{12} \in M_3$

因为 $u_{12}v_{12} \in M_3$, 所以必有 $u_{11}u_{21} \in M_3$ 。此时, 若 $v_{21}u_{22} \in M_3$, 必有 $u_{23}v_{22} \in M_3$, M_3 中这类完美匹配的数目是 $\sigma(n - 1)$; 若 $v_{21}u_{22} \notin M_3$, 必有 $v_{21}u_{23}, v_{22}u_{22} \in M_3$, M_3 中这类完美匹配的数目也是 $\sigma(n - 1)$ 。由情形 1 和 2 知, $|M_3| = 4\sigma(n - 1)$ 。

综上所述, 图 $2 - 2nV_6$ 的所有不同完美匹配的数目为 $\sigma(n) = 8\sigma(n - 1)$ 。易知 $\sigma(1) = 8$, 故 $\sigma(n) = 8^n$ 。证毕。

定理 2 设图 $Z_i^3 (i = 1, 2, \dots, n)$ 是一个三棱柱, $V(Z_i^3) = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}\}$, $E(Z_i^3) = \{v_{i1}v_{i2}, v_{i2}v_{i3}, v_{i3}v_{i1}, v_{i1}u_{i1}, v_{i2}u_{i2}, v_{i3}u_{i3}, u_{i1}u_{i2}, u_{i2}u_{i3}, u_{i3}u_{i1}\}$, 分别连结 Z_j^3 与 Z_{j+1}^3 的两个顶点 u_{j1} 与 $u_{j+1,1}, u_{j2}$ 与 $u_{j+1,3} (j = 1, 2, \dots, n - 1)$ 所得的图记为 $2 - nZ_3$, 如图 2 所示。 $\tau(n) (n \geq 1)$ 表示图 $2 - nZ_3$ 的所有不同的完美匹配数, 则

$$\tau(n) = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{10} \cdot (2 + \sqrt{5})^n + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{10} \cdot (2 - \sqrt{5})^n$$

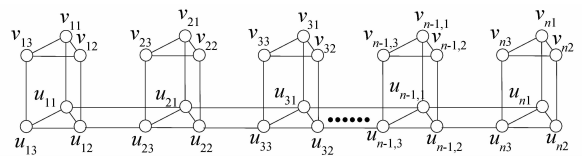


图 2 $2 - nZ_3$ 图

Fig. 2 Figure of $2 - nZ_3$

证明 易知图 $2 - nZ_3$ 有完美匹配。设图 $2 - nZ_3$ 的所有完美匹配的集合为 M , 图 $2 - nZ_3$ 的含边 $v_{13}u_{13}, v_{13}v_{11}, v_{13}v_{12}$ 的完美匹配集合分别为 M_1, M_2, M_3 。则 $M_i \subseteq M, M_i \neq \emptyset, i = 1, 2, 3$, 且 $M_i \cap M_j = \emptyset (i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3), M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$ 。

于是 $\tau(n) = |M| = \sum_{i=1}^3 |M_i|$ 。

求 $|M_1|$

情形 1 $v_{13}u_{13}, v_{11}u_{11}, v_{12}u_{12} \in M_1$

M_1 中这类的完美匹配数为 $\tau(n - 1)$ 。

情形 2 $v_{13}u_{13}, v_{11}v_{12}, u_{11}u_{12} \in M_1$

M_1 中这类的完美匹配数为 $\tau(n - 1)$ 。

情形 3 $v_{13}u_{13}, v_{11}v_{12}, u_{11}u_{21}, u_{12}u_{23}, v_{21}v_{23}, v_{22}u_{22} \in M_1$

M_1 中这类的完美匹配数为 $\tau(n - 2)$ 。因此,

$$|M_1| = 2\tau(n-1) + \tau(n-2).$$

求 $|M_2|$ 因为 $v_{13}v_{11} \in M_2$, 所以必有 $u_{13}u_{11}$, $v_{12}u_{12} \in M_2$ 。因此, $|M_2| = \tau(n-1)$ 。

求 $|M_3|$ 因为 $v_{13}v_{12} \in M_3$, 所以必有 $u_{13}u_{12}$, $v_{11}u_{11} \in M_3$ 。因此, $|M_3| = \tau(n-1)$ 。

综上所述,

$$\tau(n) = 4\tau(n-1) + \tau(n-2) \quad (1)$$

易知 $\tau(1) = 4, \tau(2) = 17$ 。解线性递推式 (1), 得

$$\tau(n) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10} \cdot (2+\sqrt{5})^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{10} \cdot (2-\sqrt{5})^n$$

证毕。

定理 3 设图 $B_i (i=1, 2, \dots, n)$ 是一个正八面体 $V(B_i) = \{v_{i1}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, v_{i2}\}$, $E(B_i) = \{v_{i1}u_{i1}, v_{i1}u_{i2}, v_{i1}u_{i3}, v_{i1}u_{i4}, u_{i1}u_{i2}, u_{i2}u_{i3}, u_{i3}u_{i4}, u_{i4}u_{i1}, v_{i2}u_{i1}, v_{i2}u_{i2}, v_{i2}u_{i3}, v_{i2}u_{i4}\}$, 分别连结 B_j 与 B_{j+1} 的两个顶点 u_{j1} 与 $u_{j+1,4}$, u_{j2} 与 $u_{j+1,3} (j=1, 2, \dots, n-1)$ 所得的图记为 $2-nV_8$, 如图 3 所示。 $\varphi(n) (n \geq 1)$ 表示图 $2-nV_8$ 的所有不同的完美匹配数, 则

$$\varphi(n) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10} \cdot (4+2\sqrt{5})^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{10} \cdot (4-2\sqrt{5})^n$$

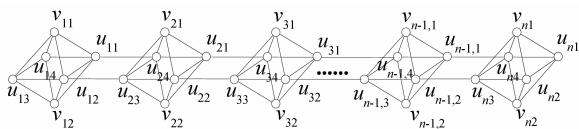


图 3 $2-nV_8$ 图

Fig. 3 Figure of $2-nV_8$

证明 易知图 $2-nV_8$ 有完美匹配。设图 $2-nV_8$ 的所有完美匹配的集合为 M , 图 $2-nV_8$ 的含边 $v_{11}u_{11}, v_{11}u_{12}, v_{11}u_{13}, v_{11}u_{14}$ 的完美匹配集合分别为 M_1, M_2, M_3, M_4 。则 $M_i \subseteq M, M_i \neq \emptyset, i=1, 2, 3, 4$, 且 $M_i \cap M_j = \emptyset (i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4)$ 。于是 $\varphi(n) =$

$$|M| = \sum_{i=1}^4 |M_i|。$$

类似定理 3 的方法, 可以求得 $|M_1| = |M_4| = 2\varphi(n-1) + 2\varphi(n-2), |M_2| = |M_3| = 2\varphi(n-1)$ 。所以,

$$\varphi(n) = 8\varphi(n-1) + 4\varphi(n-2) \quad (2)$$

易知 $\varphi(1) = 8, \varphi(2) = 68$ 。解线性递推式 (2), 得

$$\varphi(n) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10} \cdot (4+2\sqrt{5})^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{10} \cdot (4-2\sqrt{5})^n$$

证毕。

定理 4 设图 Z_i^4 是一个四棱柱, $V(Z_i^4) = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i3}, v_{i4}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}\}$, $E(Z_i^4) = \{v_{i1}v_{i2}, v_{i2}v_{i3}, v_{i3}v_{i4}, v_{i4}v_{i1}, v_{i1}u_{i1}, v_{i2}u_{i2}, v_{i3}u_{i3}, v_{i4}u_{i4}, u_{i1}u_{i2}, u_{i2}u_{i3}, u_{i3}u_{i4},$

$u_{i4}u_{i1}\}$, 分别连结 Z_j^4 与 Z_{j+1}^4 的两个顶点 u_{j2} 与 $u_{j+1,1}$, u_{j3} 与 $u_{j+1,4} (j=1, 2, \dots, n-1)$ 所得的图记为 $2-nZ_4$, 如图 2 所示。 $f(n) (n \geq 1)$ 表示图 $2-nZ_4$ 所有不同的完美匹配数, 则

$$f(n) = \frac{8}{7} \cdot 9^n - \frac{9}{14} \cdot 2^n$$

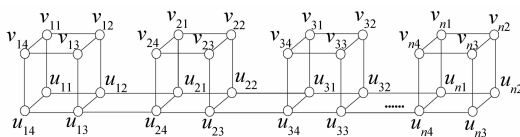


图 4 $2-nZ_4$ 图

Fig. 4 Figure of $2-nZ_4$

证明 易知图 $2-nZ_4$ 和图 G (如图 5 所示) 均有完美匹配。设图 G 所有不同的完美匹配的数目为 $g(n)$ 。

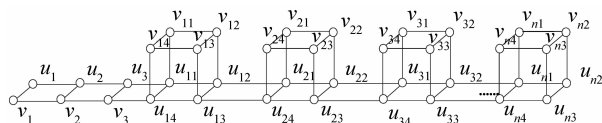


图 5 G 图

Fig. 5 Figure of G

容易得到 $f(1) = 9, f(2) = 90, f(n) = 9f(n-1) + 3g(n-2), g(n) = 3f(n) + 2g(n-1)$ 。所以

$$g(n) = 3 \sum_{i=2}^n 2^{n-i} f(i) + 2^{n-1} g(1) \quad (3)$$

设图 $2-nZ_4$ 的所有完美匹配的集合为 M , 则 M 中不存在仅含边 $u_{12}u_{21}$ 且不含边 $u_{13}u_{24}$ 的完美匹配, 也不存在仅含边 $u_{13}u_{24}$ 且不含边 $u_{12}u_{21}$ 的完美匹配。由于 $f(1) = 9$, 图 $2-nZ_4$ 不含边 $u_{12}u_{21}, u_{13}u_{24}$ 的完美匹配数为 $9f(n-1)$; 图 $2-nZ_4$ 含边 $u_{12}u_{21}, u_{13}u_{24}$ 的完美匹配数为 $3g(n-2)$ 。由 (3) 式, 得

$$3g(n-2) = 9 \sum_{i=2}^{n-2} 2^{n-2-i} f(i) + 3 \cdot 2^{n-3} g(1) \quad (4)$$

故

$$f(n) = 9f(n-1) + 9 \sum_{i=2}^{n-2} 2^{n-2-i} f(i) + 3 \cdot 2^{n-3} g(1) \quad (5)$$

从而

$$f(n-1) = 9f(n-2) + 9 \sum_{i=2}^{n-3} 2^{n-3-i} f(i) + 3 \cdot 2^{n-4} g(1) \quad (6)$$

由 (5) - 2 · (6) 式, 得

$$f(n) = 11f(n - 1) - 18f(n - 2) \quad (7)$$

解线性递推式 (7), 得 $f(n) = \frac{8}{7} \cdot 9^n - \frac{9}{14} \cdot 2^n$. 证毕.

定理 5 设图 G_i ($i = 1, 2, \dots, 2n$) 是一个 6 面体, $V(G_i) = \{v_{i1}, u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, v_{i2}\}$, $E(G_i) = \{u_{i1}u_{i2}, u_{i2}u_{i3}, u_{i3}u_{i1}, v_{i1}u_{i1}, v_{i1}u_{i2}, v_{i1}u_{i3}, v_{i2}u_{i1}, v_{i2}u_{i2}, v_{i2}u_{i3}\}$, 分别连结 G_j 与 G_{j+1} 的两个顶点 v_{j2} 与 $v_{j+1,1}$ ($j = 1, 2, \dots, 2n - 1$) 所得的图记为 $1 - 2nV_6$, 如图 6 所示. $\theta(n)$ ($n \geq 1$) 表示图 $1 - 2nV_6$ 的所有不同的完美匹配数, 则 $\theta(n) = 9^n$.

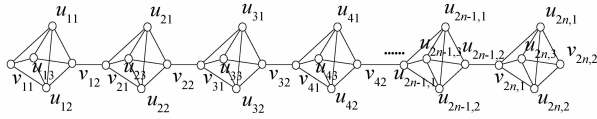


图 6 $1 - 2nV_6$ 图

Fig. 6 Figure of $1 - 2nV_6$

证明 容易得到 $\theta(1) = 9$, $\theta(n) = 9 \cdot \theta(n - 1)$ 故 $\theta(n) = 9^n$. 证毕.

定理 6 设 $q(n)$ 表示 $2 \times (2n - 1)$ 的棋盘 $Q_{2 \times (2n-1)}$ (如图 7 所示) 的所有不同的完美匹配数, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$. 则 $q(n) = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot (2 - \sqrt{3})^n$.

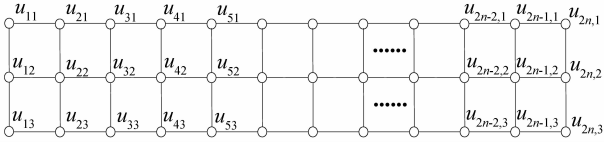


图 7 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 图

Fig. 7 Figure of $Q_{2 \times (2n-1)}$

证明 设 $Q_{2 \times n}$ 的所有完美匹配的集合为 M , $M_i \subseteq M$, $i = 1, 2, 3$, 其中 $u_{11}u_{12} \in M_1$, $u_{12}u_{13} \in M_2$, $u_{12}u_{22} \in M_3$. 显然有 $M_i \neq \phi$ ($i = 1, 2, 3$), 且 $M_i \cap M_j = \phi$, $i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$, $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$. 于是 $q(n) = |M| = \sum_{i=1}^3 |M_i|$. 由 $q(n)$ 的定义容易知道, $q(1) = 3, q(2) = 11$.

求 $|M_1|$

情形 (1) $u_{11}u_{12}, u_{21}u_{22}, u_{13}u_{23} \in M_1$, 且 $u_{21}u_{31}, u_{22}u_{32}, u_{23}u_{33} \notin M_1$, 如图 8 所示. 由 $q(n)$ 的定义知, M_1 中这类完美匹配恰有 $q(n - 1)$ 个.

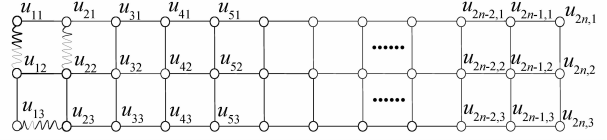


图 8 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 图

Fig. 8 Figure of $Q_{2 \times (2n-1)}$

情形 (2) $u_{11}u_{12}, u_{13}u_{23}, u_{21}u_{31}, u_{22}u_{32}, u_{33}u_{43}, u_{41}u_{42} \in M_1$ 且 $u_{41}u_{51}, u_{42}u_{52}, u_{43}u_{53} \notin M_1$, 如图 9 所示. M_1 中这类完美匹配恰有 $q(n - 2)$ 个.

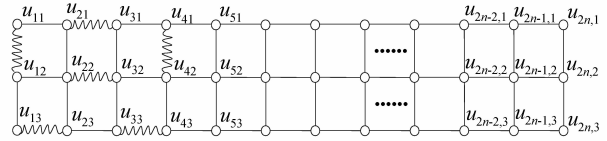


图 9 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 图

Fig. 9 Figure of $Q_{2 \times (2n-1)}$

.....

情形 (n - 1) $u_{11}u_{12}, u_{13}u_{23}, \dots, u_{2n-3,3}u_{2n-2,3}, u_{2n-2,1}u_{2n-2,2} \in M_1$, 且 $u_{2n-2,1}u_{2n-1,1}, u_{2n-2,2}u_{2n-1,2}, u_{2n-2,3}u_{2n-1,3} \notin M_1$, 如图 10 所示. M_1 中这类完美匹配恰有 $q(1)$ 个.

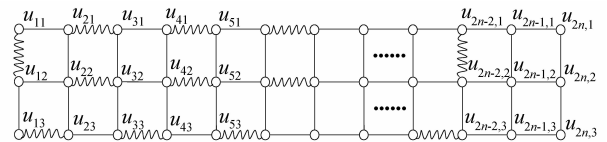


图 10 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 图

Fig. 10 Figure of $Q_{2 \times (2n-1)}$

综上所述 $|M_1| = \sum_{i=1}^{n-1} q(i) + 1$. 同理可得 $|M_2| =$

$$\sum_{i=1}^{n-1} q(i) + 1.$$

求 $|M_3|$ 如图 11 所示, 因为 $u_{12}u_{22} \in M_3$, 所以必有 $u_{11}u_{21}, u_{12}u_{22}, u_{13}u_{23} \in M_3$. 因此, $|M_3| = q(n - 1)$.

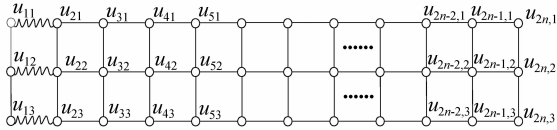


图 11 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 图

Fig. 11 Figure of $Q_{2 \times (2n-1)}$

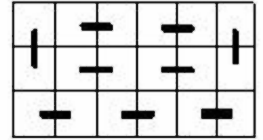
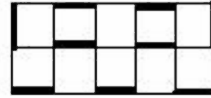


图 12 $Q_{2 \times 5}$ 和 $Q_{3 \times 6}$ 图

Fig. 12 Figure of $Q_{2 \times 5}$ and $Q_{3 \times 6}$

所以

$$q(n) = |M| = 2|M_1| + |M_3| = 3q(n-1) + 2 \sum_{i=1}^{n-2} q(i) + 2 \quad (8)$$

由 (8) 式有

$$q(n-1) = 3q(n-2) + 2 \sum_{i=1}^{n-3} q(i) + 2 \quad (9)$$

再由 (8)-(9) 式得

$$q(n) = 4q(n-1) - q(n-2) \quad (10)$$

其中 $n \geq 3, q(1) = 3, q(2) = 11$ 。解线性递推式 (10), 得

$$q(n) = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot (2 - \sqrt{3})^n$$

证毕。

由定理 6, 可以直接得到如下推论。

推论 1 对任意正整数 n , 用 $d(n)$ 表示 $3 \times 2n$ 棋盘 $Q_{3 \times 2n}$ 的 1×2 多米诺覆盖数目。则

$$d(n) = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot (2 - \sqrt{3})^n$$

证明 因为 $3 \times 2n$ 棋盘 $Q_{3 \times 2n}$ 的每一个 1×2 多米诺覆盖, 都唯一对应 $2 \times (2n-1)$ 棋盘 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 的一个完美匹配; 反过来, 对 $2 \times (2n-1)$ 棋盘 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 的任一个完美匹配, 都唯一对应 $3 \times 2n$ 棋盘 $Q_{3 \times 2n}$ 的一个 1×2 多米诺覆盖。所以 $3 \times 2n$ 棋盘 $Q_{3 \times 2n}$ 的 1×2 多米诺覆盖的集合与 $2 \times (2n-1)$ 棋盘 $Q_{2 \times (2n-1)}$ 的完美匹配的集合之间是 1-1 对应的。所以 $d(n) = q(n)$, 故

$$d(n) = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \cdot (2 + \sqrt{3})^n + \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \cdot (2 - \sqrt{3})^n$$

证毕。

例 1 2×5 棋盘 $Q_{2 \times 5}$ 的一个完美匹配与 3×6 棋盘 $Q_{3 \times 6}$ 的一个 1×2 多米诺覆盖之间的关系如图 12 所示。

参考文献:

- [1] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications [M]. New York : Macmillan Ltd Press, 1976.
- [2] KASTELEYN P W. The number of dimmer on a quadratic lattice [J]. Physica, 1961, 27:1209 - 1225.
- [3] KASTELEYN P W. Dimmer statistics and phase transition [J]. Math Phys, 1963, 4:287 - 293.
- [4] BRIGHTWELL G R, WINKLER P, HARD C, et al. Adventures at the interface of combinatorics and statistical physics [J]. ICM, 2002, III: 605 - 624.
- [5] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching theory [M]. New York: North-Holland Press, 1986.
- [6] ZHANG H P. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes [J]. Discrete Mathematics, 1996, 158(1/3): 257 - 272.
- [7] ZHANG H P, ZHANG F J. Perfect matchings of polyomino graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 1997, 13: 259 - 304.
- [8] 张莲珠. 渺位四角系统完美匹配数的计算[J]. 厦门大学学报:自然科学版, 1998, 37(5): 629 - 633.
- [9] 张莲珠. 两类四角系统的匹配数与点独立集数[J]. 数学研究, 1999, 32(3): 97 - 102.
- [10] 林泓, 林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算 [J]. 福州大学学报:自然科学版, 2005, 33 (6): 704 - 710.
- [11] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154: 145 - 157.
- [12] 于青林, 刘桂真. 图的因子和匹配可扩性[M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [13] 唐保祥, 任韩. 几类图完美匹配的数目[J]. 南京师范大学学报:自然科学版, 2010, 33 (3): 1 - 6.