第 51 卷　第 4 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 51　No. 4
2012 年　7 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Jul.　2012

Blow-up 流形的 Gromov-Witten 不变量的一个为零定理*

戚晓霞
（中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：利用 GW－不变量在 blow-up 手术下的退化公式，证明了在一定条件下，任意辛流形的 blow-up 流形的任意亏格的 GW－不变量的为零定理，推广了 Gathmann 的已有结果。

关键词：辛切割；blow-up；退化公式；GW－不变量；相对 GW－不变量
中图分类号：O189.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）04－0028－04

A Vanishing Theorem for Gromov-Witten Invariants of Blow-up Manifolds

QI Xiaoxia
（School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China）

Abstract：A vanishing theorem of genus g GW-invariants of blow-ups of arbitrary symplectic manifolds is proved with utilizing the degeneration formula of GW-invariants.

Key words：symplectic cut；blow-up；degeneration formula；GW-invariant；relative GW-invariant

自上世纪 90 年代初阮勇斌[1]在辛流形上定义了一种新的不变量以来，（现在被称作 Gromov-Witten 不变量，简称 GW－不变量），GW－不变量的严格的数学理论基础研究被广泛关注并取得了丰硕成果。阮勇斌等[2]首先关于半正的辛流形建立了 GW－不变量和量子上同调的严格的数学理论，随后经过多个团队的努力，在一般辛流形或代数簇上建立了 GW－不变量理论[3-7]。目前该理论主要的研究方面有：GW－不变量的计算，GW 理论的一般性结构的研究，以及理论的应用等。其中许多亏格 0 的 GW－不变量已经有了一些有效的算法，如齐性空间的 GW－不变量。但是对于一般辛流形的 GW－不变量，特别是高亏格的情形，不变量的计算还是相当困难的事情。并且单纯地计算不变量并不意味着对流形本身的理解就有很大的帮助，因而对一般性结构的研究便尤为重要，其中一个重要的方面就是研究 GW－不变量在辛切割下的变化。Lerman[8]最早引入了辛切割的概念，并将 blow-up 理解为辛切割。在 blow-up 手术下 GW－不变量的变化的研究目前已取得了一些成果。胡建勋[9]证明了在没有例外类的情形下，亏格 0 或 1 的辛流形 X 的 GW－不变量和 $\tilde{X}$ 的 GW－不变量相等。对于光滑射影簇 X，当已知 X 的 GW－不变量时，Gathmann[10]给出了其 blow-up 流形 $\tilde{X}$ 的亏格 0 的不变量的一个具体的计算方法，并基于该算法证明了当“没有足够多的” 例外类时，$\tilde{X}$ 的某一类亏格 0 的 GW－不变量为零。本文中我们考虑在一点做 blow-up 手术的情形下，将 Gathmann 的上述结果推广到一般辛流形的非负亏格的 GW－不变量。

1　Gromov-Witten 不变量及其退化公式

1.1　GW－不变量

假设 (X,ω) 是一个 $2n$ 维的紧致辛流形，J 是 ω－相容的近复结构。用 $M_{g,k}(X,A;J)$ 表示亏格为 g，带 k 个标记点，且代表同调类 $A \in H_2(X)$ 的 J－全纯映射的模空间。这个空间通常是非紧的，其

* **收稿日期**：2011－09－08
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10825105）
作者简介：戚晓霞（1980 年生），女，博士生；E-mail：qixiaox@ mail2. sysu. edu. cn

紧化的模空间由所有亏格 g 的 J −全纯稳定映射构成，记作 $\overline{M}_{g,k}(X,A;J)$ 。在这个模空间上有赋值映射：

$$ev_i:\overline{M}_{g,k}(X,A;J)\longrightarrow X$$
$$[u,\Sigma,z_1,\cdots,z_k]\mapsto u(z_i),i=1,\cdots,k$$

$\overline{M}_{g,k}(X,A;J)$ 有虚拟基本类 $[\overline{M}_{g,k}(X,A;J)]^{vir}$ ，其期望（复）维数为

$$c_1(A)+(n-3)(1-g)+k \qquad (1)$$

其中 c_1 是 X 的第一陈类。

给定 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in H^*(X)$，定义 GW−不变量为

$$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_k\rangle_{g,A}^{X}:=\int_{[\overline{M}_{g,k}(X,A;J)]^{vir}}\prod_{i=1}^{k}ev_i^*(\alpha_i)$$

其中 $\{\alpha_i\}$ 应满足维数条件：$\sum\deg\alpha_i=2c_1(A)+2(n-3)(1-g)+2k$，否则定义不变量为0。

1.2　相对 GW−不变量

设 $D\subset X$ 为 X 中一个光滑除子，即一个余维−2 的辛子流形，且 D 是 J −全纯的，即 $J(TD)\subset TD$ 。给定 $A\in H_2(X)$ 满足 $A\cdot D\geqslant 0$ ，则相对 J−全纯曲线的模空间为

$$M_{g,A,k,\mu}^{X,D}=\{[\Sigma,u,x_1,\cdots,x_k,y_1,\cdots,y_r]\mid$$
$$u_*[\Sigma]=A,\qquad \Sigma\mu_i=A\cdot D,$$
$$u^{-1}(D)=\Sigma\mu_iy_i,\quad \mu=(\mu_1,\cdots,\mu_r)\}$$

与 1.1 节中情形不同，其紧化的模空间（记作 $\overline{M}_{g,A,k,\mu}^{X,D}$ ），是由所有的目标空间为 $X\cup_D\underbrace{Y\cup\cdots\cup Y}_{m}(m\geqslant 0)$ 的相对稳定映射构成，其中 $Y=P_D(N_{D|X}^*\oplus O_D)$ 。这个紧化的模空间有虚拟基本类，记作 $[\overline{M}_{g,A,k,\mu}^{X,D}]^{vir}$ ，其期望（复）维数为

$$c_1(A)+(n-3)(1-g)+k+r-A\cdot D \quad (2)$$

给定 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k\in H^*(X),\beta_1,\cdots,\beta_r\in H^*(D)$，定义相对 GW−不变量为

$$<\alpha_1,\cdots,\alpha_k|\beta_1,\cdots,\beta_r>_{g,A,(\mu_1,\cdots,\mu_r)}^{X,D}:=$$
$$\frac{1}{|Aut(\mu)|}\int_{[\overline{M}_{g,A,k,\mu}^{X,D}]^{vir}}\prod_{i=1}^{k}ev_i^*(\alpha_i)\wedge\prod_{j=1}^{r}ev_j^{D*}(\beta_j)$$

其中 $Aut(\mu)$ 是划分 μ 的自同构群，ev_i ，ev_j^D 是自然的赋值映射。

1.3　辛切割及退化公式

假设 $X_0\subset X$ 是余维−0 的开子流形，带有一个由哈密顿函数 $H:X_0\to\mathbf{R}$ 生成的哈密顿 S^1 −作用，其中 0 是正则值。所谓辛切割[8]，粗略地讲，就是辛流形 (X,ω) 上的一种手术，首先沿着 $H^{-1}(0)$ 将 X“切”成两片，记作 $X^\pm$ ，其边界为 $\partial X^\pm=H^{-1}(0)$ ；然后，收缩 $H^{-1}(0)$ 上的 S^1 −轨道，得到闭子流形 $\bar{X}^\pm$ ，其中含有余维−2 的子流形 $Z^\pm=Z=H^{-1}(0)/S^1$。这两个子流形 $\bar{X}^\pm$ 有着自然的辛结构，记作 $\omega^\pm$ ，使得 $\omega^+|_Z=\omega^-|_Z$ 是从辛约化中诱导的辛结构。那么我们称这两个辛流形 $(\bar{X}^\pm,\omega^\pm)$ 为 X 沿 $H^{-1}(0)$ 的辛切割。进一步，我们有连续映射

$$\pi:X\longrightarrow\bar{X}^+\cup_Z\bar{X}^-$$

使得 $\pi|_{X\setminus H^{-1}(0)}=\mathrm{id}$ ，并且 $\pi|_{H^{-1}(0)}$ 是商映射 $H^{-1}(0)\to Z$ 。考虑

$$(\alpha^+,\alpha^-)\in(H^*(\bar{X}^+;\mathbf{R}),H^*(\bar{X}^-;\mathbf{R}))$$

使得 $\alpha^+|_Z=\alpha^-|_Z$ ，于是存在一个上同调类，记作 $\alpha^+\cup_Z\alpha^-\in H^*(\bar{X}^+\cup_Z\bar{X}^-)$ ，使得 $\alpha^+\cup_Z\alpha^-|_{\bar{X}^\pm}=\alpha^\pm$。对于辛形式 ω ，容易看出，$\omega=\pi^*(\omega^+\cup_Z\omega^-)$。

现在设 $\{\beta_i\}$ 是 $H^*(Z;\mathbf{R})$ 的一组自对偶基底，用 $\beta_i^\vee$ 表示 β_i 的对偶上同调类，即满足 $\int_Z\beta_i\wedge\beta_i^\vee=1$ 。假设所有的 α_i 都形如 $\alpha=\pi^*(\alpha^+\cup_Z\alpha^-)$ 。于是我们有退化公式：

命题 1[11-12]

$$\langle\alpha_1,\cdots,\alpha_k\rangle_{g,A}^{X}=\sum\langle\alpha_1^+,\cdots,\alpha_k^+|\beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_{l(\mu)}}\rangle_{g^+,A^+,\mu}^{\bar{X}^+,Z^+}\cdot$$
$$\Delta(T_\mu)\langle\alpha_1^-,\cdots,\alpha_k^-|\beta_{i_1}^\vee,\cdots,\beta_{i_{l(\mu)}}^\vee\rangle_{g^-,A^-,\mu}^{\bar{X}^-,Z^-} \quad (3)$$

其中求和对所有的 g , A 的分裂及所有的加权的划分 $\{\mu_i,\beta_i\}$ 进行，并且 $\Delta(T_\mu)=\prod_j\mu_j|Aut(\mu)|$ 。

将（3）中相应的模空间 $\overline{M}_{g,A,k}^{X}$ ，$\overline{M}_{g^+,A^+,k^+,\mu}^{\bar{X}^+,Z^+}$ ，$\overline{M}_{g^-,A^-,k^-,\mu}^{\bar{X}^-,Z^-}$ 分别简记为 M , M^+ , M^- 。我们有维数关系：

命题 2[11]

$$\dim_C M^++\dim_C M^-=\dim_C M+(n-1)l(\mu) \quad (4)$$

2　主要结果及其证明

设 (X,ω) 为任意辛流形，在一光滑点 x 处 blow up 得到流形 $\tilde{X}$, E 是其例外除子。称 $\alpha\in H^*(\tilde{X})$ 为非例外类，如果 α 是由 $H^*(X)$ 中的某上同调类通过投影映射 $p:\tilde{X}\to X$ 拉回得到的；称 $\alpha\in H^*(\tilde{X})$ 为例外类，如果 $\alpha\in H^*(E)$，且 $\deg\alpha>0$。由于 GW−不变量关于上同调类是线性的，因此为方便起见，我们不妨假设给定的上同调类要么是例外的，要么是非例外的。下面我们将证明当例外类没有足够多时，$\tilde{X}$ 的任意亏格的某种 GW−不变量均为零。

定理 1　设 $A\in H_2(X)$ ，$A\neq 0$ ，$e\in H_2(E)$ 为一线类使得 $e\cdot E=-1$ ，$\alpha_i\in H^*(\tilde{X})\ (1\leqslant i\leqslant m)$ 或者是例外的或者是非例外的。记 $W(\alpha)$ 为 α_i(i

$= 1,\cdots,m$）中所有例外类的阶数之和。则当 $0 < W(\alpha) \leqslant 2(r+1)(n-1) - 2(n-3)g$ 时，

$$<\alpha_1,\cdots,\alpha_m>^{\tilde{X}}_{g,p^!(A)+re} = 0$$

其中 $n \geqslant 3$，$r > 0$，$p^! = PD \circ P^* \circ PD$。

证明 首先对 $\tilde{X}$ 沿 $E = P^{n-1}$ 做辛切割，得到

$$\bar{\tilde{X}}^+ = P_E(O(-1) \oplus O), \bar{\tilde{X}}^- \cong \tilde{X}$$

不失一般性，假设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k(k > 0)$ 是例外类，而 $\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_m$ 的支集在 $\tilde{X} \setminus X_0$ 中，其中 X_0 是包含 E 的某个开集。进一步，不妨假设 $\alpha_i^- = 0$，$1 \leqslant i \leqslant k$，及 $\alpha_i^+ = 0$，$k+1 \leqslant i \leqslant m$。由退化公式（3）得

$$<\alpha_1,\cdots,\alpha_m>^{\tilde{X}}_{g,p^!(A)+re} =$$

$$\sum <\alpha_1^+,\cdots,\alpha_k^+ \mid \beta_{i_1},\cdots,\beta_{i_{l(\mu)}}>^{\bar{\tilde{X}}^+,E^+}_{g^+,(p^!(A)+re)^+,\mu} \cdot$$

$$\Delta(T_\mu) < \alpha_1^-,\cdots,\alpha_k^- \mid \beta_{i_1}^\vee,\cdots,\beta_{i_{l(\mu)}}^\vee >^{\bar{\tilde{X}}^-,E^-}_{g^-,(p^!(A)+re)^-,\mu} \tag{5}$$

其中 $\mu = (\mu_1,\cdots,\mu_{l(\mu)})$ 是 $E \cdot (p^!(A) + re)$ 的一个划分，$\{\beta_j\}$ 是 $H^*(E)$ 的任一组自对偶基底。这里 E^+ 应该被看作是 P^1 – 丛 $P_E(O(-1) \oplus O)$ 的无穷截面，而 $E^+ \cong E^- \cong E$。

设 $[u^+ : \Sigma^+ \to \bar{\tilde{X}}^+]$ 为相对模空间中的一个元素，$u_*{}^+([\Sigma^+]) = (p^!(A) + re)^+$。容易看出 $\bar{\tilde{X}}^+ = P_E(O(-1) \oplus O) \cong \tilde{P}^n$。事实上，一方面我们首先在点 x 处 blow up X（即做辛切割："切除" x 的一个管状邻域 N_ε，再收缩其边界 ∂N_ε 的 S^1 –轨道）得到 $\tilde{X}$，然后再沿 E 做辛切割手术（即"切除" E 的一个管状邻域 N_{ε_0}，再收缩其边界）得到 $\bar{\tilde{X}}^+$；另一方面，可以先沿 $\partial N_{\varepsilon_0}$ 做辛切割得到 $\bar{X}^+$，这里 $\bar{X}^+ \cong P^n$，然后再在 x 点处 blow up，得到 $\tilde{P}^n$。简单地讲，$\bar{\tilde{X}}^+$ 可以通过分别收缩 $N_{\varepsilon_0} - N_\varepsilon$（假设 $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$）的两个边界的 S^1 –作用得到。显然这不依赖于两次手术的顺序。由 Mori 锥原理知

$$(p^!(A) + re)^+ = aL + be, a \geqslant 0, b \geqslant 0$$

其中 L 是 $\tilde{P}^n$ 中一线类，使得 $L \cdot E = 1$。设 H 为 $P_E(O(-1) \oplus O)$ 的无穷截面（即 $H = E^+$），我们有 $L \cdot H = 1$。于是

$$\sum \mu_i = H \cdot (p^!(A) + re)^+ = a \tag{6}$$

因为 $E^+ \cdot (p^!(A) + re)^+ = -r$，于是

$$-r = E \cdot (p^!(A) + re)^+ = a - b \tag{7}$$

因此由（6）–（7）式得，$b = \sum \mu_i + r$，所以 $(p^!(A) + re)^+ = \sum \mu_i L + (\sum \mu_i + r)e$。

现在将模空间 $\overline{M}^{\bar{\tilde{X}}^+,E^+}_{g^+,(p^!(A)+re)^+,k,\mu}$，$\overline{M}^{\bar{\tilde{X}}^-,E^-}_{g^-,(p^!(A)+re)^-,m-k,\mu}$，及 $\overline{M}^{\tilde{X}}_{g,p^!(A)+re,m}$ 分别简记为 M^+，M^-，及 M。由维数公式（2）得

$$\dim_C M^+ = c_1^{\bar{\tilde{X}}^+}((p^!(A) + re)^+) + (n-3)(1-g^+) + k + l(\mu) - \sum \mu_i =$$

$$[(n+1)H - (n-1)E] \cdot [\sum \mu_i L + (\sum \mu_i + r)e] + (n-3)(1-g^+) + k + l(\mu) - \sum \mu_i =$$

$$n \sum \mu_i + (n-1)r + (n-3)(1-g^+) + k + l(\mu)$$

这里我们用到关系 $\bar{\tilde{X}}^+ \cong \tilde{P}^n$ 及 $c_1^{\tilde{X}} = c_1^X - (n-1)E$。由维数公式（1）得

$$\dim_C M = c_1^{\tilde{X}}(p^!(A) + re) + (n-3)(1-g) + m = c_1^X(A) + (n-1)r + (n-3)(1-g) + m$$

不妨假设

$$\frac{1}{2}\sum \deg\alpha_i = c_1^X(A) + (n-1)r + (n-3)(1-g) + m$$

如果 $0 < W(\alpha) \leqslant 2(r+1)(n-1) - 2(n-3)g$，且 $n \geqslant 3$，$r > 0$，那么

$$\sum \deg\alpha_i^- = \sum \deg\alpha_i - W(\alpha) \geqslant 2(c_1^X(A) + m - 2)$$

另一方面，由维数关系（4）得

$$\dim_C M^- = c_1^X(A) + m - k + (n-3)(g^+ - g) + (n-2)l(\mu) - n\sum \mu_i =$$

$$c_1^X(A) + m - k + (n-3)(g^+ - g) + n(l(\mu) - \sum \mu_i) - 2l(\mu) < c_1^X(A) + m - 2$$

由 GW –不变量的定义，（5）式右边每一项的第二个不变量都为零，因此（5）式为零。 □

注 1 我们同时证明了 $n = 2$ 的情况，即当 $W(\alpha)$ 满足 $0 < W(\alpha) \leqslant 2(r+1)$ 时不变量为零。

注 2 定理 1 是对文［10］（Proposition3.1）的推广，我们这里证明了对任意辛流形以及 $g \geqslant 0$ 的结果，并且当 $g = 0$ 时，扩展了 $W(\alpha)$ 的取值范围。

参考文献：

［1］ RUAN Y. Topological sigma model and Donaldson-type invariants in Gromov theory[J]. Duke Math J, 1996, 83 (2): 461 – 500.

［2］ RUAN Y, TIAN G. A mathematical theory of quantum cohomology[J]. J Diff Geom, 1995, 42(2): 259 – 367.

［3］ BEHREND K. Gromov-Witten invariants in algebraic geometry[J]. Invent Math, 1997, 127 (3): 601 – 617.

［4］ FUKAYA K, ONO K. Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant[J]. Topology, 1999, 38 (5): 933 – 1048.

［5］ LI J, TIAN G. Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of algebraic varieties[J]. J Amer Math Soc, 1998, 11 (1): 119 – 174.

（下转第 37 页）

证毕。

参考文献：

[1] HALL G G. A graphic model of a class of molecules [J]. Int J Math Edu Sci, 1973, 4: 233 – 240.

[2] PAULING L. The nature of chemical bond, Cornell [M]. Ithaca: Univ Press, 1939.

[3] CYVIN S J, GUTMAN I. Kekulé structures in Benzenoid hydrocarbons [M]. Berlin: Springer Press, 1988.

[4] KASTELEYN P W. Graph theory and crystal physics [M]// Harary F. Graph Theory and Theoretical Physics. London: Academic Press, 1967: 43 – 110.

[5] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching Theory [M]. New York: North – Holland Press, 1986.

[6] CIUCU M. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry [J]. J Combin Theory Ser A, 1997, 77:87 – 97.

[7] FISCHER I, LITTLE C H C. Even circuits of prescribed clockwise parity [J]. The Electronic Journal of Combinatorics, 2003, 10(1): R45.

[8] JOCKUSCH W. Perfect mathings and perfect squares [J]. J Combin Theory Ser A, 1994, 67: 100 – 115.

[9] KASTELEYN P W. Dimmer statistics and phase transition [J]. Math Phys, 1963, 4: 287 – 293.

[10] 于青林, 刘桂真. 图的因子和匹配可扩性 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[11] BRIGHTWELL G R, WINKLER P, HARD C, et al. Adventures at the interface of combinatorics and statistical physics [J]. ICM, 2002, III: 605 – 624.

[12] ZHANG H P. The connectivity of Z-transformation graphs of perfect matchings of polyominoes [J]. Discrete Mathematics, 1996, 158: 257 – 272.

[13] ZHANG H P, ZHANG F J. Perfect matchings of polyomino graphs [J]. Graphs and Combinatorics, 1997, 13: 259 – 304.

[14] 张莲珠. 渺位四角系统完美匹配数的计算[J]. 厦门大学学报:自然科学版, 1998, 37(5): 629 – 633.

[15] 林泓, 林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报: 自然科学版, 2005, 33(6): 704 – 710.

[16] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006, 154: 145 – 157.

[17] 唐保祥, 任韩. 几类图完美匹配的数目[J]. 南京师大学报:自然科学版, 2010, 33(3): 1 – 6.

[18] 唐保祥,李刚,任韩. 3 类图完美匹配的数目[J]. 浙江大学学报:理学版, 2011, 38(4): 16 – 19.

[19] 唐保祥,任韩. 2 类图完美匹配的数目[J]. 西南师范大学学报:自然科学版, 2011, 36(5): 16 – 21.

(上接第 30 页)

[6] LI J, TIAN G. Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of general symplectic manifolds [G]. Topics in Symplectic 4-manifolds (Irvine, CA, 1996), First Int Press Lect Ser, I, Int Press, Cambridge, MA, 1998: 47 – 84.

[7] RUAN Y. Virtual neighborhoods and pseudo-holomorphic curves[J]. Tr J Mathematics, 1999, 23: 161 – 231.

[8] LERMAN E. Symplectic cuts[J]. Math Res Lett, 1995, 2: 247 – 258.

[9] HU J. Gromov-Witten invariants of blowups along points and curves[J]. Math Z, 2000, 233: 709 – 739.

[10] GATHMANN A. Gromov-Witten invariants of blow-ups [J]. J Alg Geom, 2001, 10: 399 – 432. arXiv:math/9804043v2

[11] LI A, RUAN Y. Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi 3 – folds[J]. Invent Math, 2001, 145 (1): 151 – 218.

[12] HU J, LI T, RUAN Y. Birational cobordism invariance of uniruled symplectic manifolds [J]. Invent math, 2008, 172: 231 – 275.