第 50 卷 第 5 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 50 No. 5
2011 年 9 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Sep. 2011

修理工休假的温贮备可修系统的瞬时可用度分析*

张 静，岳德权，王丽花
（燕山大学理学院，河北 秦皇岛 066004）

摘 要：研究了 R 个修理工进行同步多重休假的带有多个温贮备部件的可修系统，同时考虑了故障部件可能止步的现象。文中利用 Markov 过程理论建立了系统状态概率的微分差分方程组，利用矩阵理论和 Laplace 变换反演的方法求解出了系统故障状态概率的精确表达式，从而得到了系统的瞬时可用度和稳态可用度的精确表达式。

关键词：止步；温贮备；同步多重休假；瞬时可用度
中图分类号：O226　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2011）05－0028－06

Instantaneous Availability Analysis of a repairable System with Warm Standbys and Repairmen under Vacations

ZHANG Jing, *YUE Dequan*, *WANG Lihua*
(College of Sciences, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China)

Abstract: A repairable system with warm standbys and R repairmen with multiple synchronous vacations is studied. At the same time, balking of fault units is also considered. The differential-difference equations of state probabilities are obtained by Markov process theory, and the exact expression of failure state probability is derived by using matrix theory and inverse of Laplace-transform. Then instantaneous availability and steady-state availability of the system is presented.

Key words: balking; warm standbys; multiple synchronous vacations; instantaneous availability

20 世纪 80 年代开始，很多学者开始研究带有温贮备部件的可修系统，详见文献［1－7］，其在实际生活中，特别是在生产制造系统、电力系统和工业系统等领域有广泛的应用。例如，在生产制造系统中，可以有效的防治因失效的部件得不到及时的修理而造成的资源浪费和生产效率的降低。Jain 等[6]研究了带有温贮备部件和一个修理工 N－策略休假的模型，利用 Laplace 变换反演的方法得到了系统可靠度和平均寿命的精确表达式，文中只考虑了矩阵的所有特征值全部互异的情况，有很大局限性；Wang 等[7]研究了带有止步和中途退出的带有温贮备的可修系统，利用 Markov 过程理论得到了系统可用度和首次故障前的平均时间的具体表达式，文中没有考虑修理工休假的情况。

本文对文献［6］中的方法进一步研究，考虑了矩阵有相同特征值的情况，进而研究了考虑止步现象的 R 个修理工进行同步多重休假的有多个温贮备部件的可修系统的瞬态结果，利用矩阵理论和 Laplace 变换反演的方法求解出了系统故障状态概率的精确表达式，从而得到了系统的瞬时可用度的精确表达式。

1 模型假定

本文研究了由 m 个同型工作部件、w 个同型温贮备部件和 R 个修理工组成可修系统。模型假定如下：

1）系统正常运行时有 m 个正在工作的部件。系统还可以退化模式工作：w 个温贮备部件全部故

* 收稿日期：2011－04－25
基金项目：国家自然科学基金资助项目（71071133）
作者简介：张静（1987 年生），女，硕士生；E-mail：zhangjing19870927@126.com

障，系统中有不少于 k 个但不多于 m 个部件工作时，系统工作。即当且仅当至少有 R 个部件失效时系统失效，$k=1,2,\cdots,m$。

2）一旦工作部件故障立即用完好的温贮备部件替换，故障部件立即送修，如果修理工正忙或是休假，故障部件需排队等待修理。工作部件和温贮备部件的寿命分别服从参数为 λ 和 α 的指数分布，$1-b$。

3）系统有 R 个修理工，修理时间均服从参数 μ 的指数分布。修理工一旦空闲进行同步多重休假，休假时间服从参数 $\theta(>0)$ 的指数分布。一个修理工同时只能修理一个部件，修理顺序服从先到先服务的原则。

4）当正在工作的部件少于 m 个时，故障部件一旦修理完成立即进行工作，即作为工作部件；否则，故障部件修理完成后作为温贮备部件贮备；温贮备部件一旦进入系统工作相当于工作部件。

5）故障部件以概率 $1-b$ 止步，以概率 $N(t)$ 进入系统等待修理。止步的故障部件进入系统的缓冲区，等到系统中的所有故障部件都修理完时，缓冲区中的部件按照到达的顺序依次被修理。

6）部件间的转换通过转换开关来实现，转换开关完全可靠，转换是瞬时的；所有随机变量均相互独立；故障部件均可修复如新；初始时刻所有部件均完好。

注：当 $P_{0i}(t)$ 时，系统是 m 个部件的并联系统；当 t 时，系统是 m 个部件的串联系统。

2　瞬时可用度的研究

2.1　微分差分方程组

假设 $N(t)$ 表示时刻 t 系统中故障部件的个数（包括正在被修理的部件）；$J(t)$ 表示时刻 t 修理工的状态，定义如下

$$J(t)=\begin{cases}0 & \text{修理工处于休假状态}\\ 1 & \text{修理工正忙}\end{cases}$$

则 $\{J(t),N(t),t\geqslant 0\}$ 是一个二维马尔科夫过程。过程的状态空间 $\Omega=\{(0,0)\}\cup\{(i,j):i=0,1;j=1,2,\cdots,L\}$，其中，工作状态空间 $W=\{(0,0),(0,1),\cdots,(0,L-1),(1,1),\cdots,(1,L-1)\}$；故障状态空间 $F=\{(0,L),(1,L)\}$。

定义系统的状态概率：

$P_{0i}(t)$ 表示时刻 t 修理工在休假，系统中有 i 个部件失效的概率，$i=0,1,\cdots,L$；

$P_{1i}(t)$ 表示时刻 t 修理工在修理，系统中有 i 个部件失效的概率，$i=1,\cdots,L$。

则由 Markov 过程理论得如下系统状态概率满足的微分差分方程组

$$P'_{00}(t)=-\lambda_0 bP_{00}(t)+\mu_1 P_{11}(t) \tag{1}$$

$$P'_{0n}(t)=-(\lambda_n b+\theta)P_{0n}(t)+\lambda_{n-1}bP_{0n-1}(t),\quad n=1,2,\cdots,L-1 \tag{2}$$

$$P'_{0L}(t)=-\theta P_{0L}(t)+\lambda_{L-1}bP_{0L-1}(t) \tag{3}$$

$$P'_{11}(t)=-(\lambda_1+\mu_1)P_{11}(t)+\theta P_{01}(t)+\mu_2 P_{12}(t) \tag{4}$$

$$P'_{1n}(t)=-(\lambda_n+\mu_n)P_{1n}(t)+\theta P_{0n}(t)+\mu_{n+1}P_{1n+1}(t)+\lambda_{n-1}P_{1n-1}(t),n=2,\cdots,R-1 \tag{5}$$

$$P'_{1n}(t)=-(\lambda_n b+\mu_n)P_{1n}(t)+\theta P_{0n}(t)+\mu_{n+1}P_{1n+1}(t)+\lambda_{n-1}bP_{1n-1}(t),\quad n=R+1,\cdots,L-1 \tag{6}$$

$$P'_{1R}(t)=-(\lambda_R b+\mu_R)P_{1R}(t)+\theta P_{0R}(t)+\mu_{R+1}P_{1R+1}(t)+\lambda_{R-1}P_{1R-1}(t) \tag{7}$$

$$P'_{1L}(t)=-\mu_L P_{1L}(t)+\theta P_{0L}(t)+\lambda_{L-1}bP_{1L-1}(t) \tag{8}$$

其中

$$\lambda_i=\begin{cases}m\lambda+(w-i)\alpha,\ i=0,1,\cdots,w\\ (m+w-i)\lambda,i=w+1,w+2,\cdots,L-1\ ;\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$$\mu_i=\begin{cases}i\mu,\ i=1,2,\cdots,R-1\\ R\mu,i=R,\cdots,L\end{cases}$$

2.2　微分差分方程组的求解

定义系统的状态概率向量 $P(t)=[P_{00}(t),P_{01}(t)\cdots,P_{0L}(t),P_{11}(t),\cdots,P_{1L}(t)]^{\mathrm{T}}$，对上述微分方程组求 Laplace 变换，将变换后的方程组写成矩阵形式

$$D(s)P^*(s)=P(0) \tag{9}$$

其中，$P^*(s)=[P_{00}{}^*(s),P_{01}{}^*(s),\cdots,P_{0L}{}^*(s),P_{11}^*(s),\cdots,P_{1L}{}^*(s)]^{\mathrm{T}}$ 是 $P(t)$ 的 Laplace 变换，$P(0)=[1,0,\cdots,0]^{\mathrm{T}}$ 是 $2L+1$ 阶列向量，$D(s)$ 有分块结构，

$$D(s)=\begin{bmatrix}A_1 & A_2\\ A_3 & A_4\end{bmatrix}$$

其中，A_2 是第一行第一列元素为 $-\mu_1$，其余元素全为 0 的 $(L+1)\times L$ 矩阵；

$$A_1=\begin{bmatrix}s+\lambda_0 b & & & & \\ -\lambda_0 b & d_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & -\lambda_{L-2}b & d_{L-1} & \\ & & & -\lambda_{L-1}b & d_L\end{bmatrix},$$

$$A_3=\begin{bmatrix}0&-\theta&0&\cdots&0\\0&0&-\theta&\cdots&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\0&0&\cdots&0&-\theta\end{bmatrix}$$

$$A_4=\begin{bmatrix}e_1&-\mu_2&&&&&&&\\-\lambda_1&e_2&-\mu_3&&&&&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&&&&&\\&&-\lambda_{R-2}&e_{R-1}&-\mu_R&&&&\\&&&-\lambda_{R-1}&e_R&-\mu_{R+1}&&&\\&&&&-\lambda_R b&e_{R+1}&-\mu_{R+2}&&\\&&&&&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&&&&&-\lambda_{L-2}b&e_{L-1}&-\mu_L\\&&&&&&&-\lambda_{L-1}b&s+\mu_L\end{bmatrix}$$

其中

$$d_i=\begin{cases}s+\lambda_i b+\theta,i=1,2,\cdots,L-1\\s+\theta,i=L\end{cases};$$

$$e_i=\begin{cases}s+\lambda_i+\mu_i,i=1,2,\cdots,R-1\\s+\lambda_R b+\mu_R,i=R\\s+\lambda_i b+\mu_i,i=R+1,\cdots,L-1\end{cases}$$

把用 $P(0)$ 代替 $D(s)$ 的第 $L+1$ 列、第 $2L+1$ 列所得到的矩阵分别记为 $D_1(s)$ 和 $D_2(s)$ 。

引理1[6] 令 D_{k+1} 表示 $k+1$ 阶的三对角矩阵，则其行列式为

$$|D_{k+1}|=d_{k+1k+1}|D_k|-d_{k+1k}d_{kk+1}|D_{k-1}|,\quad k=1,2,\cdots,n(n\geqslant 2)\qquad(10)$$

其中

$$D_{k+1}=\begin{bmatrix}d_{11}&d_{12}&&&\\d_{21}&d_{22}&d_{23}&&\\&\ddots&\ddots&\ddots&\\&&d_{kk-1}&d_{kk}&d_{kk+1}\\&&&d_{k+1k}&d_{k+1k+1}\end{bmatrix}$$

引理2

$$|D(s)|=\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)\qquad(11)$$

其中 $r_k,k=1,2,\cdots,i$ 是矩阵 $A=D(0)$ 的 i 个重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_i$ 的特征根，$r_k,k=i+1,i+2,\cdots,i+j$ 是矩阵 $A=D(0)$ 的 j 个单重特征根，且 $\sum\limits_{k=1}^{i}m_k+j=2L+1$ 。

证明 令 $|\lambda I-A|=0$ 可得矩阵 $A=D(0)$ 的 $2L+1$ 个特征根，分别是 $r_k,k=1,2,\cdots,i$ 是 i 个重数分别为 $m_1,m_2,\cdots,m_i$ 的多重特征根及 $r_k,k=i+1,i+2,\cdots,i+j$ 是其 j 个单重特征根，其中 $\sum\limits_{k=1}^{i}m_k+j=2L+1$ 。则由矩阵理论知[9]，$|\lambda I-A|=\prod\limits_{k=1}^{i}(\lambda-r_k)^{m^k}\prod\limits_{k=i+1}^{i+j}(\lambda-r_k)$。

令 $S=-\lambda$，则 $D(s)=D(-\lambda)=D(0)-\lambda I=A-\lambda I$，因此有

$$\begin{aligned}|D(s)|&=|A-\lambda I|=(-1)^{N+L}|\lambda I-A|=\\&(-1)^{N+L}\prod_{k=1}^{i}(\lambda-r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(\lambda-r_k)=\\&(-1)^{N+L}\prod_{k=1}^{i}(-s-r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(-s-r_k)=\\&(-1)^{2(N+L)}\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)=\\&\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)\end{aligned}$$

引理3

$$|D_1(s)|=b^L\prod_{i=0}^{L-1}\lambda_i\cdot\Delta_L(s)\qquad(12)$$

其中 $\Delta_L(s)$ 是三对角矩阵 A_4 的行列式。

该引理可由引理1的迭代公式求得。

引理4

$$B_4=\begin{bmatrix}0&e_1&-\mu_2&&&&&&\\0&-\lambda_1&e_2&-\mu_3&&&&&\\\vdots&&\ddots&\ddots&\ddots&&&&\\0&&&-\lambda_{R-1}&e_R&-\mu_{R+1}&&&\\0&&&&-\lambda_R b&e_{R+1}&-\mu_{R+2}&&\\\vdots&&&&&\ddots&\ddots&\ddots&\\0&&&&&&-\lambda_{L-3}b&e_{L-2}&-\mu_{L-1}\\0&&&&&&&-\lambda_{L-2}b&e_{L-1}\\-\theta&&&&&&&&-\lambda_{L-1}b\end{bmatrix},$$

令 $(x_1,x_2,\cdots,x_L)$ 是 B_4^{-1} 的第一行元素，则

$$x_i=\begin{cases}-\dfrac{b^{L-R}\prod\limits_{k=i}^{L-1}\lambda_i\cdot\Delta_{i-1}(s)}{\theta\cdot\Delta_{L-1}(s)},i=1,2,\cdots,R-1\\-\dfrac{b^{L-i}\prod\limits_{k=i}^{L-1}\lambda_i\cdot\Delta_{i-1}(s)}{\theta\cdot\Delta_{L-1}(s)},i=R,\cdots,L-1\\-\dfrac{1}{\theta},i=L\end{cases}$$

其中，$\Delta_{L-1}(s)$ 是 B_4 划去第一列最后一行得到的矩阵的行列式，是三对角矩阵的行列式，可由引理1得出；$\Delta_{i-1}(s),i=1,2,\cdots,L-1$ 是 $\Delta_{L-1}(s)$ 的 $i-1$ 级顺序主子式，也都是三对角形式的矩阵，可由引理1得出。

引理5

$$|D_2(s)|=(-1)^{L+2}\theta\Delta_{L-1}(s)\cdot L(s)\qquad(13)$$

其中

$$L(s) = \theta d_{L-1}d_L \cdot [(-1)^{3L-3}x_{L-2}b^{L-2}\prod_{i=0}^{L-3}\lambda_i + \sum_{i=1}^{L-3}\beta_i] + \phi,$$

$$\phi = (-1)^{L-1}b^{L-1}(\theta d_L x_{L-1} - \lambda_{L-1}b)\prod_{i=0}^{L-2}\lambda_i,$$

$$\beta_i = (-1)^{3L-1+2i}x_i b^i(\prod_{k=0}^{i-1}\lambda_k)(\prod_{k=i+1}^{L-2}d_k),$$

$$i = 1,2,\cdots,L-3,$$

$$\Delta_{L-1}(s), x_i(i = 1,2,\cdots,L-1)$$

由引理 4 给出。

证明　$|D_2(s)|$ 按第 $2L+1$ 列展开有：$|D_2(s)| = \det\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \det[B_1 - B_2B_4^{-1}B_3] \cdot \det[B_4]$。其中，$B_4$ 见引理 4，

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\lambda_0 b & d_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & -\lambda_{L-2}b & -d_{L-1} \\ & & & -\lambda_{L-1}b \end{bmatrix},$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ d_N & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & -\theta & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\theta \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

显然，$\det[B_4] = (-1)^{L+2}\theta\Delta_{L-1}(s)$。

由矩阵乘法得到

$$B_2B_4^{-1}B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\theta d_L x_1 & \cdots & -\theta d_L x_{L-1} \end{bmatrix},$$

$$B_1 - B_2B_4^{-1}B_3 = \begin{bmatrix} -\lambda_0 b & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\lambda_1 b & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{L-2}b & d_{L-1} \\ 0 & \theta d_L x_1 & \cdots & \theta d_L x_{L-2} & -\lambda_{L-1}b + \theta d_L x_{L-1} \end{bmatrix}$$

则 $B_1 - B_2B_4^{-1}B_3$ 按最后一列展开有

$$\det[B_1 - B_2B_4^{-1}B_3] = (-\lambda_{L-1}b + \theta d_L x_{L-1}) \cdot \prod_{i=0}^{L-2}(-\lambda_i b) + (-1)^{2N-1}\theta d_{L-1} \cdot \begin{vmatrix} -\lambda_0 b & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\lambda_1 b & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{L-3}b & d_{L-2} \\ 0 & d_N x_1 & \cdots & d_L x_{L-3} & d_L x_{L-2} \end{vmatrix}$$

上式中最后一个行列式按最后一行展开有

$$(-1)^{2N-1}\theta d_{L-1}\begin{vmatrix} -\lambda_0 b & d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & -\lambda_1 b & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -\lambda_{L-3}b & d_{L-2} \\ 0 & d_N x_1 & \cdots & d_L x_{L-3} & d_L x_{L-2} \end{vmatrix} =$$

$$\theta d_{L-1}d_L[(-1)^{3L-3}x_{L-2}b^{L-2}\prod_{i=0}^{L-3}\lambda_i + \sum_{i=1}^{L-3}\beta_i]$$

其中 β_i 有引理中的形式。

因此，

$$\det[B_1 - B_2B_4^{-1}B_3] = (-1)^{L-1}b^{L-1}(\theta d_L x_{L-1} - \lambda_{L-1}b) \cdot \prod_{i=0}^{L-2}\lambda_i + \theta d_{L-1}d_L[(-1)^{3L-3}x_{L-2}b^{L-2}\prod_{i=0}^{L-3}\lambda_i + \sum_{i=1}^{L-3}\beta_i]$$

即 $\det[B_1 - B_2B_4^{-1}B_3] = L(s)$，其中 $L(s)$ 有引理中的形式。

则 $|D_2(s)| = \det[B_1 - B_2B_4^{-1}B_3] \cdot \det[B_4] = (-1)^{L+2}\theta\Delta_{L-1}(s) \cdot L(s)$。

定理 1　系统处于失效状态的概率为

$$P_{0L}(t) = \sum_{k=1}^{j}a_k e^{-r_{i+k}t} + \sum_{k=1}^{i}a_{km_k}e^{-r_k t} + \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k-1}\frac{a_{kl}}{(m_k-l)!}t^{m_k-l}e^{-r_k t} \tag{14}$$

$$P_{1L}(t) = \sum_{k=1}^{j}a'_k e^{-r_{i+k}t} + \sum_{k=1}^{i}a'_{km_k}e^{-r_k t} + \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k-1}\frac{a'_{kl}}{(m_k-l)!}t^{m_k-l}e^{-r_k t} \tag{15}$$

其中

$$a_k = \frac{b^L\prod_{i=0}^{L-1}\lambda_i\Delta_L(-r_{i+k})}{\prod_{l=1}^{i}(r_l - r_{i+k})^{m_l}\prod_{l=i+1,l\neq i+k}^{i+j}(r_l - r_{i+k})}, k = 1,2,\cdots,j;$$

$$a'_k = \frac{(-1)^{L+2}\theta \cdot \Delta_{L-1}(-r_{i+k}) \cdot L(-r_{i+k})}{\prod_{l=1}^{i}(r_l - r_{i+k})^{m_l}\prod_{l=i+1,l\neq i+k}^{i+j}(r_l - r_{i+k})}, k = 1,2,\cdots,j;$$

$$a_{k1} = \frac{b^L\prod_{i=0}^{L-1}\lambda_i\Delta_L(-r_k)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{i}(r_l - r_k)^{m_l}\prod_{l=i+1}^{i+j}(r_l - r_k)}, k = 1,2,\cdots,i;$$

$$a'_{k1} = \frac{(-1)^{L+2}\theta \cdot \Delta_{L-1}(-r_k) \cdot L(-r_k)}{\prod_{l=1,l\neq k}^{i}(r_l - r_k)^{m_l}\prod_{l=i+1}^{i+j}(r_l - r_k)}, k = 1,2,\cdots,i;$$

$$a_{nk} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}F_n(s)\,|_{s=-r_n}, n = 1,2,\cdots,i;$$

$$k = 2,\cdots,m_n;$$

$$a'_{nk} = \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}s^{k-1}}F'_n(s)\,|_{s=-r_n}, n = 1,2,\cdots,i;$$

$$k = 2,\cdots,m_n$$

其中

$$F_n(s) = a_{n1} + a_{n2}(s+r_n) + \cdots + a_{nm_n}(s+r_n)^{m_n-1} + (s+r_n)^{m_n}\cdot$$

$$\left[\frac{b^L\prod_{i=0}^{L-1}\lambda_i\Delta_L(s)}{\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)} - \sum_{k=1}^{m_n}\frac{a_{nm_n+1-k}}{(s+r_n)^k}\right],$$

$$n = 1,2,\cdots,i;$$

$$F'_n(s) = a_{n1} + a_{n2}(s+r_n) + \cdots + a_{nm_n}(s+r_n)^{m_n-1} + (s+r_n)^{m_n}\cdot$$

$$\left[\frac{(-1)^{L+2}\theta\cdot\Delta_{L-1}(s)\cdot L(s)}{\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)} - \sum_{k=1}^{m_n}\frac{a'_{nm_n+1-k}}{(s+r_n)^k}\right],$$

$$n = 1,2,\cdots,i$$

证明 由引理3和引理5，显然 $\frac{D_1(s)}{D(s)}$ 和 $\frac{D_2(s)}{D(s)}$ 都是关于 s 的真分式。因此由克拉默法则[8]有

$$P^*_{0L}(s) = \frac{|D_1(s)|}{|D(s)|} = \frac{b^L\prod_{i=0}^{L-1}\lambda_i\Delta_L(s)}{\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)} \tag{16}$$

$$P^*_{1L}(s) = \frac{|D_2(s)|}{|D(s)|} = \frac{(-1)^{L+2}\theta\cdot\Delta_{L-1}(s)\cdot L(s)}{\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)} \tag{17}$$

由文献［9］，按照有多重极点的部分分式展开法求解有

$$P^*_{0L}(s) = \frac{|D_1(s)|}{|D(s)|} = \frac{b^L\prod_{i=0}^{L-1}\lambda_i\Delta_L(s)}{\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)} =$$

$$\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{a_{kl}}{(s+r_k)^{m_k-l+1}} + \sum_{k=1}^{j}\frac{a_k}{(s+r_{i+k})} \tag{18}$$

$$P^*_{1L}(s) = \frac{|D_2(s)|}{|D(s)|} = \frac{(-1)^{L+2}\theta\cdot\Delta_{L-1}(s)\cdot L(s)}{\prod_{k=1}^{i}(s+r_k)^{m_k}\prod_{k=i+1}^{i+j}(s+r_k)} =$$

$$\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k}\frac{a'_{kl}}{(s+r_k)^{m_k-l+1}} + \sum_{k=1}^{j}\frac{a'_k}{(s+r_{i+k})} \tag{19}$$

其中 $a_k, k = 1,\cdots,j; a_{nk}, n = 1,\cdots,i, k = 1,\cdots,m_n$；$a'_k, k = 1,2,\cdots,j; a_{nk}', n = 1,2,\cdots,i, k = 1,\cdots,m_n$ 见定理1。

反演（18）和（19）式即得定理结论。

定理2 系统的瞬时可用度

$$A(t) = 1 - \sum_{k=1}^{j}(a_k + a'_k)\mathrm{e}^{-r_{i+k}t} -$$

$$\sum_{k=1}^{i}(a_{km_k} + a'_{km_k})\mathrm{e}^{-r_kt} - \sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k-1}\frac{a_{kl}+a'_{kl}}{(m_k-l)!}t^{m_k-l}\mathrm{e}^{-r_kt} \tag{20}$$

其中，$a_k, a'_k, k = 1,2,\cdots j; a_{nk}, a'_{nk} n = 1,2,\cdots i, k = 1,\cdots,m_n$ 见定理1。

证明 由文献［10］，系统的瞬时可用度

$$A(t) = 1 - P_{0L}(t) - P_{1L}(t) =$$

$$1 - \Big(\sum_{k=1}^{j}a_k\mathrm{e}^{-r_{i+k}t} + \sum_{k=1}^{i}a_{km_k}\mathrm{e}^{-r_kt} +$$

$$\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k-1}\frac{a_{kl}}{(m_k-l)!}t^{m_k-l}\mathrm{e}^{-r_kt}\Big) -$$

$$\Big(\sum_{k=1}^{j}a'_k\mathrm{e}^{-r_{i+k}t} + \sum_{k=1}^{i}a'_{km_k}\mathrm{e}^{-r_kt} +$$

$$\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k-1}\frac{a'_{kl}}{(m_k-l)!}t^{m_k-l}\mathrm{e}^{-r_kt}\Big) =$$

$$1 - \sum_{k=1}^{j}(a_k + a'_k)\mathrm{e}^{-r_{i+k}t} - \sum_{k=1}^{i}(a_{km_k} + a'_{km_k})\mathrm{e}^{-r_kt} -$$

$$\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{m_k-1}\frac{a_{kl}+a'_{kl}}{(m_k-l)!}t^{m_k-l}\mathrm{e}^{-r_kt}$$

当 $t\to\infty$ 时，对（20）式求极限，得到系统的稳态可用度[10]，结果如下推论1。

推论1

1）当 $D(0)$ 无零特征根时，系统的稳态可用度 $A = 1$；

2）当 $D(0)$ 有单重零特征根时，系统的稳态可用度

$$A = 1 - a_1 - a'_1 = 1 -$$

$$\frac{b^L\prod_{i=0}^{L-1}\lambda_i\Delta_L(-r_{i+1}) + (-1)^{L+2}\theta\cdot\Delta_{L-1}(-r_{i+1})\cdot L(-r_{i+1})}{\prod_{l=1}^{i}(r_l - r_{i+1})^{m_l}\prod_{l=i+2}^{i+j}(r_l - r_{i+1})},$$

其中 $r_{i+1} = 0$ 是 $D(0)$ 的单重零特征根。

3）当 $D(0)$ 有多重零特征根时，系统的稳态可用度 $A = 1 - a_{1m_1} - a'_{1m_1} = 1 - \frac{1}{(m_1-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m_1-1}}{\mathrm{d}s^{m_1-1}}(F_1(s) + F_1{}'(s))\,|_{s=-r_1}$，其中 $r_1 = 0$ 是 $D(0)$ 的 m_1 重零特征根。

参考文献：

［1］ 傅国强，杨文鹏. 两部件热贮备系统的可靠性分析［J］. 西北纺织工学报，1995，9(1)：42－48.

［2］ 吴清太. 二部件温贮备可修系统的可靠性分析［J］. 南

昌大学学报,1999, 23(3): 283 -286.

[3] WANG K H, SIVAZLIAN B D. Reliability of a system with warm standbys and repairmen [J]. Microelectron Reliab, 1989, 29(5): 849 -860.

[4] 刘鸣,苏保河. 修理工多重休假两部件冷贮备可修系统[J]. 石家庄铁道学院学报,1994, 7(3): 47 -52.

[5] 岳德权,祁洪娟,曹静,等. 修理工 N-策略休假的带有温贮备的可修系统的可靠性分析[J]. 工程数学学报, 2009, 26(6): 1062 -1068.

[6] JAIN M, MAHESHWARI R S. N-policy for a machine repair system with spares and reneging [J]. Applied Mathematical Modeling, 2004, 28(6): 513 -531.

[7] WANG K H, KE J C. Probabilistic analysis of a repairable system with warm standbys plus balking and reneging [J]. Applied Mathematical Modeling, 2003, 27(4): 327 -336.

[8] 北京大学数学系几何与代数教研室代数小组. 高等代数[M]. 3 版, 北京:高等教育出版社,2003.

[9] 汤全武,李德敏,陈晓娟. 信号与系统[M]. 武汉:华中科技大学出版社,2008.

[10] 曹晋华,程侃. 可靠性数学[M]. 北京:科学出版社, 1986.

(上接第 27 页)

[6] BARTUCCELLI M, CHRISTIANSEN P, PEDESEN N, et al. Prediction of chaos in a Josephson junction by the Melnikov function technique [J]. Phys Rev B, 1986, 33: 4686 -4691.

[7] JING Z J. Application of qualitative methods of differential equation to study phase-locked loops [J]. SIAM J Appl Math, 1983, 43 (6): 1245 -1258.

[8] JING Z J. Chaotic behavior in the Josephson equation with periodic force [J]. SIAM J Appl Math, 1989, 49 (6): 1749 -1758.

[9] JING Z J, CHAN K Y, XU D S, et al. Bifurcation of periodic solutions and chaos in Josephson system [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2001, 7 (3): 573 -592.

[10] YANG J P, FENG W, JING Z J. Complex dynamics in Josephson system with two external forcing terms [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2006, 30 (1): 235 -256.

[11] JING Z J, CAO H J. Bifurcation of periodic orbits in a Josephson equation with a phase shift [J]. Int J Bifurcation Chaos: Appl Sci Eng, 2002, 12 (7): 1515 -1530.

[12] CAO H J, JING Z J. Chaotic dynamics of Josephson equation driven by constant dc and ac forcings [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2001, 12 (10): 1887 -1895.

[13] RAVICHANDRAN V, CHINNATHAMBI V, RAJASEKAR S. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force [J]. Phys A, 2007, 376: 223 -236.

[14] WIGGINS S. Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.