一阶复结构形变中产生 Hodge 数跳跃的障碍公式的解析证明*

林洁珠[1]，叶轩明[2]
（1. 广州大学数学与信息科学学院//数学与交叉学科广东普通高校重点实验室，
广东 广州 510006；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：设 X 为一个紧致复流形，考虑 X 的任一复结构形变族 $\pi:\chi\to B$，则 X 的微分形式层的上同调群 $H^p(X_t,\Omega^p_{X_t})$ 的维数在此变化过程中可能产生跳跃现象。相关文献作者通过研究 X 各阶形变中微分形式层的上同调群等价类元素在延拓过程中的障碍来研究这一跳跃现象，得到了产生此障碍的公式。文中将给出 1 阶障碍公式的另一个用 Dolbeault 上同调计算的证明。

关键词：Hodge 数；复结构形变；障碍；Kodaira Spencer 类

中图分类号：O186　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）06－0017－04

An Analytic Proof for the Formula of the First Order Obstruction Making the Hodge Numbers Jumping

LIN Jiezhu[1]，*YE Xuanming*[2]
（1. School of Mathematics & Information Science，Guangzhou University//Key Laboratory of Mathematics and Interdisciplinary Sciences of Guangdong Higher Education Institutes，Guangzhou 510006，China；
2. School of Mathematics and Computational Science，Sun Yat－sen University，Guangzhou 510275，China）

Abstract：Let X be a compact complex manifold，and let $\pi:\chi\to B$ be a small deformation of X，the dimensions of the Dolbeault cohomology groups $H^p(X_t,\Omega^p_{X_t})$ may vary under this deformation. The author studied the deformation obstructions of a（p，q）class in the central fiber X. In particular，He obtained an explicit formula for the obstructions. The first order obstruction is proved in another way by using Dolbeault cohomology.

Key words：Hodge number；deformation；obstruction；Kodaira Spencer class

设 X 为一紧致复流形，$\pi:\chi\to B$ 是以复流形 X 为中心纤维的复结构形变簇。记在 $t\in B$ 点处的 π 的纤维为 $X_t=\pi^{-1}(t)$（关于复结构形变簇的介绍，读者可以参考文［1－3］）。记 O_X 以及 Ω^p_X 为 X 的结构层以及全纯 p－形式层。则 Hodge 数：$h^{p,q}=\dim_{\mathbb{C}}H^q(X_{\Omega^p_X})$ 和 $P_l=\dim H^0(X,(\Omega^m_X)^{\otimes l})$，其中 $m=\dim_{\mathbb{C}}X$。Iitaka 曾猜测 Hodge 数或 P_l 都是形变不变量[4]。该猜测被 Iku Nakamura[5] 在他的文章中否定，在文［5］中 Iku Nakamura 讨论了某些复平行流形（所谓复平行流形即全纯切丛平凡的复流形）的形变的例子。在这些例子中，Hodge 数在复结构形变过程中发生跳跃现象。

在文［1］中，作者找出在无穷小复结构形变中，Hodge 数发生跳跃现象的“原因”。他从障碍理论的角度去研究这个问题。确切的说，给定一个复流形 X，现考虑它的一个以底空间 B 为参数空间的复结构形变族 χ，对于 X 任一微分 p 形式层上同

* **收稿日期**：2012－04－06
基金项目：广州大学新苗计划资助项目；广州大学引进人才科研启动资助项目
作者简介：林洁珠（1980 年生），女，讲师；**通讯作者**：叶轩明；E-mail：yexm3@mail.sysu.edu.cn

调群 $H^q(X,\Omega_X^p)$ 的等价类［α］。他找出将这个元素延拓成为相对微分 p 形式层上同调群 $H^q(X,\Omega_{X/B}^p)$ 里的一个等价类的障碍，并称那些有非平凡障碍的元素为障碍元素。实际上，这些元素在研究无穷小复结构形变 Hodge 数发生跳跃的现象中将扮演重要角色。因为这类元素的存在，是无穷小复结构形变中 Hodge diamond 发生变化的充要条件（关于切层上同调群维数在复结构变化过程中的障碍理论可参考文［6］）。

作者利用 Grauert 的正象层理论（Direct Image Theorems 见文［7］）得到无穷小复结构形变中 Hodge 数发生跳跃现象的一个很有用的“模型”。通过对此模型的研究，解释为什么我们需要研究前文所说的障碍元素。作者得到障碍元素和 Hodge 数发生跳跃现象的关系如下。

定理 1[1]　设 $\pi:\chi\to B$ 是以紧复流形 X 为中心纤维的复结构形变族。现在我们考虑以 $t\in B$ 为变量的函数 $\dim H^q(X_t,\Omega_{X_t}^p)$。此函数将在 $t=0$ 发生跳跃（减少）当且仅当存在 $H^{q-1}(X_t,\Omega_X^p)$ 或者 $H^q(X,\Omega_X^p)$ 中的等价类［α］和一个自然数 $n\geqslant 1$ 使得该元素的阶障碍

$$o_{n,n-1}(\alpha)\neq 0$$

同时，作者还得到计算障碍 $o_{n,n-1}$ 的一个公式。

定理 2[1]　设 $\pi:\chi\to B$ 是 $\pi^{-1}(0)=X$ 的一个复结构形变族，其中 X 是一个紧复流形。令 $\pi_n: X_n\to B_n$ 为 X 的 n 阶无穷小形变。对于上同调群 $H^q(X,\Omega^p)$ 的任一等价类［α］，如果，我们能将其延拓 $n-1$ 到阶，即将其延拓为上同调群 $H^q(X_{n-1},\Omega^p_{X n-1/B_{n-1}})$ 中的一个等价类［α_{n-1}］。则将［α］延拓到 n 阶的障碍如下

$$o_{n,n-1}(\alpha)=d_{X n-1/B_{n-1}}\circ\kappa_n\llcorner(\alpha_{n-1})+\kappa_n\llcorner\circ d_{X n-1/B_{n-1}}(\alpha_{n-1})$$

其中 κ_n 是 n 阶 Kodaira-Spencer 类（关于 n 阶 Kodaira-Spencer 类的定义，可参考文［8］），$d_{X n-1/B_{n-1}}$ 是 $n-1$ 阶无穷小形变的相对万有微分算子。

在本文中，我们将给出以上定理 $n=1$ 在的时候的一个 Dolbeaut 上同调计算的证明。在 $n=1$ 时，以上的定理表述为：

定理 3[1]　设 $\phi:\chi\to B$ 为紧复流形 X 的一个复结构形变族，［α］是上同调群 $H^q(X,\Omega^p)$ 的一个等价类。则对于任意给定的方向 $\frac{\partial}{\partial t}\in T_{B,0}$，$\alpha$ 延拓为 X 上的一个相对微分形式 α_t 的一阶障碍为 $H^{q+1}(X,\Omega^p)$ 中的

$$o_1\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial t}\right)=\partial_X\left(int\left(\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(\alpha)\right)-int\left(\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)(\partial_X(\alpha))$$

其中 $\rho: T_0B\to H^1(X,T_X)$ 是 Kodaira-Spencer 映射。

在下文中，我们将给出上面定理的证明。

1　障碍 $o_1\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial t}\right)$

当 $n=1$ 时的情况可以用 Dolbeaut 上同调群计算。现考虑复结构形变族 $\pi:\chi\to B$，其中，$\pi^{-1}(0)=X$，X 为紧复流形。记 m_0 为 $O_{B,0}$ 的极大理想，记 $\pi^*(m_0)$ 为 $\mathcal{M}_0$。

注 1　在这种情况下 $o^q_{1,1-1}=o^q_{1,0}=o^q_1$，所以，在 $n=1$ 时我们不需要考虑 $o^q_{1,0}$ 和 o^q_1 的区别。

对于任意的群 $H^q(X,\Omega^p)$ 中的等价类［α］，我们希望将 α 延拓成为一个 $\bar\partial_{X_t}$ - 闭的截面 α_t（其中，$\bar\partial_{X_t}$ - 是 X_t 的 $\bar\partial$ 算子）。现在，我们考虑以下的短正合列

$$0\to\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0}\to\Omega^p_{X_1/B_1}\to\Omega^p_{X_0/B_0}\to 0\tag{1}$$

这个短正合列诱导了下面的长正合列

$$0\to H^0(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0})\to H^0(X_1,\Omega^p_{X_1/B_1})\to H^0(X,\Omega^p_{X_0/B_0})\to H^1(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0})\to\cdots$$

其中，X_1 为 X 的 1 阶段无穷小邻域，现考虑这个长正合列连接映射

$$\delta^*: H^q(X,\Omega^p_{X_0/B_0})\to H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0})$$

由以上分析，当且仅当在上同调群 $H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0})$ 中的 δ^*（［α］）是平凡的时候，我么可以得到 α 的一阶延拓。另一方面，因为

$$H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0})\cong m_0/m_0^2\otimes H^{q+1}(X,\Omega^p_{X_0/B_0})$$

和

$$T_{B,0}\cong\mathrm{Hom}(m_0/m_0^2,\mathbb{C})$$

所以，有

$$H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0})\cong\mathrm{Hom}(T_{B,0},H^{q+1}(X,\Omega^p_{X_0/B_0}))$$

因此，如果取定方向 $\frac{\partial}{\partial t}$ 之后，我们能对 α 进行一阶延拓当且仅当在 $H^{q+1}(X,\Omega^p_{X_0/B_0})$ 中的 $\delta^*(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 是平凡的。我们称 $o_1\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial t}\right)=\delta^*(\alpha)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 为一阶障碍，并且我们将给出其具体

的计算公式。

注 2　不难检验，该障碍 $o_1\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 恰恰就是文 [1] 中所述的障碍 $o_1^q(\alpha)$ 也即 $o_{1,0}^q(\alpha)$。详细的论证可以参考文 [1]。

2　相对微分形式层的 Dolbeaut 的分解和用 Dolbeaut 上同调求 $o_1\left(\alpha,\frac{\partial}{\partial t}\right)$

记 $j:X\hookrightarrow\chi$ 为 X 在 χ 中的嵌入映射，X_∞ 为 X 的 ∞ 阶无穷小邻域，即拓扑空间为 X，结构层为 $j^{-1}O_\chi$ 的复解析空间。记 $\mathcal{A}_\chi^{p,q}$ 为 χ 上光滑的 (p,q) 形式形成的层，$\mathcal{A}_{\chi/B}^{p,q}$ 为在 χ 上光滑的相对 (p,q) 形式形成的层。$\mathcal{A}_{h,\chi/B}^{p,q}:=\mathcal{A}_{\chi/B}^{p,0}\wedge\mathcal{A}_\chi^{0,q}$。记

$$\varphi:\mathcal{A}_\chi^{p,q}\to\mathcal{A}_{\chi/B}^{p,q},\varphi_h^{'}:\mathcal{A}_{h,\chi}^{p,q}\to\mathcal{A}_{\chi/B}^{p,q}$$

和

$$\varphi_h:\mathcal{A}_\chi^{p,q}\to\mathcal{A}_{h,\chi/B}^{p,q}$$

为自然的商映射，且它们满足 $\varphi=\varphi'_h\circ\varphi_h\circ\bar{\partial}_{\chi/B}$ 为 $\Omega_{\chi/B}^p$ 的全纯结构。因为我们希望通过相对比较直观的 Dolbeaut 上同调来计算这个障碍。而层 Ω_{X_1/B_1}^p 是没有 Dolbeaut 的分解的。另一方面，考虑到 $\Omega_{\chi/B}^p$ 层有如下的 Dolbeaut 分解

$$0\to\Omega_{\chi/B}^p\to\mathcal{A}_{h,\chi/B}^{p,0}\to\mathcal{A}_{h,\chi/B}^{p,1}\to\cdots\to\mathcal{A}_{h,\chi/B}^{p,n-p}\to 0$$

其中因为 $\mathcal{A}_{h,\chi/B}^{p,q}$ 都是“fine”层。所以，有

$$H^q(X_\infty,j^{-1}\Omega_{\chi/B}^p)=\frac{\mathrm{Ker}(\bar{\partial}_{\chi/B}:A_{h,\chi/B}^{p,q}\to A_{h,\chi/B}^{p,q+1})}{\mathrm{Im}(\bar{\partial}_{\chi/B}:A_{h,\chi/B}^{p,q-1}\to A_{h,\chi/B}^{p,q})}$$

其中，$A_{h,\chi/B}^{p,q}$ 为 $j^{-1}\mathcal{A}_{h,\chi/B}^{p,q}$ 的全部整体截面。所以，考虑以下短正合列

$$0\to\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p\to\Omega_{\chi/B}^p\to\Omega_{X_0/B_0}^p\to 0\qquad(2)$$

而不是短正合列（1）。短正合列（2）诱导了下面的长正合列

$$0\to H^0(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))\to H^0(X_\infty,j^{-1}\Omega_{\chi/B}^p)\to H^0(X,\Omega_{X_0/B_0}^p)\to H^1(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))\to\cdots$$

以及连接映射

$$\delta_\infty^*:H^q(X,\Omega_{X_0/B_0}^p)\to H^{q+1}(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^P))$$

另一方面，因为有短正合列

$$0\to\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega_{\chi/B}^p\to\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p\to\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega_{X_0/B_0}^p\to 0\qquad(3)$$

诱导的以下映射

$$\phi:H^{q+1}(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))\to H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega_{X_0/B_0}^p)$$

不难验证

$$\delta^*=\phi\circ\delta_\infty^*:H^q(X,\Omega_{X_0/B_0}^p)\to H^{q+1}(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))\to H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega_{X_0/B_0}^p)$$

因此，为了计算 $\delta^*([\alpha])$，我们不能只考虑 $\delta_\infty^*([\alpha])$，还需要考虑如何求映射 ϕ。

现考虑如下映射

$$\phi^{'}:H^{q+1}(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))\to\mathrm{Hom}(T_{B,0},H^{q+1}(X,\Omega_{X_0/B_0}^p))$$

其中，$\phi^{'}$ 的具体定义如下，对于任意的 $H^{q+1}(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))$ 中的等价类 $[\omega_t]$。我们定义 $\phi^{'}([\omega_t])$ 为映射 $T_{B,0}\to H^{q+1}(X,\Omega_{X_0/B_0}^p)$ 如下：令 Ω_t 为 $A_\chi^{p,q+1}$ 的一个截面，满足其商映射 φ_h 的象为 ω_t。取定 V_0 后，我们定义

$$\phi^{'}([\omega_t](V_0):=\varphi(L_V(\Omega_t))|_X$$

其中，L_v 为 χ 上的 Lie 导数，V 为 χ 的光滑切向量场，且满足 $\pi_*(V)(0)=V_0$。

关于以上映射，我们有以下引理。

引理 1　上述映射 $\phi^{'}$ 是的定义是合理的，且有

$$\phi^{'}=\phi:H^{q+1}(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))\to H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega_{X_0/B_0}^p)\cong\mathrm{Hom}(T_{B,0},H^{q+1}(X,\Omega_{X_0/B_0}^p))$$

证明　首先我们要计算 $\phi^{'}$。设 B 在 0 点附近的局部坐标为 t_i，对于任意的中的 $H^{q+1}(X_\infty,j^{-1}(\mathcal{M}_0\otimes\Omega_{\chi/B}^p))$ 等价类 $[\omega_t]$。设 $\omega_t=\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i \mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\psi_i^{'}$，则 Ω_t 可以表示为

$$\Omega_t=\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i\mathrm{d}t_i\wedge\psi_i+\sum_i\mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\psi_i^{'}+\Omega^{'}$$

其中，$\Omega^{'}$ 是在 $\pi^*\wedge^2\mathcal{A}_B^{1,0}\wedge\mathcal{A}_\chi^{q-1}$ 中，$\mathrm{d}t_i$ 项不出现在 $\omega_{t,i},\psi_i$ 和 $\psi_i^{'}$ 中。所以有

$$\mathrm{d}\Omega_t=\sum_i\mathrm{d}t_i\wedge\omega_{i,i}+\sum_i t_i\wedge\mathrm{d}\omega_{t,i}-\sum_i\mathrm{d}t_i\wedge\mathrm{d}\psi_i+\sum_i\mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\mathrm{d}\psi_i^{'}+\mathrm{d}\Omega'$$

取定方向 $\frac{\partial}{\partial t_i}$，有

$$\varphi\left(int\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)(\mathrm{d}\Omega_t)\right)|_X=\omega_{t,i|X}-\mathrm{d}\psi_{i|X}$$

$int(\cdot)(\cdot)$ 表示切向量场和形式作内积，而

$$\varphi\left(\mathrm{d}\left(int\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)(\Omega_t)\right)\right)_{|X}=\mathrm{d}\psi_{i|X}$$

所以得到

$$\phi^{'}([\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i\mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\psi_i^{'}])\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)=\varphi\left(int\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)(d\Omega_t)\right)|_X+\varphi\left(\mathrm{d}\left(int\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)(\Omega_t)\right)\right)_{|X}=\omega_{t,i|X}$$

为了证明 $\phi^{'}$ 的定义是合理的，我们需要证明：

(I) $\phi^{'}([\omega_t])\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 不依赖于等价类 $[\omega_t]$ 的

代表元 ω_t 的选取；

（II）$\phi^{'}([\omega_t])\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 只依赖于向量场 $\frac{\partial}{\partial t}$ 在 0 点的值；

（III）$\phi^{'}([\omega_t])\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$ 是闭的。

首先证明（II），给定 V_0，现考虑向量场 V，满足 V 为 χ 的切向量场，且 $\pi_*(V)(0)=V_0$。因为 $\phi^{'}([\omega_t])(V_0)$ 是取 Lie 导数，φ 作用后再限制在 X 上，所以只依赖于 $V_{|X}$。且从上面计算可以看到，实际上 $\phi^{'}([\omega_t])(V_0)$ 只依赖于 V_0，而不依赖于 $V_{|X}$ 在 X 切向上的分量。

现证明（III），因为 $\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i d\bar{t}_i\wedge\psi_i^{'}$ 是闭的。所以 $\omega_{t,i|X}$ 也是闭的。由上面计算知道，$\phi^{'}([\sum_i t_i\omega_{t,i}])\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)$ 是闭的。

再看（I），现设 $\omega_t^{'}$ 为等价类［ω_t］的另一个代表元。所以，存在 $\mathcal{A}^{p,q}_{h,\chi/B}$ 的整体截面 $\beta_{t,i}$。使得 $\bar{\partial}_{\chi/B}(\beta_{t,i})=\omega_{t,i}^{'}-\omega_{t,i}\mathrm{mod}\pi^*\mathcal{A}_B^{0,1}\wedge\mathcal{A}_\chi^{q-1}$。类似于前面的计算，$\phi^{'}(\omega_t^{'}-\omega_t)\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)=\bar{\partial}_X(\varphi_h^{'}(\beta_{t,i})_{|X})$，即 $\varphi^{'}\left([\omega_t]\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)$ 不依赖于等价类［ω_t］的代表元 ω_t 的选取。

根据定义

$$\phi:H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0\otimes\Omega^p_{\chi/B})\to H^{q+1}(X,\mathcal{M}_0/\mathcal{M}_0^2\otimes\Omega^p_{X_0/B_0})\cong$$
$$\mathrm{Hom}(T_{B,0},H^{q+1}(X,\Omega^p_{X_0/B_0})),$$
$$[\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i \mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\psi_i^{'}]\mapsto$$
$$[\sum_i t_i\omega_{t,i|X}]\mapsto\sum_i \mathrm{d}t_i\otimes[\omega_{t,i|X}]$$

再由 $\phi^{'}([\sum_i t_i\omega_{t,i}])\left(\frac{\partial}{\partial t_i}\right)=\omega_{t,i|X}$，我们得到 $\phi^{'}=\phi$。

有了以上的准备，我们现在可以具体求障碍公式了。现考虑上同调群 $H^q(X,\Omega^p_{X_0/B_0})$ 中的一个等价类我们［α］总是可以 α 将延拓为 $\mathcal{A}^{p,q}_{h,\chi/B}$ 中的一个截面 α_t。根据前面分析，我们需要求 $\delta^*(\alpha)$。所以要求 $\phi^{'}\circ\delta^*_\infty(\alpha)$。根据定义 $\delta^*_\infty(\alpha)=\bar{\partial}_{\chi/B}(\alpha_t)$。即，要求 $\phi^{'}(\bar{\partial}_{\chi/B}(\alpha_t))$。令 Ω_t 为 χ 上的一个（p，q）形式，满足，$\varphi_h(\Omega_t)$ 为 α_t。根据 $\bar{\partial}_{\chi/B}$ 算子的定义，我们有 $\varphi_h(\bar{\partial}\Omega_t)$ 为 $\bar{\partial}_{\chi/B}(\alpha_t)$。则由映射 $\phi^{'}$ 的定义，知道

$$\phi'\circ\delta^*_\infty(\alpha)(V_0)=\varphi(L_V(\bar{\partial}\Omega_t))_{|X}=$$
$$\varphi(int(V)d(\bar{\partial}\Omega_t))_{|X}+\varphi(d(int(V)(\bar{\partial}\Omega_t)))_{|X}\equiv$$
$$\varphi(int(V)d(\bar{\partial}\Omega_t))_{|X}+\varphi(\partial(int(V)(\bar{\partial}\Omega_t)))_{|X}=$$
$$\varphi(-int(V)\bar{\partial}(\Omega_t))_{|X}+\partial_X(\varphi(int(V)(\bar{\partial}\Omega_t))_{|X})$$

因为对于任意的 (p,q) 形式 $\Omega^{p,q}$，有

$$\bar{\partial}(int(V)(\Omega^{p,q}))=-int(V)(\bar{\partial}\Omega^{p,q})+int(\bar{\partial}V)(\Omega^{p,q})$$

所以

$$\phi^{'}\circ\delta^*_\infty(\alpha)(V_0)=\varphi(\bar{\partial}(int(V)(\partial\Omega_t)))_{|X}-$$
$$\varphi(int(\bar{\partial}V)(\partial\Omega_t))_{|X}+$$
$$\partial_X(\varphi(-\bar{\partial}(int(V)(\Omega_t))))_{|X}+\varphi(int(\bar{\partial}V)(\Omega_t))_{|X})$$

因为 $\partial_X(\varphi(-\bar{\partial}(int(V)(\Omega_t))))_{|X}$ 和 $\varphi(\bar{\partial}(int(V)(\partial\Omega_t)))_{|X}$ 都是 X 上的恰当形式。所以有

$$\phi^{'}\circ\delta^*_\infty(\alpha)(V_0)\equiv\varphi(-int(\bar{\partial}V)(\partial\Omega_t))_{|X}+$$
$$\partial_X(\varphi(int(\bar{\partial}V)(\Omega_t))_{|X})=$$
$$-int(\bar{\partial}V_{|X})(\varphi(\partial\Omega_t)_{|X})+\partial_X(int(\bar{\partial}V_{|X})(\varphi(\Omega_t)_{|X}))$$

注意到 Kodaira－Spencer 映射 $\rho(V_0)=\bar{\partial}V_{|X}$，所以

$$\phi^{'}\circ\delta^*_\infty(\alpha)(V_0)\equiv-int(\rho(V_0))(\partial_X\alpha)+$$
$$\partial_X(int(\rho(V_0))(\alpha))$$

综上所述，我们得到了定理 3 的证明。

参考文献：

［1］ YE X M. The jumping phenomenon of Hodge numbers［J］. Pacific Journal of Mathematics, 2008, 235(2): 379－398.

［2］ KODAIRA K. Complex manifolds and deformation of complex structures［M］. Translated from the Japanese by Kazuo Akao. New York: Springer, 1986.

［3］ VOISIN C. Hodge theory and complex algebraic geometry I［M］. Cambridge University Press, 2002.

［4］ IITAKA S. Plurigenera and classification of algebraic varieties［J］. Sugaku, 1972, 24: 14－27.

［5］ NAKAMURA I. Complex parallelisable manifolds and their small deformations［J］. J Differential Geom, 1975, 10: 85－112.

［6］ YE X M. The jumping phenomenon of the dimensions of cohomology groups of tangent sheaf［J］. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30(5): 1746－1758.

［7］ BELL S, NARASIMHAN R. Proper holomorphic mappings of complex spaces［M］. Encyclopedia of Mathematical Sciences, Several Complex Variables VI, Springer Verlag, 1991.

［8］ VOISIN C. Symétrie miroir［M］. Paris: Société Mathématique de France, 1996.