

具有特殊压力含有源项一维可压 Euler 方程组的弱解存在性*

宋国强^{1,2}, 肖箭³, 盛立人³

(1. 安徽医科大学卫生管理学院, 安徽 合肥 230032;

2. 南京航空航天大学航空宇航学院, 江苏 南京 210016;

3. 安徽大学数学科学学院, 安徽 合肥 230039)

摘要: 研究一类双曲系统——具有特殊压力含有源项的一维可压 Euler 方程组的 Cauchy 问题, 应用补偿紧性理论和最大值原理, 得到其有界弱解的整体存在性结果。所研究系统的齐次形式是 1858 年 Earnshaw 在研究等熵流体时第一次被推导出来, 同时也被称为一位可压流的 Euler 方程组。其中的关键是用最大值原理得到相应的抛物方程组解的 L^∞ 估计, 同时举出满足定理 1 条件 (C1) - (C3) 的一些具体源项。

关键词: 补偿紧性理论; 最大值原理; 弱解; 熵 - 熵流对; Dirac 测度

中图分类号: O175.27; O175.29 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2011) 06-0023-07

Global Weak Solution to a System of the Compressible Euler Equation with a Special Pressure and a Source

SONG Guoqiang^{1,2}, XIAO Jian³, SHENG Liren³

(1. College of Health Administration, Anhui Medical University, Hefei 230032, China;

2. College of Aerospace Engineering, Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

3. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230039, China)

Abstract: The maximum principle and the theory of compensated compactness are applied to establish an existence theorem for global weak solutions to the Cauchy problem of the non-strictly hyperbolic system—a system of the compressible Euler equation with a special pressure and a source. Homogeneous system of this system was first derived by Earnshaw S. in 1858 for isentropic flow and is also called the Euler equations of one-dimensional compressible fluid flow. The key is to obtain a priori- L^∞ estimate for solutions of the Cauchy problem for the related parabolic system by using the maximum principle and give some source terms satisfying the conditions (C1) - (C3) of Theorem 1.

Key words: theory of compensated compactness; maximum principle; weak solution; entropy - entropy flux pair; Dirac measure

研究具有特殊压力含有源项一维 Euler 方程组

$$(\rho(x, 0), u(x, 0)) = (\rho_0(x), u_0(x)),$$

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = h_1(\rho, u, x, t) \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2} + \int_0^\rho \frac{p'(s)}{s} ds \right)_x = h_2(\rho, u, x, t) \end{cases} \quad (1)$$

$$\rho_0(x) \geq 0 \text{ 且 } \lim_{|x| \rightarrow \infty} (\rho_0(x), u_0(x)) = (0, 0) \quad (2)$$

和有界可测初值

的 Cauchy 问题 (1) - (2) 整体弱解存在性, 其中

* 收稿日期: 2010-10-22

基金项目: 安徽医科大学博士科研资助项目 (XJ201022); 南京航空航天大学杰出人才基金资助项目 (1008-904319); 安徽省教育厅自然科学基金重点资助项目 (KJ2007A003)

作者简介: 宋国强 (1966 年生), 男, 副教授, 博士; 通讯作者: 肖箭; E-mail: xiaojian1025@yahoo.com.cn

压力函数为 $p(\rho) = \int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3} ds$ (这里 $\gamma > 3$, $d > 0$ 为常数)。Cauchy 问题 (1) - (2) 可改写成如下形式

$$\begin{cases} V_t + f(V)_x = H(V, x, t) \\ V(x, 0) = V_0(x) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $V = (\rho, u)^T$, $V_0(x) = (\rho_0(x), u_0(x))^T$, $f(V) = (\rho u, \frac{u^2}{2} + \int_0^\rho \frac{p'(s)}{s} ds)^T$ 和 $H(V, x, t) = (h_1(\rho, u, x, t), h_2(\rho, u, x, t))^T$ 。

方程组 (1) 或 (3) 中方程组是一具有源项非守恒气体动力学模型, 重要特性是非严格双曲性, 即一对波速在真空状态 $\rho = 0$ 相等。如, 当源项 $H(V, x, t) = (0, \alpha(x, t))^T$, 其中 $\alpha(x, t)$ 表示体积力, 通常是重力作用在任意体积的流体上; 又如, 当 $H(V, x, t) = -\alpha'(x)/\alpha(x)(\rho u, u^2)^T$, 这时方程组模拟了一维情形下在变截面管道中气体的流动 (见文 [1]), 其中 $\alpha(x)$ 表示在 x 处管道截面积。另外还有如下相关的物理模型也是一维 2×2 双曲平衡律, 如描述具有摩擦阻力洪水流动模型

$$\begin{cases} h_t + (hu)_x = 0 \\ (hu)_t + (hu + \frac{gh^2}{2})_x = gh \tan \alpha - C_f u^2 \end{cases}$$

其中 h 表示水的深度, u 表示水的流速, g 为重力常数, α 表示河堤的角度以及 C_f 表示河床对水流的摩擦系数。另外还有一些气体动力学、黏弹性力学以及磁流体动力学中的物理模型也是双曲平衡律方程组, 参见文献 [2]。

方程组 (1) 齐次系统是 1858 年 Earnshaw^[3] 在研究等熵流体时第一次被推导出来 (也可参见 [2]), 同时也被称为一维可压流的 Euler 方程组。对方程组 (1) 齐次系统的 Cauchy 问题有很多研究。如对多方气体 $p(\rho) = c\rho^\gamma$, 其中 $c = k^2 = (\gamma - 1)/4\gamma$ 和 $\gamma > 1$ 为常数, 有一些研究其 Cauchy 问题整体弱解存在性的文章^[4-6]。DiPerna^[4] 第一次用 Glimm 随机选取格式方法研究上述多方气体 $1 < \gamma < 3$ 时的 Cauchy 问题。但当 $\gamma > 3$ 时因为 ρ 在有限的时间可取 0 (即达到真空状态), 从而方程组 (1) 齐次系统严格双曲性丧失。为了用补偿列紧理论研究 $\gamma > 3$ 情形下相应 Cauchy 问题, 陆云光^[5] 在非线性的函数 $p(\rho)$ 中加入一小摄动参数 δ , 使得方程组 (1) 齐次系统的摄动方程组对任意固定 $\delta > 0$ 都有严格凸熵, 从而使得摄动方程组的强、弱熵-熵流对都满足 H^{-1} 紧性条件, 因此得到摄动方程组整体熵解的存在性。在文献 [6] 中,

陆构造三组强弱熵组合完全解决上述 $\gamma > 3$ 等熵多方气体动力学方程组 Cauchy 问题整体熵解的存在性。对特殊压力 $p(\rho) = \int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3} ds$, 在文献 [7] 中陆用黏性消失技术结合补偿列紧理论对方程组 (1) 齐次系统的 Cauchy 问题也建立整体弱解存在性定理。

由于非齐次双曲系统比齐次双曲系统更为复杂困难, 关于一般非齐次双曲系统整体弱解存在性结果不多, 在文献 [8-11] 中有一些结果。刘太平^[8] 用 Glimm 随机选择法首次得到非齐次共振方程组解的存在性结果并对解接近常数状态下定性行为研究了。丁夏畦等^[9] 用补偿列紧理论对非齐次等熵气动方程组 $1 < \gamma \leq 5/3$ 的情形建立分数步 Lax-Friedrichs 和 Godunov 两种差分格式的收敛定理。随后陈桂强等^[10] 对具有几何结构的可压欧拉方程组通过引入 Godunov 激波捕捉差分格式从而得到对应近似解的 L^∞ 估计和补偿列紧性, 上述方法结合了 Riemann 解和稳定态解的自然生成模块得到了近似解的收敛性和整体弱熵解的存在性的结果。而在文献 [11] 中的方法是使用了粘性消失法结合补偿列紧。

1 主要定理

对方程组 (1), 设 f 为 $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ 函数

$$f: (\rho, u) \rightarrow (\rho u, \frac{u^2}{2} + \int_0^\rho \frac{p'(s)}{s} ds)$$

那么 df 的两个特征根为

$$\lambda_1 = u - \rho(\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}}, \quad \lambda_2 = u + \rho(\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}} \quad (4)$$

其对应的右特征向量如下

$$r_1 = (1, -(\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}})^T, \quad r_2 = (1, (\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}})^T$$

通过简单计算, 对 $\rho \geq 0$, 有

$$\nabla \lambda_1 \cdot r_1 = -2(\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}} - \frac{\gamma-3}{2} \rho(\rho + d)^{\frac{\gamma-5}{2}} < 0,$$

$$\nabla \lambda_2 \cdot r_2 = 2(\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}} + \frac{\gamma-3}{2} \rho(\rho + d)^{\frac{\gamma-5}{2}} > 0$$

(5)

因此, 从式 (4) 知在 $\rho = 0$ 这条线上 $\lambda_1 = \lambda_2$, 从而严格双曲性不成立。进一步由 (5) 式知在 $\rho \geq 0$ 区域里两个特征场为一般非线性。

通过计算, 方程组 (1) 的两个 Riemann 不变量为

$$w(\rho, u) = u + \frac{2}{\gamma-1}(\rho + d)^{\frac{\gamma-1}{2}},$$

$$z(\rho, u) = u - \frac{2}{\gamma - 1}(\rho + d)^{\frac{\gamma-1}{2}} \quad (6)$$

首先我们假设函数 $h_1(\rho, u, x, t)$ 和 $h_2(\rho, u, x, t)$ 满足下列条件:

(C1) $h_1(\rho, u, x, t)$ 和 $h_2(\rho, u, x, t)$ 为连续函数, 且

$$h_1(\rho, u, x, t) = h(\rho, u, x, t)\rho,$$

$$(h_1(\rho, u, x, t) = h_2(\rho, u, x, t))|_{\rho=0 \text{ 或 } u=0} = (0, 0)$$

其中 $h(\rho, u, x, t)$ 为一连续函数, 当 $(\rho, u) \in S_{M(T)}$ $= \{0 \leq \rho \leq M(T), |u| \leq M(T)\}, (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ 时, 满足 $|h(\rho, u, x, t)| \leq C_{M(T)}$ 这里 $C_{M(T)}$ 和 $M(T)$ 是只依赖任意固定 $T > 0$ 的两个正常数;

(C2) 对任意给定 $T > 0$ 和存在连续函数 $K_i(w, z), i = 1, 2$, 使得当 $w - z \geq 0, 0 \leq t \leq T$ 时

$$X(w, z, x, t) \leq K_1(w, z),$$

$$Y(w, z, x, t) \geq -K_2(w, z)$$

以及

$$wK_1(w, z) \leq \Phi(|w|)|w| + c,$$

$$zK_2(w, z) \geq -\Phi(|z|)|z| - c \quad (7)$$

其中
$$\begin{cases} X(w, z, x, t) = (\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}} h_1(\rho, u, x, t) + \\ h_2(\rho, u, x, t) |_{\rho = (\frac{(w-z)(\gamma-1)}{4})^{\frac{2}{\gamma-1}} - d, u = \frac{w+z}{2}} \\ Y(w, z, x, t) = -(\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}} h_1(\rho, u, x, t) + \\ h_2(\rho, u, x, t) |_{\rho = (\frac{(w-z)(\gamma-1)}{4})^{\frac{2}{\gamma-1}} - d, u = \frac{w+z}{2}} \end{cases}$$

c 为一正常数, $\Phi(r)$ 在 $r \geq 0$ 上为一非减的正函数且满足 $\int_0^\infty \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \infty$ 这一条件;

(C3) 如果 $V_1, V_2 \in S_{M(T)}$, 则 $|H(V_1, x, t) - H(V_2, x, t)| \leq C_{M(T)} |V_1 - V_2|$; 其中 $V = (\rho, u)^T, H(V, x, t) = (h_1(\rho, u, x, t), h_2(\rho, u, x, t))^T$.

注: 有很多函数满足 (C1) - (C3) 条件, 当 $H = (0, \alpha(x, t))$ 时, 我们选择 $K_1(w, z) = K_2(w, z) = \alpha_0$ 和 $\Phi(r) = \alpha_0$; 当 $H = (2\alpha(x, t) \frac{\rho + d}{\gamma - 1}, \alpha(x, t)u)$ 时, 我们选择 $K_1(w, z) = \alpha_0 |w|, K_2(w, z) = \alpha_0 |z|$ 和 $\Phi(r) = c_1 r + c_2$; 其中 $|\alpha(x, t)| \leq \alpha_0, \alpha_0, c_1$ 和 c_2 为正常数, 容易验证上述情形满足条件 (C1) - (C3)。

本文得到如下的主要结论。

定理 1 假设上述条件 (C1) - (C3) 成立以及初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 有界可测, 且有 $\rho_0(x) \geq 0$ 和 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\rho_0(x), u_0(x)) = (0, 0)$, 那么 Cauchy 问题 (1) - (2) 有一整体有界的弱解。

2 黏性解的 L^∞ 估计

为了证明定理 1 的结论, 首先研究原 Cauchy 问题的对应抛物方程组

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = \varepsilon \rho_{xx} + h_1(\rho, u, x, t) \\ u_t + \left(\frac{u^2}{2} + \int_0^\rho s(s+d)^{\gamma-3} ds \right)_x = \varepsilon u_{xx} + h_2(\rho, u, x, t) \end{cases} \quad (8)$$

以及初值

$$(\rho^\varepsilon(x, 0), u^\varepsilon(x, 0)) = (\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x)) \quad (9)$$

其中

$$(\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x)) = (\rho_0(x) + \varepsilon, u_0(x)) * G^\varepsilon \quad (10)$$

G^ε 为一磨光子。那么有

$$(\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x)) \in C^\infty \times C^\infty$$

$$(\rho_0^\varepsilon(x), u_0^\varepsilon(x)) \rightarrow (\rho_0(x), u_0(x)), \text{ a. e. ,}$$

$$\text{当 } \varepsilon \rightarrow 0, x \in \mathbb{R}$$

且

$$0 < \varepsilon \leq \rho_0^\varepsilon(x) \leq M_1, \quad |u_0^\varepsilon(x)| \leq M_1 \quad (11)$$

这里 M_1 为一仅依赖初值 $(\rho_0(x), u_0(x))$ 的 L^∞ 界而与 ε 无关的适当大常数。

上述对应抛物方程组的 Cauchy 问题 (8) - (9) 的解局部存在性可由文 [11] 定理 2.1 类似得到, 下面将应用最大值原理给出相关抛物方程组 (8) 的黏性解的 L^∞ 先验估计, 这里所用的最大值原理见文 [12]。

引理 1 假设定理 1 中的条件成立, 并且 Cauchy 问题 (8) - (9) 的解 $(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))$ 在 $\mathbb{R} \times [0, T]$ 上存在, 那么 $w(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))$ 和 $z(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))$ 有如下估计

$$w(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t)) \leq M(T),$$

$$z(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t)) \geq -M(T)$$

其中, $M(T)$ 为一独立于 ε 正常数, $T > 0$ 为任意固定的值。

为了简单起见略去上标 ε , 用 (ρ, u) 表示 $(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ 。

证明 用向量 (w_ρ, w_u) 和 (z_ρ, z_u) 分别乘方程组 (8), 这里 w, z 由式 (6) 给出, 可得

$$w_t + \lambda_2 w_x = \varepsilon w_{xx} - \frac{\varepsilon(\gamma-3)}{2} \rho(\rho+d)^{\frac{\gamma-5}{2}} \rho_x^2 +$$

$$(\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}} h_1(\rho, u, x, t) + h_2(\rho, u, x, t) \leq$$

$$\varepsilon w_{xx} + (\rho+d)^{\frac{\gamma-3}{2}} h_1(\rho, u, x, t) + h_2(\rho, u, x, t)$$

$$(12)$$

和

$$z_t + \lambda_1 z_x = \varepsilon z_{xx} + \frac{\varepsilon(\gamma - 3)}{2} \rho(\rho + d)^{\frac{\gamma-5}{2}}$$

$$\rho_x^2 - (\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}} h_1(\rho, u, x, t) + h_2(\rho, u, x, t) \geq$$

$$\varepsilon z_{xx} - (\rho + d)^{\frac{\gamma-3}{2}} h_1(\rho, u, x, t) + h_2(\rho, u, x, t)$$

(13)

再由式 (6), 有

$$\rho = \left(\frac{(w - z)(\gamma - 1)}{4} \right)^{\frac{2}{\gamma-1}} - d, \quad u = \frac{w + z}{2}$$

(14)

将 (12) 和 (13) 中 ρ, u 用 (14) 式中 w, z 替代, 得到如下两个不等式

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} + X(w, z, x, t) \quad (15)$$

和

$$z_t + \lambda_1 z_x \geq \varepsilon z_{xx} + Y(w, z, x, t) \quad (16)$$

对 (15) 和 (16) 式运用条件 (C2), 可得

$$w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} + K_1(w, z) \quad (17)$$

和

$$z_t + \lambda_1 z_x \geq \varepsilon z_{xx} - K_2(w, z) \quad (18)$$

我们将首先证明 $w(\rho, u) \leq M(T)$ 。

根据初始条件 (9) - (11), 以及条件 (C1)、(C3) 和 $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\rho_0(x), u_0(x)) = (0, 0)$, 应用文 [11] 定理 2.1 可得, 任意固定的 $T > 0$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} (\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t)) = (0, 0)$ 。

因此有

$$w(x, 0) = u_0^\varepsilon(x) + \frac{2}{\gamma - 1} (\rho_0^\varepsilon(x) + d)^{\frac{\gamma-1}{2}} \leq M_2$$

和对任意固定的 $T > 0$, 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} w(x, t) = \frac{2}{\gamma - 1} d^{\frac{\gamma-1}{2}}$$

这里 $M_2 = M_1 + \frac{2}{\gamma - 1} (M_1 + d)^{\frac{\gamma-1}{2}}$ 。因此存在 $L >$

0 , 使得对任意固定的 $T > 0, |x| \geq L$ 和 $t \in [0, T]$, 有 $w(x, t) \leq M$, 这里 $M \geq M_2$ 为一独立于 ε 正常数。

为了完成 $w(\rho, u)$ 上界估计的证明, 对方程 (17) 在区域 $\bar{Q}_T = [-L, L] \times [0, T]$ 上引入如下初边值问题

$$\begin{cases} w_t + \lambda_2 w_x \leq \varepsilon w_{xx} + K_1(w, z) \\ w(x, 0) \leq M \\ w(\pm L, 0) \leq M \end{cases}$$

现作如下变换 $w = \phi(v)$, 这里函数 ϕ 满足如下方程 $\int_0^{\phi(\xi)} \frac{d\tau}{\Phi(\tau)} = \ln \xi$ 。因此, 有

$$v_t + \lambda_2 v_x \leq \varepsilon \left[\frac{\phi''(v)}{\phi'(v)} (v_x)^2 + v_{xx} \right] + \frac{K_1(w, z)}{\phi'(v)}$$

(19)

进一步令 $\bar{v} = v e^{-\lambda t}$, 这里 $\lambda > 0$, 从 (19) 式可得如下不等式

$$\bar{v}_t + \lambda_2 \bar{v}_x - \varepsilon \bar{v}_{xx} \leq \varepsilon \frac{\phi''(v)}{\phi'(v)} (\bar{v}_x)^2 e^{\lambda t} - \lambda \bar{v} + \frac{K_1(w, z)}{\phi'(v)} e^{-\lambda t} \quad (20)$$

情形 I: 如果 \bar{v} 在区域 \bar{Q}_T 的最大值在 $Q_T = (-L, L) \times (0, T]$ 某个内点 (x_0, t_0) 达到, 同时不妨设 $\bar{v}(x_0, t_0) \geq e^{-\lambda t_0}$, 那么在 (x_0, t_0) 这一点有 $\bar{v}_t \geq 0, \bar{v}_x = 0, \bar{v}_{xx} \leq 0$, 结合不等式 (20), 可得

$$\lambda \bar{v} \Big|_{(x_0, t_0)} \leq \frac{K_1(w, z)}{\phi'(v)} e^{-\lambda t} \Big|_{(x_0, t_0)}$$

进一步有

$$\lambda v \phi'(v) \Big|_{(x_0, t_0)} \leq K_1(w, z) \Big|_{(x_0, t_0)} \quad (21)$$

根据假设 $\bar{v}(x_0, t_0) \geq e^{-\lambda t_0}$, 得到 $v(x_0, t_0) \geq 1$, 所以 $w(x_0, t_0) \geq 0$ 。

用 $w(x_0, t_0)$ 乘 (21) 式, 结合 (7) 式, 可得

$$(w \lambda v \phi'(v) - \Phi(|w|) |w| - c) \Big|_{(x_0, t_0)} \leq 0$$

又因为 $\phi'(v) \frac{1}{\Phi(\phi(v))} = \frac{1}{v}$ 和 $w - z \geq 0$, 所以

$$w(x_0, t_0) (\lambda - 1) \Phi(0) \leq c \quad (22)$$

当 $\lambda > 1$ 时, 由 (22) 式, 得如下 $w(x_0, t_0)$ 估计

$$w(x_0, t_0) \leq \frac{c}{(\lambda - 1) \Phi(0)}$$

根据 w, v 和 \bar{v} 之间的关系以及对任意 $(x, t) \in \bar{Q}_T, \max_{\bar{Q}_T} \bar{v}(x, t) = \bar{v}(x_0, t_0)$, 有如下不等式

$$v(x, t) = \bar{v}(x, t) e^{\lambda t} \leq \bar{v}(x_0, t_0) e^{\lambda t} = v(x_0, t_0) e^{\lambda(t-t_0)} = \phi^{-1}(w(x_0, t_0)) e^{\lambda(t-t_0)} \leq \phi^{-1} \left(\frac{c}{(\lambda - 1) \Phi(0)} \right) e^{\lambda(t-t_0)} \leq \phi^{-1} \left(\frac{c}{(\lambda - 1) \Phi(0)} \right) e^{\lambda T} \quad (23)$$

情形 II: 如果 \bar{v} 在区域 \bar{Q}_T 的最大值在 $Q_T = (-L, L) \times (0, T]$ 某个内点 (x_0, t_0) 达到, 但对任意 $(x, t) \in \bar{Q}_T, \bar{v}(x_0, t_0) < e^{-\lambda t_0}$, 也有如下不等式

$$v(x, t) = \bar{v}(x, t) e^{\lambda t} \leq \bar{v}(x_0, t_0) e^{\lambda t} < e^{\lambda(t-t_0)} \leq e^{\lambda T} \quad (24)$$

由不等式 (23) - (24), 再结合最大值在边界上取到的可能性, 即

$$\max_{\bar{Q}_T} \bar{v}(x, t) = \max_{\Gamma_T} \bar{v}(x, t) \leq M_3$$

这里

$\Gamma_T = \{(x, t) \mid x \in [-L, L], t = 0\} \cup \{(x, t) \mid x = \pm L, t \in [0, T]\}$, M_3 为一正常数。得到 $v(x, t)$ 的上界估计, 对任意 $(x, t) \in \bar{Q}_T$, 有

$$v(x, t) \leq \inf_{\lambda > 1} e^{\lambda T} \max \left\{ 1, \phi^{-1} \left(\frac{c}{(\lambda - 1) \Phi(0)} \right), \phi^{-1}(M_3) \right\}$$

根据上面讨论, 对任意 $(x, t) \in (-\infty, +\infty) \times$

$[0, T]$

$$w(\rho(x, t), u(x, t)) = \varphi(v(x, t)) \leq M(T)$$

为了证明 $z(\rho(x, t), u(x, t))$ 的下界, 引入变换 $\bar{z} = -z$, 不等式 (18) 变为

$$\bar{z}_t + \lambda_1 \bar{z}_x \leq \varepsilon \bar{z}_{xx} + K_2(w, -\bar{z})$$

完全类似证明 $w(\rho(x, t), u(x, t))$ 上界, 可得 $\bar{z}(\rho(x, t), u(x, t)) \leq M(T)$, 从而 $z(\rho(x, t), u(x, t)) \geq -M(T)$ 。因此, 对任意 $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$, $w(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t)) \leq M(T)$, $z(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t)) \geq -M(T)$ 。引理 1 证毕。

由引理 1, 可得下列引理 2。

引理 2 假设定理 1 中的条件成立, Cauchy 问题 (8) - (9) 对任意的 $T > 0$ 及 $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$ 有如下的 L^∞ 先验估计

$$0 < c(\varepsilon, t) \leq \rho^\varepsilon(x, t) \leq M_1(T), \\ |u^\varepsilon(x, t)| \leq M_1(T)$$

其中当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 或 $t \rightarrow \infty$ 时 $c(\varepsilon, t) \rightarrow 0$ 以及 $M_1(T)$ 为一仅依赖初值和固定时间 T 的正常数。

证明 由引理 1, 可直接得到如下 L^∞ 先验估计

$$\rho^\varepsilon(x, t) \leq M_1(T), |u^\varepsilon(x, t)| \leq M_1(T)$$

为了估计 ρ 的正下界, 引入变换 $v = \log \rho$, 并将 (8) 中第一个方程改写为

$$v_t + uv_x + u_x = \varepsilon(v_{xx} + v_x^2) + h_1(\rho, u, x, t)e^{-v} \quad (25)$$

则进一步有

$$v_t = \varepsilon v_{xx} + \varepsilon(v_x - \frac{u}{2\varepsilon})^2 - u_x - \frac{u^2}{4\varepsilon} + h(\rho, u, x, t) \quad (26)$$

方程(25)或(26)具有初值 $v_0(x) = \log \rho_0(x)$ 的解 v 可有如下 Green 函数 $H(x-y, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon t}} e^{-\frac{(x-y)^2}{4\varepsilon t}}$ 的积分表示

$$v = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y, t)v_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} ((x_x - \frac{u}{2\varepsilon})^2 - u_x - \frac{u^2}{4\varepsilon} + h(\rho, u, x, t))H(x-y, t-s) dy ds \quad (27)$$

由下列结论

$$\int_{-\infty}^{\infty} H(x-y, t) dy = 1,$$

$$\int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} |H_y(x-y, t-s)| dy ds = 2\sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}}$$

结合初始条件 (11) 以及条件 (C1), 上述积分 (27) 有如下估计

$$v \geq \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y, t)v_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (-u_x - \frac{u^2}{4\varepsilon} + h(\rho, u, x, t))H(x-y, t-s) dy ds = \int_{-\infty}^{\infty} H(x-y, t)v_0(y) dy + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} uH_y(x-y, t-s) - (\frac{u^2}{4\varepsilon} - h(\rho, u, x, t))H(x-y, t-s) dy ds \geq$$

$$\log \varepsilon - 2M_4 \sqrt{\frac{t}{\pi\varepsilon}} - M_5 t \geq -C(\varepsilon, t) > -\infty$$

从而 $\rho^\varepsilon(x, t)$ 对固定的 ε 和 $t < \infty$ 有一正下界 $c(\varepsilon, t)$ 。引理 2 证毕。

3 熵 - 熵流对和 H^{-1} 紧性条件

根据关于熵 - 熵流对的定义, 一对实值函数 (η, q) 若满足如下微分方程组

$$(q_\rho, q_u) = (u\eta_\rho + \frac{\rho'(\rho)}{\rho}\eta_u, \rho\eta_\rho + u\eta_u) \quad (28)$$

则为方程组 (1) 的熵 - 熵流对。对如下压力函数 $p(\rho) = \int_0^\rho s^2(s+d)^{\gamma-3} ds$, 上述微分方程组 (28) 简化为

$$(q_\rho, q_u) = (u\eta_\rho + \rho(\rho+d)^{\gamma-3}\eta_u, \rho\eta_\rho + u\eta_u) \quad (29)$$

从 (29) 式中消除 q , 则有

$$\eta_{\rho\rho} = (\rho+d)^{\gamma-3}\eta_{uu} \quad (30)$$

根据 DiPerna 的著名文章 [13], 求解方程 (30), 经复杂计算 (详见 [7]), 可得如下四组 Lax 型熵 - 熵流对:

$$\begin{cases} \eta_k^1 = e^{kw}((\rho+d)^{-\frac{\gamma-3}{4}} + O(\frac{1}{k})) \\ \eta_{-k}^1 = e^{-kw}((\rho+d)^{-\frac{\gamma-3}{4}} + O(\frac{1}{k})) \\ \eta_k^2 = e^{kz}((\rho+d)^{-\frac{\gamma-3}{4}} + O(\frac{1}{k})) \\ \eta_{-k}^2 = e^{-kz}((\rho+d)^{-\frac{\gamma-3}{4}} + O(\frac{1}{k})) \end{cases} \quad (31)$$

在 $\rho \geq 0$ 区域; 和

$$\begin{cases} q_k^1 = \eta_k^1(\lambda_2 - \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)} + O(\frac{1}{k^2})) \\ q_{-k}^1 = \eta_{-k}^1(\lambda_1 + \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)} + O(\frac{1}{k^2})) \\ q_k^2 = \eta_k^2(\lambda_1 - \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)} + O(\frac{1}{k^2})) \\ q_{-k}^2 = \eta_{-k}^2(\lambda_2 + \frac{(\gamma+1)\rho+4d}{4k(\rho+d)} + O(\frac{1}{k^2})) \end{cases} \quad (32)$$

在 $\rho \geq 0$ 区域。

另外容易验证方程组 (1) 有如下严格凸熵

$$\eta^* = \frac{1}{(\gamma - 2)(\gamma - 1)}(\rho + d)^{\gamma-1} + \frac{1}{2}u^2$$

对应于上述严格凸熵, 有如下引理。

引理 3 假设定理 1 中的条件 (C1) - (C3) 成立, 对任意固定 $\varepsilon > 0$, $\varepsilon^{\frac{1}{2}}\rho^\varepsilon(x, t)$ 和 $\varepsilon^{\frac{1}{2}}u^\varepsilon(x, t)$ 在 $L^2_{loc}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ 中一致有界。

证明 略, 参见文 [7]。

注意到上述所有熵 - 熵流对 (31) 和 (32) 在 $\rho \geq 0$ 区域内的光滑性, 有如下引理。

引理 4 对由 (31) 式和 (32) 式中给出的任意熵 - 熵流对 $(\eta(\rho, u), q(\rho, u))$ 对应于方程组 (8) 的黏性解序列有 $\eta(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))_t + q(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))_x$ 为 $H^{-1}_{loc}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ 中紧集。

证明 略, 参见文 [7]。

4 定理 1 的证明

证明 根据补偿列紧理论, 定理 1 的证明简化为由粘性解 $(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))$ 所定义的一族正 Young 测度为一 Dirac 测度。

由引理 1 知, Cauchy 问题 (8) - (9) 黏性解序列 $(\rho^\varepsilon(x, t), u^\varepsilon(x, t))$ 对任意 $T > 0$ 是 $L^\infty(\mathbf{R} \times [0, T])$ 中有界集, 根据 [7] 中定理 2.2.1, 只需研究相关的一族紧的概率测度 $\nu_{x,t}$ 。不失一般性, 在固定点 $(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^+$, 研究其测度 ν 。

对方程组 (1) 任意熵 - 熵流对 (η_i, q_i) , $i = 1, 2$, 由引理 4, $\eta(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)_t + q(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)_x$ 在 $H^{-1}_{loc}(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^+)$ 中紧, 应用 [7] 中弱收敛定理 2.1.4, 有

$$\frac{\eta_1(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) \cdot q_2(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) - \eta_2(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) \cdot q_1(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)}{\eta_1(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) \cdot q_2(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) - \eta_2(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) \cdot q_1(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)}$$

这里用 $\eta(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon) = (w^*) - \lim \eta(\rho^\varepsilon, u^\varepsilon)$ 表示弱收敛。那末根据 Young 测度表示定理, 有如下测度方程

$$\langle \nu, \eta_1 \rangle \langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \nu, q_1 \rangle = \langle \nu, \eta_1 q_2 - \eta_2 q_1 \rangle \quad (33)$$

设 Q 表示最小的特征矩形

$$Q = \{(\rho, u) : w_- \leq w \leq w_+, z_- \leq z \leq z_+, \rho \geq 0\}$$

下证测度支集 $\text{supp } \nu$ 或只含点 $(0, 0)$ 或只含有另一个点 (w^*, z^*) 。

假设 $\text{supp } \nu$ 不只含有唯一的点 $(0, 0)$ 或含有另一个点 (w^*, z^*) , 那么有 $\langle \nu, \eta_k^1 \rangle > 0$ 和 $\langle \nu, \eta_k^2 \rangle > 0$, 这里 η_k^1, η_k^2 由 (31) 式给定。因此可引入如下在 Q 上定义的两个新的概率测度

$$\mu_k^+, \mu_k^-$$

$$\langle \mu_k^+, h \rangle = \frac{\langle \nu, h \eta_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^1 \rangle},$$

$$\langle \mu_k^-, h \rangle = \frac{\langle \nu, h \eta_k^2 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^2 \rangle}$$

其中 $h = h(w, z)$ 表示任意连续函数。显然 μ_k^+, μ_k^- 一致有界, 由其弱星紧性, 则存在 Q 上概率测度 μ^\pm , 使得选择适当子列后有下式成立

$$\langle \mu^\pm, h \rangle = \lim_{k \rightarrow \infty} \langle \mu_k^\pm, h \rangle$$

进一步有

$$\text{supp } \mu^+ = Q \cap \{(\rho, u) : w = w_+\} \quad (34)$$

和

$$\text{supp } \mu^- = Q \cap \{(\rho, u) : w = w_-\} \quad (35)$$

事实上, 对任意函数 $h(w, z) \in C_0(Q)$, 若满足

$$\text{supp } h(w, z) \subset Q \cap \{(\rho, u) : w \leq w_0\}$$

其中 w_0 为满足 $w_0 < w_+$ 的任意数。当 $k \rightarrow \infty$ 时, 因 Q 表示 ν 最小的特征矩形, 有

$$\frac{|\langle \nu, h \eta_k^1 \rangle|}{|\langle \nu, \eta_k^1 \rangle|} = \frac{|\langle \nu, h e^{kw} ((\rho + d)^{-\frac{\gamma-3}{4}} + O(\frac{1}{k})) \rangle|}{|\langle \nu, e^{kw} ((\rho + d)^{-\frac{\gamma-3}{4}} + O(\frac{1}{k})) \rangle|} \leq \frac{c_1 e^{k(w_0+\delta)}}{c_2 e^{k(w_+-\delta)}} = \frac{c_1}{c_2} e^{k(w_0+2\delta-w_+)} \rightarrow 0$$

其中 c_1, c_2 是两个适当得正常数, 且 $\delta > 0$ 满足 $2\delta < w_+ - w_0$ 。从而证明了 (34)。类似地可证 (35)。

设 (33) 式中 $(\eta_1, q_1) = (\eta_k^1, q_k^1)$, 那么有

$$\langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \nu, q_k^1 \rangle = \frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_2 - \eta_2 q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^1 \rangle}$$

利用 (32) 式中的估计并令上式 $k \rightarrow \infty$, 从而有

$$\langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \mu^+, \lambda_2 \rangle = \langle \mu^+, q_2 - \lambda_2 \eta_2 \rangle \quad (36)$$

类似地, 令 $(\eta_1, q_1) = (\eta_k^2, q_k^2)$, 同样有

$$\langle \nu, q_2 \rangle - \langle \nu, \eta_2 \rangle \langle \mu^-, \lambda_2 \rangle = \langle \mu^-, q_2 - \lambda_2 \eta_2 \rangle \quad (37)$$

在 (33) 式中令 $(\eta_1, q_1) = (\eta_k^1, q_k^1)$ 和 $(\eta_2, q_2) = (\eta_k^2, q_k^2)$, 可得

$$\frac{\langle \nu, q_k^2 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^2 \rangle} - \frac{\langle \nu, q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^1 \rangle} = \frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_k^2 - \eta_k^2 q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_k^2 \rangle \langle \nu, \eta_k^1 \rangle} < \langle \nu, \eta_k^1 \rangle < \nu, \eta_k^1 >$$

因此可断言 $w_- = w_+$ 。否则, 选择 $\delta_0 > 0$ 满足 $2\delta_0 < w_+ - w_-$, 对适当正常数 c_1, c_2 下式成立

$$\langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle \geq c_1 e^{-k(w_+ + \delta_0)}, \quad \langle \nu, \eta_k^1 \rangle \geq c_2 e^{k(w_+ - \delta_0)}$$

从而, 运用 (31) 式和 (32) 式中对熵和熵流的估计, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, (38) 式右边满足

$$\frac{\langle \nu, \eta_k^1 q_{-k}^2 - \eta_{-k}^2 q_k^1 \rangle}{\langle \nu, \eta_{-k}^2 \rangle \langle \nu, \eta_k^1 \rangle} = O\left(\frac{1}{k}\right) e^{-k(w_+ - w_- - 2\delta_0)} \rightarrow 0$$

在 (38) 式中令 $k \rightarrow \infty$, 则有 $\langle \mu^+, \lambda_2 \rangle = \langle \mu^-, \lambda_2 \rangle$ 。结合 (36) 式和 (37) 式, 对任意满足 $\eta_i + q_x$ 在 $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+)$ 中紧的熵-熵流对 (η, q) , 有如下关系式

$$\langle \mu^+, q - \lambda_2 \eta \rangle = \langle \mu^-, q - \lambda_2 \eta \rangle \quad (39)$$

在 (39) 式中, 令 $(\eta, q) = (\eta_{-k}^2, q_{-k}^2)$ 。如果 $w_+ - w_- > 2\delta_0$, 从等式 (39) 的左边可得

$$\langle \mu^+, q - \lambda_2 \eta \rangle \geq \frac{c_1}{k} e^{-k(w_+ - \delta_0)}$$

且从等式 (39) 的右边可得

$$\langle \mu^-, q - \lambda_2 \eta \rangle \leq \frac{c_2}{k} e^{-k(w_- + \delta_0)}$$

其中 c_1, c_2 为适当正常数。这是不可能的, 因此 $w_- = w_+$ 。同理用熵-熵流对 (η_k^2, q_k^2) 和 (η_{-k}^1, q_{-k}^1) 可证 $z_- = z_+$ 。因此 ν 的支集不是原点 $(0, 0)$ 就是另一个点 (w^*, z^*) 。定理 1 证毕。

参考文献:

- [1] LIU T P. Nonlinear stability and instability of transonic flows through a nozzle [J]. *Comm Math Phys*, 1982, 83 (2): 243 - 260.
- [2] WHITHAM G B. *Linear and nonlinear waves* [M]. New York: John Wiley and Sons, 1973.
- [3] EARNSHAW S. On the mathematical theory of sound

[J]. *Philos Trans*, 1858, 150(5): 1150 - 1154.

- [4] DIPERNA R J. Global solutions to a class of nonlinear hyperbolic systems of equations [J]. *Comm Pure Appl Math*, 1973, 26(1): 1 - 28.
- [5] LU Y G. Convergence of the viscosity method for non-strictly hyperbolic conservation laws [J]. *Comm Math Phys*, 1992, 150(1): 59 - 64.
- [6] LU Y G. Existence of global entropy solutions to a non-strictly hyperbolic system [J]. *Arch Rat Mech Anal*, 2005, 178 (2): 287 - 299.
- [7] LU Y G. *Hyperbolic Conservation Laws and the Compensated Compactness Method* [M]. New York: Chapman and Hall, CRC Press, 2002.
- [8] LIU T P. Quasilinear hyperbolic systems [J]. *Comm Math Phys*, 1979, 68 (2): 141 - 172.
- [9] DING X X, CHEN G Q, LUO P Z. Convergence of the fractional step Lax-Friedrichs scheme and Godunov scheme for the isentropic system of gas dynamics [J]. *Comm Math Phys*, 1989, 121 (1): 63 - 84.
- [10] CHEN G Q, GLIMM J. Global solutions to the compressible Euler equations with geometric structure [J]. *Comm Math Phys*, 1996, 180 (1): 153 - 193.
- [11] 陆云光. 一类非线性双曲型耦合方程组广义解的存在性 [J]. *系统科学与数学*, 1996, 16(2): 125 - 135.
- [12] LADYZHENSKAYA O A, SOLONNIKOV V A, URALTSEVA N N. *Linear and quasilinear equations of parabolic type* [M]. Translation of Mathematical Monographs 23, AMS, Providence, 1968.
- [13] DIPERNA R J. Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics [J]. *Comm Math Phys*, 1983, 91(1): 1 - 30.

(上接第 22 页)

- [8] ZHAO X X, LIN P. The equivalence between Bergman metric and Einstein-Kähler metric on the Cartan-Hartogs domain of the fourth type [J]. *Chin Quart J of Math*, 2008, 23 (3): 317 - 324.
- [9] 王安, 殷慰萍, 张利友, 等. Cartan-Hartogs 域的 Einstein-Kähler 度量 [J]. *中国科学: A 辑*, 2006, 36

(11): 1201 - 1233.

- [10] 殷慰萍. 华罗庚域的研究综述 [J]. *数学进展*, 2007, 36 (2): 129 - 152.
- [11] 殷慰萍. 有界域的 Bergman 核函数显式表示的最新进展 [J]. *数学进展*, 2002, 31 (4): 295 - 312.