第 51 卷 第 2 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 51 No. 2
2012 年 3 月　　ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI　　Mar. 2012

具脉冲和时滞影响的向量抛物型方程振动性的新准则*

罗李平，王艳群，宫兆刚
（衡阳师范学院数学与计算科学系，湖南 衡阳 421002）

摘　要：研究一类基于脉冲和时滞影响的向量抛物型偏微分方程的振动性，利用脉冲时滞微分不等式，建立了该类方程在 Dirichlet 边值条件下所有解 ***H***-振动的若干新的充分判据，这里 ***H*** 是 R^m 中的单位向量。所得结果充分反映了脉冲和时滞在方程振动中的影响作用。

关键词：***H***-振动；向量；抛物型方程；脉冲；时滞
中图分类号：O175.26　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）02－0045－04

New Criteria for Oscillation of Vector Parabolic Equations with Influence of Impulse and Delay

LUO Liping, *WANG Yanqun*, *GONG Zhaogang*
(Department of Mathematics and Computational Science, Hengyang Normal University, Hengyang 421002, China)

Abstract: The oscillation for a class of vector parabolic partial differential equations based on the influence of impulse and delay is investigated. By using impulsive delay differential inequality, some new sufficient criteria are established for ***H***-oscillation of all solutions of such equations under Dirichlet boundary value condition, where ***H*** is a unit vector in R^m. The obtained results fully reflect the influence action of impulse and delay in equation oscillation.

Key words: ***H***-oscillation; vector; parabolic equation; impulse; delay

H-振动的概念是研究向量微分方程的新的有力工具，文献［1］在研究向量常微分方程时首次引入了 ***H***-振动的概念，这里 ***H*** 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。关于这一概念及其应用，文献［2］作了很好的阐述。近年来，关于具时滞影响的向量偏微分方程的 ***H***-振动性研究已经取得了一些很好的结果[3-5]，但关于具脉冲和时滞影响的向量偏微分方程的 ***H***-振动性研究还相对较少[6-9]。本文的目的是讨论一类具脉冲和时滞影响的向量抛物型偏微分方程，利用 ***H***-振动的概念及内积降维的方法，将多维振动问题化为一维脉冲微分不等式不存在最终正解的问题，获得了这类方程在 Dirichlet 边值条件下所有解 ***H***-振动的若干充分条件。

考虑如下的基于脉冲和时滞影响的向量抛物型偏微分方程

$$\begin{cases} U_t(t,x) = a(t)\Delta U(t,x) + b(t)\Delta U(t-\tau,x) - \\ \qquad p(t,x)U(t,x) - q(t,x)U(t-\sigma,x), \\ \qquad (t,x) \in \mathbf{R}_+ \times \Omega \equiv G, t \neq t_k \\ U(t_k^+,x) - U(t_k^-,x) = I(t_k,x)U(t_k,x), k = 1,2,\cdots \end{cases} \tag{1}$$

其中 $U(t,x) \in C^2([t_0,\infty) \times \Omega;\mathbf{R}^m)$ 是向量函数，$\mathbf{R}_+ = [0,\infty)$，$\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是具有逐片光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，Δ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 维 Laplace 算子，τ,σ 均为正常数，$0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \cdots$ 是固定点列且 $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = \infty$。

同时考虑 Dirichlet 边值条件：

* 收稿日期：2011－06－16
基金项目：湖南省自然科学-衡阳联合基金资助项目（11JJ9002）；湖南省“十二五”重点建设学科资助项目
作者简介：罗李平（1964 年生），男，教授；E-mail：luolp3456034@163.com

$$U(t,x)=0,\quad (t,x)\in\mathbf{R}_+\times\partial\Omega, t\neq t_k \tag{2}$$
其中 0 是 $\mathbf{R}^m$ 中的零向量。

在本文中，我们总假设下列条件成立：

(H_1) $a(t),b(t)\in PC(\mathbf{R}_+,\mathbf{R}_+)$, $p(t,x),q(t,x)\in PC(\mathbf{R}_+\times\bar\Omega,\mathbf{R}_+)$，这里 PC 表示具有如下性质的分片连续函数类：仅在 $t=t_k, k=1,2,\cdots$ 为第一类间断点，但在 $t=t_k,k=1,2,\cdots$ 左连续；

(H_2) $I(t,x):\mathbf{R}_+\times\bar\Omega\to\mathbf{R}$ 且 $I(t_k,x)\leqslant b_k$，b_k 是正常数，$k=1,2,\cdots$。

定义 1 向量函数 $U(t,x)\in C^2([t_0,\infty)\times\Omega,\mathbf{R}^m)$ 称为边值问题(1)－(2)的解，若 $U(t,x)$ 满足：

(A) 对固定的 t，$t\neq t_k$，$k=1,2,\cdots$，$U(t,x)$ 关于 x 二次可微；对 $t\neq t_k$，$k=1,2,\cdots$，$x\in\Omega$，$U(t,x)$ 关于 t 一次可微，且满足方程（1）；

(B) 对固定的 x, $U(t,x)$ 是以 $t=t_k$，$k=1,2,\cdots$ 为第一类间断点的分片连续函数，在脉冲时刻满足如下关系式：$U(t_k,x)=U(t_k^-,x)$，$U(t_k^+,x)=U(t,x)+I(t_k,x)U(t_k,x)$，$k=1,2,\cdots$，且满足方程（1）中的脉冲条件；

(C) 对 $t\neq t_k,k=1,2,\cdots,x\in\partial\Omega$，$U(t,x)$ 满足边值条件（2）。

定义 2 边值问题(1)－(2)的解 $U(t,x)$ 称为 $\boldsymbol{H}$-振动的，若对 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量 $\boldsymbol{H}$ 及任意大的 $T\geqslant 0$，存在一点 $(t_0,x_0)\in[T,\infty)\times\Omega$，使得内积 $<U(t_0,x_0),H>=0$。

众所周知[10]，Dirichlet 特征值问题
$$\begin{cases}\Delta\omega(x)+\lambda\omega(x)=0, & x\in\Omega,\lambda \text{ 是常数}\\ \omega(x)=0, & x\in\partial\Omega\end{cases}\tag{3}$$
的第一特征值 $\lambda_0>0$，并且与 λ_0 对应的特征函数 $\varphi(x)>0$, $x\in\Omega$。

为叙述方便，在本文中引入如下记号
$$U_H(t,x)=<U(t,x),H>,$$
$$W(t)=\int_\Omega U_H(t,x)\varphi(x)\mathrm{d}x, t\in\mathbf{R}_+,$$
其中 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量，$<U,V>$ 表示 $\mathbf{R}^m$ 中向量 U 和 V 的内积。

引理 1 设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量且 $U(t,x)$ 是方程（1）的解。若 $U_H(t,x)$ 最终为正，则 $U_H(t,x)$ 是纯量脉冲抛物型偏微分不等式
$$\begin{cases}\dfrac{\partial U_H(t,x)}{\partial t}-a(t)\Delta U_H(t,x)-b(t)\Delta U_H(t-\tau,x)+\\ \qquad P(t)U_H(t,x)+Q(t)U_H(t-\sigma,x)\leqslant 0,\\ \qquad (t,x)\in G, t\neq t_k\\ U_H(t_k^+,x)\leqslant(1+b_k)U_H(t_k,x), k=1,2,\cdots\end{cases}\tag{4}$$
的解，其中 $P(t)=\min\limits_{x\in\bar\Omega}\{p(t,x)\}$，$Q(t)=\min\limits_{x\in\bar\Omega}\{q(t,x)\}$。

引理 1 的证明很简单，在此略去。

相应于边值条件（2），考虑纯量边值条件：
$$U_H(t,x)=0,\quad (t,x)\in\mathbf{R}_+\times\partial\Omega, t\neq t_k \tag{2'}$$
利用引理 1，容易得到

定理 1 设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。若在边值条件（2′）下纯量脉冲抛物型偏微分不等式（4）无最终正解，则边值问题(1)－(2)的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 H-振动。

定理 2 设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。若脉冲微分不等式
$$\begin{cases}W'(t)+[\lambda_0 a(t)+P(t)]W(t)+\lambda_0 b(t)W(t-\tau)+\\ \qquad Q(t)W(t-\sigma)\leqslant 0, t\geqslant 0, t\neq t_k\\ W(t_k^+)\leqslant(1+b_k)W(t_k), k=1,2,\cdots\end{cases}\tag{5}$$
无最终正解，则边值问题(1)－(2)的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 $\boldsymbol{H}$-振动，其中 λ_0 由问题（3）确定。

定理 2 的证明完全类似于文献[7]中的定理 2，在此略去。

下面我们在上述讨论的基础上，给出判别边值问题(1)－(2)的所有解 $\boldsymbol{H}$-振动的进一步结果。

定理 3 设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。若

(i) 存在一常数 $\beta>0$，使得 $t_{k+1}-t_k\geqslant\beta$，$k=1,2,\cdots$，且 $\tau\geqslant\beta$；

(ii) $\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{1+b_k}\displaystyle\int_{t_k}^{t_k+\beta}B(s)\mathrm{d}s>\dfrac{1}{\lambda_0}$，

则边值问题(1)－(2)的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 $\boldsymbol{H}$-振动，其中 $B(s)=b(s)\exp(\int_{s-\tau}^{s}[\lambda_0 a(\xi)+P(\xi)]\mathrm{d}\xi)$，且 λ_0 由问题（3）确定。

证明 由定理 2 知，只需要证明在定理 3 的条件下，脉冲微分不等式（5）无最终正解即可。

假设脉冲微分不等式（5）存在最终正解 $W(t)$，$t\geqslant T+\tau>0$，$T\geqslant 0$。由（5）易知当 $t\geqslant T+\tau$，$t\neq t_k$ 时，$W(t)$ 在区间 (t_k,t_{k+1})，$k=1,2,\cdots$ 上非增且有
$$W'(t)+[\lambda_0 a(t)+P(t)]W(t)+$$
$$\lambda_0 b(t)W(t-\tau)\leqslant 0, t\geqslant T+\tau, t\neq t_k \tag{6}$$
在（6）式两端乘以 $\exp(\int_{T_1}^{t}[\lambda_0 a(\xi)+P(\xi)]\mathrm{d}\xi)$，$t>T_1\geqslant T+\tau$，且令
$$y(t)=W(t)\exp(\int_{T_1}^{t}[\lambda_0 a(\xi)+P(\xi)]\mathrm{d}\xi), t>T_1 \tag{7}$$

可得

$$y'(t)+\lambda_0 B(t)y(t-\tau)\leqslant 0,\ t>T_1+\tau,\ t\neq t_k \tag{8}$$

由(7)－(8)两式可知，$y(t)$ 是一个非增函数。

对 $t=t_k$，结合（5）中的脉冲条件，有

$$y(t_k^+)=W(t_k^+)\exp\left(\int_{T_1}^{t}[\lambda_0 a(\xi)+P(\xi)]\mathrm{d}\xi\right)\leqslant$$

$$(1+b_k)W(t_k)\exp\left(\int_{T_1}^{t}[\lambda_0 a(\xi)+P(\xi)]\mathrm{d}\xi\right)=(1+b_k)y(t_k) \tag{9}$$

对（8）式从 t_k 到 $t_k+\beta$ 积分，并注意到 $y(t)$ 的非增性可得

$$0\geqslant y(t_k+\beta)-y(t_k^+)+\lambda_0\int_{t_k}^{t_k+\beta}B(s)y(s-\tau)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$y(t_k+\beta)-y(t_k^+)+\lambda_0 y(t_k+\beta-\tau)\int_{t_k}^{t_k+\beta}B(s)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$y(t_k+\beta)-y(t_k^+)+\lambda_0 y(t_k)\int_{t_k}^{t_k+\beta}B(s)\mathrm{d}s \tag{10}$$

由(9)－(10)两式得

$$y(t_k+\beta)+y(t_k^+)\left[\frac{\lambda_0}{1+b_k}\int_{t_k}^{t_k+\beta}B(s)\mathrm{d}s-1\right]\leqslant 0$$

这与条件（ii）矛盾。证毕。

类似定理 3 的证明可得如下结论。

定理 4　设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。若

（i）存在一常数 $\beta>0$，使得 $t_{k+1}-t_k\geqslant\beta$，$k=1,2,\cdots$，且 $\beta>\tau$；

（ii）$\limsup\limits_{k\to\infty}\dfrac{1}{1+b_k}\displaystyle\int_{t_k}^{t_k+\tau}B(s)\mathrm{d}s>\dfrac{1}{\lambda_0}$，

则边值问题(1)－(2)的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 $\boldsymbol{H}$-振动，其中 λ_0 由问题（3）确定。

定理 5　设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。若

（i）存在一常数 $\beta>0$，使得 $t_{k+1}-t_k\geqslant\beta$，$k=1,2,\cdots$，且 $\beta>\tau$；

（ii）存在某一常数 $\alpha>0$，使得 $0<b_k<\alpha$，$k=1,2,\cdots$；

（iii）$\limsup\limits_{k\to\infty}\displaystyle\int_{t-\tau}^{t}B(s)\mathrm{d}s>\dfrac{1+\alpha}{\lambda_0\mathrm{e}}$，

则边值问题(1)－(2)的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 $\boldsymbol{H}$-振动，其中 λ_0 由问题（3）确定。

证明　由定理 2 知，只需要证明在定理 5 的条件下，脉冲微分不等式（5）无最终正解即可。

假设脉冲微分不等式（5）存在最终正解 $W(t)$，$t\geqslant T+\tau>0$，$T\geqslant 0$。则类似于定理 3 的证明可知，

当 $t>T_1\geqslant T+\tau$，$t\neq t_k$ 时，函数 $y(t)=W(t)\exp\left(\int_{T_1}^{t}[\lambda_0 a(\xi)+P(\xi)]\mathrm{d}\xi\right)$ 非增且有（8）式。

定义 $V(t)=\dfrac{y(t-\tau)}{y(t)}$，$t\geqslant T_1+\tau$。考虑区间 $[T_1-\tau,t]$ 且 $t_k\in(t-\tau,t)$，有

$$y(t-\tau)\geqslant y(t_k)\geqslant\frac{1}{1+b_k}y(t_k^+)\geqslant\frac{1}{1+b_k}y(t)$$

则有

$$V(t)=\frac{y(t-\tau)}{y(t)}\geqslant\frac{1}{1+b_k}\geqslant\frac{1}{1+\alpha}$$

下证函数 $V(t)$ 有上界。令 t_k 是 $[t-2\tau,t-\tau]$ 上的脉冲点。在 $[t-\frac{\tau}{2},t]$ 上对（8）式积分，有

$$y(t)-y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)+\lambda_0\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}B(s)y(s-\tau)\mathrm{d}s\leqslant 0$$

于是有

$$y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\geqslant\lambda_0\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}B(s)y(s-\tau)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda_0\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t+\tau^-}B(s)y(s-\tau)\mathrm{d}s+\lambda_0\int_{t+\tau^+}^{t}B(s)y(s-\tau)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\frac{\lambda_0 y(t-\tau)}{1+\alpha}\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}B(s)\mathrm{d}s \tag{11}$$

在 $[t-\tau,t-\frac{\tau}{2}]$ 上对（8）式积分，有

$$y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)-y(t-\tau)+\lambda_0\int_{t-\tau}^{t-\frac{\tau}{2}}B(s)y(s-\tau)\mathrm{d}s\leqslant 0$$

则有

$$y(t-\tau)\geqslant\lambda_0\int_{t-\tau}^{t-\frac{\tau}{2}}B(s)y(s-\tau)\mathrm{d}s\geqslant$$

$$\lambda_0 y\left(t-\frac{3\tau}{2}\right)\int_{t-\tau}^{t-\frac{\tau}{2}}B(s)\mathrm{d}s \tag{12}$$

于是，由（11）－（12）两式有

$$y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\geqslant\frac{\lambda_0^2 y\left(t-\frac{3\tau}{2}\right)}{1+\alpha}\left(\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}B(s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_{t-\tau}^{t-\frac{\tau}{2}}B(s)\mathrm{d}s\right)$$

从而有

$$\frac{y\left(t-\frac{3\tau}{2}\right)}{y\left(t-\frac{\tau}{2}\right)}\leqslant\frac{1+\alpha}{\lambda_0^2\left(\int_{t-\frac{\tau}{2}}^{t}B(s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_{t-\tau}^{t-\frac{\tau}{2}}B(s)\mathrm{d}s\right)}\leqslant M$$

因此，$V(t)$ 有上界。

对充分大的 t，由（8）式可得

$$\int_{t-\tau}^{t}\frac{y'(s)}{y(s)}\mathrm{d}s+\lambda_0\int_{t-\tau}^{t}B(s)\frac{y(s-\tau)}{y(s)}\mathrm{d}s\leqslant 0 \tag{13}$$

又由于

$$\int_{t-\tau}^{t}\frac{y'(s)}{y(s)}\mathrm{d}s=\int_{t-\tau}^{t_k^-}\frac{y'(s)}{y(s)}\mathrm{d}s+\int_{t_k^+}^{t}\frac{y'(s)}{y(s)}\mathrm{d}s=$$

$$\ln\left(\frac{y(t_k)}{y(t-\tau)}\cdot\frac{y(t)}{y(t_k^+)}\right)\geqslant$$

$$\ln\left(\frac{y(t)}{y(t-\tau)}\cdot\frac{1}{1+b_k}\right) \tag{14}$$

于是，由(13)－(14)两式可得

$$\ln \frac{y(t-\tau)}{y(t)}(1+b_k) \geqslant \lambda_0 \int_{t-\tau}^{t} B(s)\frac{y(s-\tau)}{y(s)}\mathrm{d}s \tag{15}$$

令 $V_0 = \liminf_{t\to\infty} V(t)$，则 V_0 有限且是正的。由(15)式有

$$\ln[(1+\alpha)V(t)] \geqslant \lambda_0 V_0 \int_{t-\tau}^{t} B(s)\mathrm{d}s$$

因此

$$\liminf_{k\to\infty}\int_{t-\tau}^{t} B(s)\mathrm{d}s \leqslant \frac{\ln[(1+\alpha)V_0]}{\lambda_0 V_0} \leqslant \frac{1+\alpha}{\lambda_0 \mathrm{e}}$$

这与条件（iii）矛盾。证毕。

由脉冲微分不等式（5）有

$$W'(t)+[\lambda_0 a(t)+P(t)]W(t)+$$
$$Q(t)W(t-\sigma) \leqslant 0, t \geqslant T+\tau,\ t \neq t_k$$

类似定理3－定理5的证明可得如下结论。限于篇幅，其证明在此略去。

定理6　设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。若

(i) 存在一常数 $\beta>0$，使得 $t_{k+1}-t_k \geqslant \beta$，$k=1,2,\cdots$，且 $\sigma \geqslant \beta$；

(ii) $\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{1+b_k}\int_{t_k}^{t_k+\beta}\bar{B}(s)\mathrm{d}s > 1$，

则边值问题（1）－（2）的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 $\boldsymbol{H}$-振动，其中 $\bar{B}(s)=Q(s)\exp(\int_{s-\tau}^{s}[\lambda_0 a(\xi)+P(\xi)]\mathrm{d}\xi)$，且 λ_0 由问题（3）确定。

定理7　设 $\boldsymbol{H}$ 是 R^m 中的单位向量。若

(i) 存在一常数 $\beta>0$，使得 $t_{k+1}-t_k \geqslant \beta$，$k=1,2,\cdots$，且 $\beta>\sigma$；

(ii) $\limsup_{k\to\infty}\frac{1}{1+b_k}\int_{t_k}^{t_k+\sigma}\bar{B}(s)\mathrm{d}s > 1$，

则边值问题(1)－(2)的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 $\boldsymbol{H}$-振动。

定理8　设 $\boldsymbol{H}$ 是 $\mathbf{R}^m$ 中的单位向量。若

(i) 存在一常数 $\beta>0$，使得 $t_{k+1}-t_k \geqslant \beta$，$k=1,2,\cdots$，且 $\beta>\sigma$；

(ii) 存在某一常数 $\alpha>0$，使得 $0<b_k<\alpha$，$k=1,2,\cdots$；

(iii) $\limsup_{k\to\infty}\int_{t-\sigma}^{t}\bar{B}(s)\mathrm{d}s > \frac{1+\alpha}{\mathrm{e}}$，

则边值问题(1)－(2)的所有解 $U(t,x)$ 在 G 内 $\boldsymbol{H}$-振动。

参考文献：

[1] DOMSLAK JU I. On the oscillation of solutions of vector differential equations [J]. Soviet Math Dokl, 1970, 11: 839－841.

[2] COURANT R, HILBERT D. Methods of Mathematical Physics, Volume I [M]. New York: Interscience, 1996.

[3] MINCHEV E, YOSHIDA N. Oscillation of solutions of vector differential equations of parabolic type with functional arguments [J]. J Comput Appl Math, 2003, 151(1): 107－117.

[4] LI W N, HAN M A, MENG F W. H-oscillation of solutions of certain vector hyperbolic differential equations with deviating arguments [J]. Appl Math Comput, 2004, 158(3): 637－653.

[5] LUO L P. Oscillation of solutions of neutral vector parabolic equations with continuous distribution delay[C]// Proceedings of the 7th Conference on Biological Dynamic System and Stability of Differential Equation, Vol. Ⅱ, Liverpool: World Academic Press, 2010:664－668.

[6] LI W N, HAN M A. Oscillation of solutions for certain impulsive vector parabolic differential equations with delays [J]. J Math Anal Appl, 2007, 326(1): 363－371.

[7] 罗李平，俞元洪. 脉冲向量中立型抛物偏微分方程的H-振动性[J]. 数学学报，2010，53(2)：257－262.

[8] 罗李平，杨柳，曾云辉. 脉冲向量中立型抛物方程解的H-振动性[J]. 高校应用数学学报:A辑，2010，25(4)：463－468.

[9] 罗李平，俞元洪. 脉冲向量时滞双曲型方程的H-振动性[J]. 中山大学学报:自然科学版，2008，47(6)：1－4.

[10] GILBARG D, TRUDINGER N S. Elliptic partial equations of second order [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1977.