一类广义超几何多项式零点的渐近分布*

周建荣[1]，覃跃海[2]，刘赛玉[3]，陈　剑[1]
（1. 佛山科学技术学院理学院数学系，广东 佛山 528000；
2. 广东第二师范学院数学系，广东 广州 510303；
3. 湖南科技大学数学与计算科学学院，湖南 湘潭 411201）

□　□：利用经典的系数分析方法导出了一类广义超几何多项式：

$$ {}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix} -n, n+a_1, n+a_2, \cdots, n+a_{q-1}, a_q; \\ n+b_1, n+b_2, \cdots, n+b_{q-1}, -n+b_q; \end{matrix} z\right] $$

零点的渐近分布。进一步借助于 Enestrom-Kakeya 定理，得到了其零点沿不同方向渐近趋于单位圆周的充分条件。

□ □ □：零点；广义超几何多项式；零点的渐近分布
□ □ □ □ □：O174　　□ □ □ □ □：A　　□ □ □ □：0529－6579（2013）02－0038－05

Asymptotic Distribution of the Zeros of a Certain Class of Generalized Hypergeometric Polynomials

ZHOU Jianrong[1], *QIN Yuehai*[2], *LIU Saiyu*[3], *CHEN Jian*[1]
（1. Department of Mathematics, Foshan University, Foshan 528000, China;
2. Department of Mathematics, Guangdong Institute of Education, Guangzhou 510303 China;
3. School of Mathematics and Computing Science, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China）

Abstract: The approach to analysis of coefficients is used to analyze the asymptotic distribution of zeros of a certain class of generalized hypergeometric polynomials:

$$ {}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix} -n, n+a_1, n+a_2, \cdots, n+a_{q-1}, a_q; \\ n+b_1, n+b_2, \cdots, n+b_{q-1}, -n+b_q; \end{matrix} z\right] $$

Owing to the Enestrom-Kakeya Theorem, some sufficient conditions about clustering of zeros on certain curves along different directions are obtained.

Key words: zeros; generalized hypergeometric polynomials; asymptotic distribution of zeros

近年来，关于广义超几何多项式零点渐近行为的研究引起了国内外许多专家学者的广泛兴趣和关注[1-3]。一般地，此类问题的研究通常有如下几种方法：①通过广义超几何多项式与经典正交多项式（如 Jacobi）的联系，可以获得其零点位置及其渐近分布等重要信息[4]。②利用经典的复分析方法直接研究超几何多项式零点的渐近行为[5-6]。③从超几何函数所满足的欧拉积分替换出发，应用鞍点法或最速下降法导出其零点的渐近性质[7-10]。

本文采用经典的系数分析方法，对超几何函数级数展开式中的系数进行分析，探讨了一类广义超几何多项式：${}_{q+1}F_q(-n, n+a_1, \cdots, n+a_{q-1}, a_q; n$

* □ □ □ □：2012－09－03
□ □ □ □：国家自然科学基金资助项目（11201070，11226303）；广东省博士启动基金资助项目（10452800001004255）
□ □ □ □：周建荣（1978 年生），男，副教授；E-mail：zhoujianrong2008@yahoo.com.cn

$+ b_1,\cdots,n + b_{q-1}, -n + b_q;z)$ 零点的渐近行为。进一步借助于 Enestrom-Kakeya 定理，得到了其零点沿不同方向渐近趋于单位圆周的充分条件。

1　广义超几何函数

广义超几何函数的定义如下：

$$ {}_pF_q\left[\begin{matrix} a_1,\cdots,a_p; \\ b_1,\cdots,b_q; \end{matrix} z\right] = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(a_1)_k\cdots(a_p)_k z^k}{(b_1)_k\cdots(b_q)_k k!} \tag{1}$$

其中

$$(\nu)_k = \nu(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k-1) = \frac{\Gamma(\nu+k)}{\Gamma(\nu)},(k \geqslant 1,k \in \mathbf{N})$$

是 Pochhammer 符号。

当 $a_1,\cdots,a_p$ 中有一个为负整数时，不妨设 $a_1 = -n$，此时（1）中的级数退化为一个 n 次多项式，该多项式被称为广义超几何多项式。

2　主要定理

为了方便起见，记

$$F(z) = {}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix} -n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q; \\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q; \end{matrix} z\right] = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}z^k, a_{n,0} = 1 \tag{2}$$

引理 1　若 $a_1,\cdots a_{q-1},b_1,\cdots,b_{q-1} \in \mathbf{R}, b_q \in \mathbf{R}\setminus\{0,1,\cdots\}$ 并且 $a_q \in \mathbf{R}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$，则有

$$|a_{n,k}| \leqslant m_0(k+1)^{|b_q|+|a_1-b_1|+\cdots+|a_{q-1}-b_{q-1}|+|1-a_q|}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n;n,k \in \{0,1,\cdots\}) \tag{3}$$

$$\left|\frac{a_{n,n-k}}{a_{n,n}}\right| \leqslant \widetilde{m}_0(k+2)^{|b_q|+|a_1-b_1|+\cdots+|a_{q-1}-b_{q-1}|+|1-a_q|}, \quad (0 \leqslant k \leqslant n;n,k \in \{0,1,\cdots\}) \tag{4}$$

其中，常数 $m_0(>0)$ 和 $\widetilde{m}_0(>0)$ 均依赖于参数 $a_1,\cdots,a_q$ 和 $b_1,\cdots,b_q$，但是不依赖于 n 和 k。

证明　当 $0 < k < n$（$n,k \in \mathbf{N}$）时，由等式

$$(-n)_j = \begin{cases} \dfrac{(-1)^j n!}{(n-j)!},(0 \leqslant j \leqslant n;n,j \in \{0,1,\cdots\}) \\ 0,(j \geqslant n+1;n \in \{0,1,\cdots\};j \in \mathbf{N}) \end{cases}$$

可得

$$\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}} = \frac{(n-k)(n+a_1+k)\cdots(n+a_{q-1}+k)(a_q+k)}{(n-b_q-k)(n+b_1+k)\cdots(n+b_{q-1}+k)(1+k)} \tag{5}$$

注意到

$$\frac{(n-k)}{(n-b_q-k)} = 1 + \frac{b_q}{(n-b_q-k)}, \frac{(n+a_i+k)}{(n+b_i+k)} = 1 + \frac{a_i-b_i}{(n+b_i+k)}, i = 1,2,\cdots,q-1 \text{ 和 }$$

$$\frac{(a_q+k)}{(1+k)} = 1 + \frac{a_q-1}{(1+k)},$$

可知

$$\ln\left(\frac{n-k}{n-b_q-k}\right) \leqslant \frac{|b_q|}{|n-b_q-k|}, \ln\left(\frac{n+a_i+k}{n+b_i+k}\right) \leqslant \frac{|a_i-b_i|}{|n+b_i+k|}, i = 1,2,\cdots,q-1 \text{ 和 }$$

$$\ln\left(\frac{|a_q+k|}{|1+k|}\right) \leqslant \frac{|a_q-1|}{|1+k|}。$$

从而有

$$\begin{aligned} \ln|a_{n,k}| &= \ln\left(\prod_{l=0}^{k-1}\frac{a_{n,l+1}}{a_{n,l}}\right) = \sum_{l=0}^{k-1}\ln\left(\frac{a_{n,l+1}}{a_{n,l}}\right) \leqslant \\ &\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{|b_q|}{|n-b_q-l|} + \frac{|a_1-b_1|}{|n+b_1+l|} + \cdots + \frac{|a_{q-1}-b_{q-1}|}{|n+b_{q-1}+l|} + \frac{|a_q-1|}{1+l}\right) \leqslant \\ &\sum_{l=0}^{k-1}\left(\frac{|b_q|}{|n-b_q-k+1+l|} + \frac{|a_1-b_1|}{|n+b_1+l|} + \cdots + \frac{|a_{q-1}-b_{q-1}|}{|n+b_{q-1}+l|} + \frac{|a_q-1|}{1+l}\right) \leqslant \\ &\sum_{l=0}^{[|b_q|]+1}\frac{|b_q|}{|n-b_q-k+1+l|} + \sum_{l=0}^{k-1}\frac{C}{1+l} \leqslant \\ &m + C[\ln(k+1)+\gamma] \end{aligned} \tag{6}$$

其中 $m(>0)$ 和 $C = |b_q| + |a_1-b_1| + \cdots + |a_{q-1}-b_{q-1}| + |1-a_q|$ 均为常数，并且 γ 为欧拉常数。由（6）式可得 $|a_{n,k}| \leqslant m_0(k+1)^{|b_q|+|a_1-b_1|+\cdots+|a_{q-1}-b_{q-1}|+|1-a_q|}$，$(0 \leqslant k \leqslant n;n,k \in \mathbf{N})$，其中常数 $m_0 > 0$ 并且依赖于参数 $a_1,\cdots,a_q$ 和 $b_1,\cdots,b_q$，但是不依赖于 n 和 k。当 $k = 0$ 或 $k = n$ 时，引理 1 中的（3）式显然成立。

接下来，在（5）式中用 $n-k$ 替代 k 可得

$$\frac{a_{n,n-k}}{a_{n,n-k+1}} = \frac{(k-b_q)(2n+b_1-k)\cdots(2n+b_{q-1}-k)(1+n-k)}{k(2n+a_1-k)\cdots(2n+a_{q-1}-k)(a_q+n-k)}$$

由 $\dfrac{(k-b_q)}{k} = 1 - \dfrac{b_q}{k}$，$\dfrac{(2n+b_i-k)}{(2n+a_i-k)} = 1 + \dfrac{b_i-a_i}{(2n+a_i-k)}, i = 1,2,\cdots,q-1$ 和 $\dfrac{1+n-k}{a_q+n-k} = 1 + \dfrac{1-a_q}{a_q+n-k}$，

可得

$$\ln\left(\frac{|k-b_q|}{k}\right)\leqslant\frac{|b_q|}{k},\quad \ln\left(\frac{|2n+b_i-k|}{|2n+a_i-k|}\right)\leqslant\frac{|b_i-a_i|}{|2n+b_i-k|},i=1,2,\cdots,q-1 \text{ 和 } \ln\left(\frac{|1+n-k|}{|a_q+n-k|}\right)\leqslant\frac{|1-a_q|}{|a_q+n-k|}。$$

从而有

$$\ln\left(\frac{|a_{n,n-k}|}{|a_{n,n}|}\right)\leqslant\ln\left(\prod_{l=1}^{k}\frac{|a_{n,n-l}|}{|a_{n,n-l+1}|}\right)=\sum_{l=1}^{k}\ln\left(\frac{|a_{n,n-l}|}{|a_{n,n-l+1}|}\right)\leqslant$$
$$\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{|b_q|}{l}+\frac{|b_1-a_1|}{|2n+a_1-l|}+\cdots+\frac{|b_{q-1}-a_{q-1}-1|}{|2n+a_{q-1}-l|}+\frac{|1-a_q|}{|a_q+n-l|}\right)\leqslant$$
$$\sum_{l=1}^{k}\left(\frac{|b_q|}{l}+\frac{|b_1-a_1|}{|2n+a_1-l|}+\cdots+\frac{|b_{q-1}-a_{q-1}-1|}{|2n+a_{q-1}-l|}+\frac{|1-a_q|}{|a_q+n-k-1+l|}\right)\leqslant$$
$$\sum_{l=1}^{[|a_q|]+1}\left(\frac{|1-a_q|}{|a_q+n-k-1+l|}\right)+\sum_{l=1}^{k}\frac{C}{l}\leqslant$$
$$m+C[\ln(k+2)+\gamma] \tag{7}$$

其中 $m(>0)$ 和 $C=|b_q|+|a_1-b_1|+\cdots+|a_{q-1}-b_{q-1}|+|1-a_q|$ 均为常数，并且 γ 为欧拉常数。由（7）式可得

$$\left|\frac{a_{n,n-k}}{a_{n,n}}\right|\leqslant\widetilde{m}_0(k+2)^{|b_q|+|a_1-b_1|+\cdots+|a_{q-1}-b_{q-1}|+|1-a_q|}$$

其中常数 $\widetilde{m}_0>0$ 并且依赖于参数 $a_1,\cdots,a_q$ 和 $b_1,\cdots,b_q$，但是不依赖于 n 和 k。当 $k=0$ 或 $k=n$ 时，引理 1 中的（4）式显然成立，证毕。

定理 1 对于给定的参数 $a_1,\cdots,a_q$，$b_1,\cdots,b_q$，若 $a_1,\cdots,a_{q-1}$，$b_1,\cdots,b_{q-1}\in\mathbf{R}$，$b_q\in\mathbf{R}\setminus\{0,1,\cdots\}$ 并且 $a_q\in\mathbf{R}\setminus\{0,-1,-2,\cdots\}$，则当 $n\to\infty$ 时，广义超几何多项式：

$${}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q;\\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q;\end{matrix}z\right]$$

的所有零点均渐近趋于单位圆周 $|z|=1$。

证明 由引理 1 的（3）式可知，函数列 $\left\{\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}z^k\right\}$ 在圆盘 $\Omega=\{z:z\in\mathbf{C}\text{ 且 }|z|<\rho,(0<\rho<1)\}$ 内一致有界。又因为对于给定的 k 有 $a_{n,k}=\frac{(-n)_k(n+a_1)_k\cdots(n+a_{q-1})_k(a_q)_k}{(-n+b_q)_k(n+b_1)_k\cdots(n+b_{q-1})_k(1)_k}\to\frac{(a_q)_k}{(1)_k}(n\to\infty)$，因此，对任意点 $z(|z|<1)$，函数列 $\left\{\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}z^k\right\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ 在圆盘 Ω 内是逐点收敛的，再由 Vitali 定理[11]进一步可得其收敛的和函数为 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(a_q)_k}{(1)_k}z^k={}_2F_1\left[\begin{matrix}a_q,1;\\1;\end{matrix}z\right]=(1-z)^{-a_q}$。因为函数 $(1-z)^{-a_q}$ 在单位圆盘内无零点，由 Hurwitz 定理[11]可知，存在正数 N_0，使得当 $n>N_0$ 时，$\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}z^k$ 在 Ω 内无零点。因此，存在一个数列 ρ_n 满足 $0<\rho_n<1$，$\rho_n\to1$ 并且有 $\rho_n\geqslant\rho(n>N_0;0<\rho<1)$。

接下来，从引理 1 的（4）式可得，函数列 $\frac{z^n}{a_{n,n}}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\left(\frac{1}{z}\right)^k=\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,n-k}}{a_{n,n}}z^k$ 在 Ω 内一致有界，又因为对于给定的 k 有

$$\frac{a_{n,n-k}}{a_{n,n}}=\frac{(-n)_{n-k}(n+a_1)_{n-k}\cdots(n+a_{q-1})_{n-k}(a_q)_{n-k}}{(-n+b_q)_{n-k}(n+b_1)_{n-k}\cdots(n+b_{q-1})_{n-k}(1)_{n-k}}\cdot\frac{(-n+b_q)_n(n+b_1)_n\cdots(n+b_{q-1})_n(1)_n}{(-n)_n(n+a_1)_n\cdots(n+a_{q-1})_n(a_q)_n}\to\frac{(1-b_q)_k}{(1)_k}\quad(n\to\infty)$$

从而，对任意点 $z(|z|<1)$，函数列 $\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n,n-k}}{a_{n,n}}z^k\right\}_{n\in\mathbf{N}_0}$ 在圆盘 Ω 内是逐点收敛的，再由 Vitali 定理[11]进一步可得其收敛的和函数为

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(1-b_q)_k}{(1)_k}z^k={}_2F_1\left[\begin{matrix}1-b_q,1;\\1;\end{matrix}z\right]=(1-z)^{b_q-1}$$

因为函数 $(1-z)^{b_q-1}$ 在单位圆盘内无零点，由 Hurwitz 定理[11, p. 205]可知，存在正数 N_0，使得当 $n>N_0$ 时，$\frac{z^n}{a_{n,n}}\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}\left(\frac{1}{z}\right)^k$ 在 Ω 内无零点，即当 n 足够大时，函数 $\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}z^k$ 在 $|z|>\frac{1}{\rho}$ 内无零点。因此，存在一个数列 γ_n 满足 $\gamma_n>1$，$\gamma_n\to1$ 并且有 $\gamma_n\leqslant\frac{1}{\rho}(n>N_0;0<\rho<1)$。因此，多项式 $\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}z^k$ 所有的零点均落在圆环 $\{z:z\in\mathbf{C}\text{ 且 }\rho_n\leqslant|z|\leqslant\gamma_n\}$ 内，证毕。

在定理 1 中选取 $q=2,a_1=1,a_2=\frac{1}{2},b_1=t+1,b_2=1-t$ 即得如下推论：

推论 1（[12], Theorem2. 2） 对于给定的 $t(>0)$，当 $n\to\infty$ 时，超几何函数

$${}_3F_2\left[\begin{matrix}-n,n+1,\frac{1}{2}; \\ n+t+1,-n+1-t;\end{matrix} z\right]$$ 的所有零点均趋近于单位圆周。

引理 2　(Enestrom – Kakeya Theorem[13, p. 136]) 若 $0<a_0<a_1<\cdots<a_n$，则多项式 $p(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_nz^n$ 所有的零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 内。

定理 2　对于给定的参数 $a_1,\cdots,a_q$ 和 $b_1,\cdots,b_q$，若 $0<a_q\leqslant 1$，$b_q<0$，$a_i\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,q-1)$，则当 $n\to\infty$ 时，广义超几何多项式

$${}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q; \\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q;\end{matrix} z\right]$$

的所有零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 外，并且趋近于单位圆周 $|z|=1$。

证明　由定理 1 知，我们仅需证明广义超几何多项式

$$F(z):={}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q; \\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q;\end{matrix} z\right]$$

所有的零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 外。从（2）式可得

$$z^n{}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q; \\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q;\end{matrix} \frac{1}{z}\right]=\sum_{k=0}^{n}a_{n,k}z^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}a_{n,n-k}z^k$$

当 $0<a_q\leqslant 1$，$b_q<0$，$a_i\leqslant b_i(i=1,2,\cdots,q-1)$ 时，由（5）式有

$$\frac{a_{n,n-(k+1)}}{a_{n,n-k}}=\frac{(k+1-b_q)(2n+b_1-k-1)\cdots(2n+b_{q-1}-k-1)(n-k)}{(k+1)(2n+a_1-k-1)\cdots(2n+a_{q-1}-k-1)(a_q+n-k-1)}>1$$
$$(k=0,\cdots,n-1),$$

从而，多项式

$$F(z):=z^n{}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q; \\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q;\end{matrix} \frac{1}{z}\right]=\sum_{k=0}^{n}a_{n,n-k}z^k$$

的系数均为正数且单调递增，即有 $0<a_{n,n}<a_{n,n-1}<\cdots<a_{n,0}$。由引理 2 可得，多项式 $F(z)$ 的零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 内，故 $F(z)$ 的零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 外，证毕。

定理 3　对于给定的参数 $a_1,\cdots,a_q$ 和 $b_1,\cdots,b_q$，若 $a_q\geqslant 1$，$0<b_q<1$，$a_i\geqslant b_i$　$(i=1,2,\cdots,q-1)$，则有当 $n\to\infty$ 时，广义超几何多项式

$${}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q; \\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q;\end{matrix} z\right]$$

的所有零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 内，并且趋近于单位圆周 $|z|=1$。

证明　由定理 1 知，仅需证明广义超几何多项式

$$F(z):={}_{q+1}F_q\left[\begin{matrix}-n,n+a_1,n+a_2,\cdots,n+a_{q-1},a_q; \\ n+b_1,n+b_2,\cdots,n+b_{q-1},-n+b_q;\end{matrix} z\right]$$

所有的零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 内。当 $a_q\geqslant 1$，$0<b_q<1$，$a_i\geqslant b_i(i=1,2,\cdots,q-1)$ 时，由（5）式有

$$\frac{a_{n,k+1}}{a_{n,k}}=\frac{(n-k)(n+a_1+k)\cdots(n+a_{q-1}+k)(a_q+k)}{(n-b_q-k)(n+b_1+k)\cdots(n+b_{q-1}+k)(k+1)}>1$$
$$(k=0,\cdots,n-1)$$

从而，多项式 $F(z)$ 的系数均为正数且单调递增，即有 $0<a_{n,0}<a_{n,1}<\cdots<a_{n,n}$。由引理 2 可得，广义超几何多项式 $F(z)$ 的零点均落在单位圆盘 $|z|\leqslant 1$ 内，证毕。

参考文献：

[1]　DRIVER K, JORDAAN K. Separation theorems for the zeros of certain hypergeometric polynomials [J]. J Comput Appl Math, 2007, 199: 48 – 55.

[2]　DRIVER K, JORDAAN K. Pólya frequency sequences and real zeros of some $_3F_2$ polynomials [J]. J Math Anal Appl, 2007, 332: 1045 – 1055.

[3]　SRIVASTAVA H M, ZHOU J R, WANG Z G. Asymptotic distributions of the zeros of certain classes of hypergeometric functions and polynomials [J]. Mathematics of Computation, 2011, 80(275): 1769 – 1784.

[4]　DRIVER K, DUREN P. Zeros of the hypergeometric polynomials $F(-n,b;2b;z)$ [J]. Indag Math: New Ser, 2000, 11: 43 – 51.

[5]　DRIVER K, MÖLLER M. Zeros of the hypergeometric polynomials $F(-n,b;-2n;z)$ [J]. J Approx Theory, 2001, 110: 74 – 87.

[6]　ZHOU J R, SRIVASTAVA H M, WANG Z G. Asymptotic distributions of the zeros of a family of hypergeometric polynomials [J]. Proceeding of American Mathematical Society, 2012, 140(7): 2333 – 2346.

[7]　BOGGS K, DUREN P. Zeros of hypergeometric functions

[J]. Comput Methods Funct Theory, 2001, 1: 275 - 287.

[8] DUREN P, GUILLOU B J. Asymptotic properties of zeros of hypergeometric polynomials [J]. J Approx Theory, 2001, 111: 329 - 343.

[9] ZHOU J R, ZHOU Y Q. Asymptotic distributions of the zeros of certain classes of Gauss hypergeometric polynomials [J]. Applied Mathematics and Computation, 2011, 218: 1153 - 1159.

[10] ZHOU J R, HUANG M H, WANG H Y. 两类高斯超几何多项式零点的渐近分布[J]. 中山大学学报：自然科学版, 2011, 50(2): 28 - 30.

[11] HILLE E. Analytic function theory [M]. New York: Chelsea Publishing Company, 1973.

[12] DRIVER K, JORDAAN K. Asymptotic zero distribution of ${}_3F_2$ polynomials [J]. Indag Math: New Ser, 2003, 14: 319 - 327.

[13] MARDEN M. Geometry of Polynomials [M]. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1996.

（上接第 37 页）

参考文献：

[1] 李士勇. 模糊控制 · 神经网络和智能控制论[M]. 哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社, 1998.

[2] 张雨浓,张禹珩,陈轲,等. 线性矩阵方程的梯度法神经网络求解及其仿真验证[J]. 中山大学学报:自然科学版,2008, 47(3):26 - 32.

[3] 陈北京,孙星明,王定成,等. 基于彩色图像四元数表示的彩色人脸识别[J]. 自动化学报, 2012, 38(11): 1815 - 1823.

[4] 张文辉,叶晓平. 参数突变自由漂浮空间机器人神经集成控制[J]. 中国科学:信息科学, 2012, 42(11): 1435 - 1444.

[5] 曹飞龙,徐宗本. 神经网络的本质逼近阶[J]. 中国科学:E 辑, 2004, 34(4):361 - 373.

[6] 曹飞龙,张永全,张卫国. 单隐层神经网络与最佳多项式逼近[J]. 数学学报:中文版, 2007,50(2):385 - 392.

[7] LIANAS B, SAINZ F J. Constructive approximate interpolation by neural networks[J]. J Comput Applied Math, 2006, 188:283 - 308.

[8] 谢庭藩,曹飞龙. 关于插值神经网络的构造性[J]. 自然科学进展,2008,18(3):334 - 340.

[9] 徐士英,曹飞龙. 距离空间中插值神经网络的误差估计[J]. 系统科学与数学, 2009,29(5): 670 - 676.

[10] 徐士英,曹飞龙. 多元插值神经网络的一个注记[J]. 高校应用数学学报, 2009,24(1): 91 - 94.

[11] 张雨浓,谭宁,李展,等. 求解线性不定方程组所展现的 BP 与 Hopfield 类型神经网络的学习同质性研究[J]. 中山大学学报:自然科学版,2010,49(2):1 - 7.

[12] 张雨浓,李凌峰,郭东生,等. Hermite 插值神经网络权值和结构确定理论探讨[J]. 计算机应用研究, 2010,27(11):4048 - 4051.

[13] 张雨浓,郭东生,谭宁. 幂激励前向神经网络最优结构确定算法[J]. 计算机工程与应用, 2011,47(2): 29 - 31.

[14] 肖秀春,张雨浓,姜孝华. MISO 多元广义多项式神经网络及其权值直接求解[J]. 中山大学学报:自然科学版,2009,48(4):42 - 46.

[15] 薛毅. 数值分析与科学计算[M]. 北京:科学出版社, 2011.