第 51 卷 第 1 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 51 No. 1
2012 年 1 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Jan. 2012

# 一类四阶边值问题的正解的存在性与多重性*

王云杰[1]，朱 江[2]
（1. 徐州师范大学科文学院，江苏 徐州 221116；
2. 徐州师范大学数学科学学院，江苏 徐州 221116）

**摘 要**：为了进一步发展和完善四阶边值问题正解的存在性理论，研究了下面的四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)),0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0, \\ ku(1) = u'''(1) \end{cases}$$

其中，$f:[0,1] \times \mathbf{R}^4 \to [0,+\infty)$ 连续。利用锥上不动点定理得到了该四阶边值问题正解的存在性及多重性。推广了某些已知的结果。

**关键词**：四阶边值问题；正解的存在性；不动点定理；锥

**中图分类号**：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2012）01－0025－05

# The Existence and Multiplicity of Positive Solutions for a Class of Fourth Order Boundary Value Problem

*WANG Yunjie*[1], *ZHU Jiang*[2]
（1. Kewen Institute of Xuzhou Normal University, Xuzhou 221116, China;
2. School of Mathematical Science, Xuzhou Normal University, Xuzhou 221116, China）

**Abstract**: In order to develop and improve the theory about existence of positive solutions of fourth order boundary value problem, the following fourth order boundary value problem

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)),0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0, \\ ku(1) = u'''(1) \end{cases}$$

is considered, where $f:[0,1] \times R^4 \to [0,+\infty)$ is continuous. By use of the fixed point theorem in cone, the existence and multiplicity of positive solutions are obtained to the above boundary value problem. The results generalize some recent ones.

**Key words**: fourth order boundary value problem; the existence of positive solutions; fixed point theorem; cone

近年来各种边界条件下的四阶非线性方程边值问题的研究，受到相关人员的普遍关注[1-6]。在文[1]中，张建国等利用范数形式的锥拉伸与锥压缩不动点定理给出了四阶边值问题：

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(u(x)),0 \leqslant x \leqslant 1 \\ u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0, \\ ku(1) = u'''(1) \end{cases} \quad (1)$$

正解的存在性及多重性。其中，$f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 连续。

* 收稿日期：2011－04－12
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10771212）；徐州师范大学自然科学基金资助项目（09KLB03）
作者简介：王云杰（1978 年生），男，讲师；E-mail：w-yunjie@126.com

本文考虑了更一般的方程

$$\begin{cases} u^{(4)} = f(t,u(t),u'(t),u''(t),u'''(t)),0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0, \\ ku(1) = u'''(1) \end{cases} \tag{2}$$

其中，$f:[0,1]\times\mathbb{R}^4\to[0,+\infty)$ 连续。首先，我们在 Banach 空间 $C^3[0,1]$ 中构造了一个锥，然后利用序形式锥拉伸与锥压缩不动点定理，得到了该空间中四阶边值问题（2）一个和多个正解的存在性。

## 1 预备知识

由文［1］知，四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)} = 0,0 \leqslant t \leqslant 1 \\ u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0, \\ ku(1) = u'''(1) \end{cases}$$

的 Green 函数为

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{6}[(t-s)^3 + \frac{6}{k} - (1-s)^3],0 \leqslant s \leqslant t \leqslant 1 \\ \frac{1}{6}[\frac{6}{k} - (1-s)^3],0 \leqslant t \leqslant s \leqslant 1 \end{cases}$$

并有以下结论：

1）在有界闭区域 $D = \{(t,s) \mid 0 \leqslant t \leqslant 1, 0 \leqslant s \leqslant 1\}$ 上，当 $0 < k \leqslant 6$ 时，$G(t,s) \geqslant 0$；当 $k < 0$ 时，$G(t,s) < 0$；当 $k > 6$ 时，$G(t,s)$ 变号。

2）在有界闭区域 $D$ 上，$(1-\frac{k}{6})G(1,s) \leqslant [1-\frac{k}{6}(1-t)^3]G(1,s) \leqslant G(t,s) \leqslant G(1,s) = \frac{1}{k}$ 成立，其中 $0 < k \leqslant 6$。

若记 $E = C^3[0,1]$，对于 $u \in E$，赋于范数 $\|u\| = \max\{|u|_0, |u'|_0, |u''|_0, |u'''|_0\}$，其中 $|u|_0 = \max\limits_{t\in[0,1]}\{|u(t)|\}$，则 $E$ 是实 Banach 空间。

下面我们定义 $E$ 中子集 $P$ 如下：$P = \{u \in E \mid u \geqslant 0, u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0, ku(1) = u'''(1), u'''(t)$ 递增且 $\min\limits_{t\in[0,1]} u(t) \geqslant R_k\|u\|\}$。

其中 $R_k = (1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}$，$0 < k < 6$。

为了证明主要结论，我们先证明下面几个引理。

**引理1** 若 $u \in P$，则 $\|u\| = \max\{u(1), u'''(1)\}$。

**证明** 由 $u'''(0) = 0$，$u'''(t)$ 递增知 $u'''(t) \geqslant 0$ 且 $u'''(1) = |u'''|_0$，又由 $u'(0) = u''(0) = 0$ 得

$$u''(t) \geqslant 0, u'(t) \geqslant 0$$

及

$$u''(t) = \int_0^t u'''(s)\mathrm{d}s \leqslant |u'''|_0 = u'''(1),$$

$$u'(t) = \int_0^t u''(s)\mathrm{d}s \leqslant u'''(1)$$

故 $u(t)$ 递增，且 $|u''|_0 \leqslant u'''(1)$，$|u'|_0 \leqslant u'''(1)$，$|u|_0 = u(1)$。

从而

$$\|u\| = \max\{u(1), u'''(1)\}$$

**引理2** $P$ 是 $E$ 中的锥。

**证明** 设 $\{x_n\} \subset P, x_n \to x$。则易知

$$x(0) \geqslant 0, x'(0) = x''(0) = x'''(0) = 0,$$

$$kx(1) = k\lim_{n\to\infty} x_n(1) = \lim_{n\to\infty} x'''_n(1) = x'''(1)$$

当 $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant 1$ 时，有

$$x'''(t_1) = \lim_{n\to\infty} x'''_n(t_1) \leqslant \lim_{n\to\infty} x'''_n(t_2) = x'''(t_2)$$

故 $x'''(t)$ 递增。又

$$x(t) = \lim_{n\to\infty} x_n(t) \geqslant \lim_{n\to\infty}(1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}$$

$$\|x_n\| = (1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}\|x\|$$

所以 $x \in P$，说明 $P$ 是 $E$ 闭集。下再证 $P$ 是凸集。

事实上，若 $x_1 \in P, x_2 \in P$，$\forall \lambda \in [0,1]$。则

$$\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \geqslant 0,$$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)'(0) = \lambda x'_1(0) + (1-\lambda)x'_2(0) = 0,$$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)''(0) = \lambda x''_1(0) + (1-\lambda)x''_2(0) = 0,$$

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)'''(0) = \lambda x'''_1(0) + (1-\lambda)x'''_2(0) = 0,$$

$$k(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(1) = k\lambda x'_1(1) + k(1-\lambda)x_2(1) = \lambda x'''_1(1) + (1-\lambda)x'''_2(1) = (\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)'''(1)$$

且 $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)'''(t) = \lambda x'''_1(t) + (1-\lambda)x'''_2(t)$ 递增。

又当 $0 < k \leqslant 1$ 时，对于 $u \in P$ 我们有 $\|u\| = u(1)$。于是

$$(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(t) = \lambda x_1(t) + (1-\lambda)x_2(t) \geqslant \lambda(1-\frac{k}{6})x_1(1) + (1-\lambda)(1-\frac{k}{6})x_2(1) = (1-\frac{k}{6})(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)(1) = (1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|$$

当 $1<k<6$ 时，对于 $u\in P$ 我们有 $\|u\|=u'''(1)$。于是

$$(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)(t)=\lambda x_1(t)+(1-\lambda)x_2(t)\geqslant \lambda(1-\frac{k}{6})\frac{1}{k}x'''_1(1)+(1-\lambda)(1-\frac{k}{6})\frac{1}{k}x'''_2(1)=$$

$$(1-\frac{k}{6})\frac{1}{k}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)'''(1)=$$

$$(1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|$$

故有

$$\min_{t\in[0,1]}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)(t)\geqslant$$

$$(1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}\|\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\|$$

所以 $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in P$。说明 $P$ 是 $E$ 中凸集。

显然，若 $x\in P,\lambda\geqslant 0$，则 $\lambda x\in P$；若 $x\in P,-x\in P$，有 $x=\theta$。这说明 $P$ 是 $E$ 中的一个锥。由引理 2，可在 $E$ 中定义由 $P$ 导出的半序：$\sqsupseteq$。即 $x\sqsupseteq y\Leftrightarrow y-x\in P$。易知，若 $x\sqsupseteq y$，则 $x\leqslant y$，$y'(0)-x'(0)=y''(0)-x''(0)=y'''(0)-x'''(0)=0$，$y'''(t)-x'''(t)$ 递增，从而 $x\leqslant y$，$x'\leqslant y'$，$x''\leqslant y''$，$x'''\leqslant y'''$。

**引理 3**　设 $g(s)=c_1\left[\frac{1}{k}-\frac{(1-s)^3}{6}+\frac{(1-s)^4}{24}\right]+c_2\frac{(1-s)^3}{6}+c_3\frac{(1-s)^2}{2}+c_4(1-s)$。若 $c_2\geqslant c_1>0$，$c_3\geqslant 0,c_4\geqslant 0$。则 $g(0)=\max\limits_{s\in[0,1]}g(s)=\frac{c_1}{k}+\frac{c_2-c_1}{6}+\frac{c_1}{24}+\frac{c_3}{2}+c_4$，$g(1)=\min\limits_{s\in[0,1]}g(s)=\frac{c_1}{k}$。

**证明**　由 $g'(s)=-\frac{c_1(1-s)^3}{6}-\frac{(c_2-c_1)(1-s)^2}{2}-c_3(1-s)-c_4\leqslant 0$ 即得。

定义算子 $A$ 为

$$Au(t)=\int_0^1 G(t,s)f(s,u(s),u'(s),u''(s),u'''(s))\mathrm{d}s$$

则易知 $u$ 是 BVP（2）的解当且仅当 $u$ 是 $A$ 的不动点。由 $f$ 的连续性容易证明 $A:P\to P$ 是全连续算子。

为了证明本文的主要结果，我们还需要下面的引理。

**引理 4**[7-10]（**锥拉伸与锥压缩不动点定理**）设 $E$ 是 Banach 空间，$P$ 是锥，$\Omega_1,\Omega_2$ 是 $E$ 中有界开集，$\theta\in\Omega_1,\overline{\Omega}_1\subset\Omega_2$，$A:P\cap(\overline{\Omega}_2\setminus\Omega_1)\to P$ 全连续。如果满足条件

(i) $Ax\not\geq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1;Ax\not\leq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$；

或

(ii) $Ax\not\leq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_1;Ax\not\geq x,\forall x\in P\cap\partial\Omega_2$；

那么，$A$ 在 $P\cap(\Omega_2\setminus\overline{\Omega}_1)$ 中必有不动点。

## 2　主要结果

**定理 1**　设 $0<k<6$，令 $R_k=(1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}$。若存在 $a,b\in\mathbb{R}^+$，满足 $0<a<R_kb$ 使得

(i) $f(s,x,y,z,w)>M_1x+M_2y+M_3z+M_4w$，其中 $M_1\geqslant k,M_2\geqslant k,M_3>0,M_4>0,(s,x,y,z,w)\in[0,1]\times[R_ka,a]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$；

(ii) $f(s,x,y,z,w)<M_5x+M_6y+M_7z+M_8w$，其中 $M_5\leqslant\frac{8k}{8-k},M_6\leqslant 6,0<M_7\leqslant 2,0<M_8\leqslant 1,(s,x,y,z,w)\in[0,1]\times[R_kb,b]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$；则 BVP（2）在 $C^3[0,1]$ 至少有一个正解。

**证明**　设 $\Omega_a=\{x\in E|\ \|x\|<a\}$，$\Omega_b=\{x\in E|\ \|x\|<b\}$。下面验证算子 $A$ 满足锥拉伸与锥压缩不动点定理即引理 4 的条件。

首先，若 $x\in\partial\Omega_a\cap P$，则 $x\not\leq Ax$。

（用反证法）假设 $\exists x_0\in\partial\Omega_a\cap P$，使得 $x_0\sqsubseteq Ax_0$。由 $x_0\in\partial\Omega_a\cap P$，知 $x_0(t)\geqslant R_ka$。又 $x_0\sqsubseteq Ax_0$，故

$$x_0(t)\geqslant Ax_0(t)=$$

$$\int_0^1 G(t,s)f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$

$$x'_0(t)\geqslant(Ax_0)'(t)=$$

$$\int_0^t\frac{(t-s)^2}{2}f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$

$$x''_0(t)\geqslant(Ax_0)''(t)=$$

$$\int_0^t(t-s)f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$

$$x'''_0(t)\geqslant(Ax_0)'''(t)=$$

$$\int_0^t f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s$$

两边从 0 到 1 积分得

$$\int_0^1 x_0(t)\mathrm{d}t\geqslant\int_0^1\mathrm{d}t\int_0^1 G(t,s)f(s,x_0(s),$$

$$x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^1\mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\frac{(t-s)^3}{6}\mathrm{d}t+$$

$$\int_0^1[\frac{1}{k}-\frac{(1-s)^3}{6}]f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s=$$

$$\int_0^1 [\frac{1}{k} - \frac{(1-s)^3}{6} + \frac{(1-s)^4}{24}]$$
$$f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$\int_0^1 x'_0(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2}$$
$$f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\frac{(t-s)^2}{2}\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$\int_0^1 x''_0(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t (t-s)f(s,x_0(s),$$
$$x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))(t-s)\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$\int_0^1 x'''_0(t)\mathrm{d}t \geqslant \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s=$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))(t-s)\mathrm{d}t=$$
$$\int_0^1 (1-s)f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s$$

取非负数 $k_1$，$k_2$，$k_3$，$k_4$ 满足 $k_2 \geqslant k_1$，$\frac{k_2}{k_1} \leqslant \frac{M_2}{k}$，$\frac{k_3}{k_1} \leqslant \frac{M_3}{k}$，$\frac{k_4}{k_1} \leqslant \frac{M_4}{k}$，则

$$\int_0^1 [k_1x_0(t) + k_2x'_0(t) + k_3x''_0(t) + k_4x'''_0(t)]\mathrm{d}t \geqslant$$
$$\int_0^1 \{k_1[\frac{1}{k} - \frac{(1-s)^3}{6} + \frac{(1-s)^4}{24}] +$$
$$k_2\frac{(1-s)^3}{6} + k_3\frac{(1-s)^2}{2} + k_4(1-s)\}\cdot$$
$$f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\int_0^1 \frac{k_1}{k} f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\int_0^1 \frac{k_1}{k}[M_1x_0(s) + M_2x'_0(s) + M_3x''_0(s) + M_4x'''_0(s)]\mathrm{d}s \geqslant$$
$$\int_0^1 [k_1x_0(s) + k_2x'_0(s) + k_3x''_0(s) + k_4x'''_0(s)]\mathrm{d}s$$

矛盾。

其次，若 $x \in \partial\Omega_b \cap P$，则 $x \not\sqsupseteq Ax$。

（用反证法）假设 $\exists x_0 \in \partial\Omega_b \cap P$，使得 $x_0 \sqsupseteq Ax_0$。由 $x_0 \in \partial\Omega_b \cap P$，知 $x_0(t) \geqslant R_kb$。又 $x_0 \sqsupseteq Ax_0$，故

$$x_0(t) \leqslant Ax_0(t) =$$
$$\int_0^1 G(t,s)f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$x'_0(t) \leqslant (Ax_0)'(t) =$$
$$\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$x''_0(t) \leqslant (Ax_0)''(t) =$$
$$\int_0^t (t-s)f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$x'''_0(t) \leqslant (Ax_0)'''(t) =$$
$$\int_0^t f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s$$

两边从0到1积分得

$$\int_0^1 x_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^1 G(t,s)f(s,x_0(s),$$
$$x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\frac{(t-s)^3}{6}\mathrm{d}t +$$
$$\int_0^1 [\frac{1}{k} - \frac{(1-s)^3}{6}]f(s,x_0(s),x'_0(s),$$
$$x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1 [\frac{1}{k} - \frac{(1-s)^3}{6} + \frac{(1-s)^4}{24}]$$
$$f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$\int_0^1 x'_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t \frac{(t-s)^2}{2} f(s,x_0(s),$$
$$x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\frac{(t-s)^2}{2}\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 \frac{(1-s)^3}{6} f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$\int_0^1 x''_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t (t-s)f(s,x_0(s),$$
$$x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))(t-s)\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 \frac{(1-s)^2}{2} f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s,$$
$$\int_0^1 x'''_0(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \mathrm{d}t\int_0^t f(s,x_0(s),x'_0(s),$$
$$x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s =$$
$$\int_0^1 \mathrm{d}s\int_s^1 f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}t =$$
$$\int_0^1 (1-s)f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s$$

取非负数 $k_5$，$k_6$，$k_7$，$k_8$ 满足 $k_6 > k_5$ 且 $k_5 \geqslant M_5M, k_6 \geqslant M_6M, k_7 \geqslant M_7M, k_8 \geqslant M_8M$。其中 $M = \frac{8-k}{8k}k_5 + \frac{k_6}{6} + \frac{k_7}{2} + k_8$。则

$$\int_0^1 [k_5x_0(t) + k_6x'_0(t) + k_7x''_0(t) + k_8x'''_0(t)]\mathrm{d}t \leqslant$$
$$\int_0^1 \{k_5[\frac{1}{k} - \frac{(1-s)^3}{6} + \frac{(1-s)^4}{24}] +$$

$$k_6\frac{(1-s)^3}{6}+k_7\frac{(1-s)^2}{2}+k_8(1-s)\}\cdot$$
$$f(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1 Mf(s,x_0(s),x'_0(s),x''_0(s),x'''_0(s))\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1 M[M_5x_0(s)+M_6x'_0(s)+M_7x''_0(s)+M_8x'''_0(s)]\mathrm{d}s\leqslant$$
$$\int_0^1[k_5x_0(s)+k_6x'_0(s)+k_7x''_0(s)+k_8x'''_0(s)]\mathrm{d}s$$

矛盾。由引理 4 (i) 得 $A$ 在 $P$ 中有不动点。即四阶边值问题 (2) 有解 $u\in C^3[0,1]$ 且 $u>0$。

利用引理 4 (ii)，与定理 1 的证明类似，可得以下结论。

**定理 2** 设 $0<k<6$，令 $R_k=(1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}$。若存在 $a,b\in\mathbb{R}^+$，满足 $0<a<R_kb$ 使得

(i) $f(s,x,y,z,w)<M_1x+M_2y+M_3z+M_4w$，其中 $M_1\leqslant\frac{8k}{8-k}$，$M_2\leqslant 6$，$0<M_3\leqslant 2$，$0<M_4\leqslant 1$，$(s,x,y,z,w)\in[0,1]\times[R_ka,a]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$；

(ii) $f(s,x,y,z,w)>M_5x+M_6y+M_7z+M_8w$，其中 $M_5\geqslant k$，$M_6\geqslant k$，$M_7>0$，$M_8>0$，$(s,x,y,z,w)\in[0,1]\times[R_kb,b]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$；

则四阶边值问题 (2) 在 $C^3[0,1]$ 至少有一个正解。

将定理 1 与定理 2 结合，即得多解的存在性。

**推论 1** 设 $0<k<6$，令 $R_k=(1-\frac{k}{6})\min\{1,\frac{1}{k}\}$。若存在 $a,b,c\in\mathbb{R}^+$，满足 $0<a<R_kb<R_k^2c$ 使得

(i) $f(s,x,y,z,w)<M_1x+M_2y+M_3z+M_4w$，其中 $M_1\leqslant\frac{8k}{8-k}$，$M_2\leqslant 6$，$0<M_3\leqslant 2$，$0<M_4\leqslant 1$，$(s,x,y,z,w)\in[0,1]\times[R_ka,a]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$；

(ii) $f(s,x,y,z,w)>M_5x+M_6y+M_7z+M_8w$，其中 $M_5\geqslant k$，$M_6\geqslant k$，$M_7>0$，$M_8>0$，$(s,x,y,z,w)\in[0,1]\times[R_kb,b]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$；

(iii) $f(s,x,y,z,w)<M_9x+M_{10}y+M_{11}z+M_{12}w$，其中 $M_9\leqslant\frac{8k}{8-k}$，$M_{10}\leqslant 6$，$0<M_{11}\leqslant 2$，$0<M_{12}\leqslant 1$，$(s,x,y,z,w)\in[0,1]\times[R_ka,a]\times[0,\infty)\times[0,\infty)\times[0,\infty)$；

则四阶边值问题 (2) 在 $C^3[0,1]$ 至少有两个正解。

**参考文献：**

[1] 张建国,张福伟,刘进生. 一类四阶方程边值问题正解的存在性与多重性[J]. 工程数学学报,2005, 22(5): 864－868.

[2] 吕志伟,华守亮,杨辉. Banach 空间中一类四阶奇异边值问题的解的存在性[J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(24): 195－199.

[3] 姚庆六. 一类含参数半正四阶边值问题的正解存在性与多解性[J]. 数学学报,2008, 51 (2): 401－410.

[4] 柴国庆. 四阶奇异边值问题的正解[J]. 数学物理学报,2005, 25A(6): 898－904.

[5] 韦忠礼. 四阶奇异边值问题的正解[J]. 数学学报, 1999, 42(4): 715－722.

[6] 席莉静. 四阶奇异边值问题正解的存在性与多重性[J]. 应用泛函分析学报,2005, 7(1): 46－50.

[7] 郭大钧. 非线性泛函分析[M]. 济南:山东科技出版社,1985.

[8] 郭大钧. 非线性分析中的半序方法[M]. 济南:山东科技出版社,2000.

[9] 郭大钧,孙经先. 抽象空间常微分方程[M]. 济南:山东科技出版社,1988.

[10] 郭大钧,孙经先,刘兆理. 非线性常微分方程泛函方法[M]. 济南:山东科技出版社,2005.