

基于 Navier-Stokes 方程的图像修复算法*

李率杰, 李 鹏, 冯兆永, 姚正安
(中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 图像修复是一个基于周围未被损坏信息对图像中丢失或损坏信息进行修补的过程。提出了一个基于 Navier-Stokes 方程的新的图像修复算法。该算法能够同时在修复区域内部进行信息的填充, 而在修复区域外部去除噪声(如果存在)。实验结果表明模型对于图像中划痕, 信息丢失, 甚至移除整个景物都是有效的。

关键词: 图像修复; 图像去噪; Navier-Stokes 方程; 等照度线方向

中图分类号: TN911.73 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2012)01-0009-06

A New Algorithm for Image Inpainting Based on the Navier-Stokes Equation

LI Shuaijie, LI Peng, FENG Zhaoyong, YAO Zheng'an

(School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275)

Abstract: Image inpainting is the process of filling in missing parts of damaged images based on information gleaned from surrounding areas. A new algorithm for inpainting based on the Navier-Stokes equation, which allows for inpainting inside of the inpainting region and denoising outside of the inpainting region, is outlined. The experimental results show the effective performance of the proposed model in restoring scratched photos, missing parts and even removal of entire objects from images.

Key words: inpainting; denoising; Navier-Stokes equation; isophote direction

图像修复技术是指针对图像中遗失或者损坏的部分, 利用周围未被损坏的图像信息, 按照一定的规则进行填补, 使修复后的图像接近或达到原图的视觉效果, 在本质上是一种典型的插值技术。图像修复具有广泛的应用前景, 如填补美术作品上出现的裂痕, 以使其清晰并恢复它的完整性; 恢复旧照片中的划痕; 去除图像中的文字或物体等特效制作; 视频通信中错误隐匿; 图像遮挡物体的去除等。

近来的数字图像修复技术大多是利用偏微分方程(partial differential equation, PDE)和变分法。而这种基于 PDE 的数字图像修复技术最早是由 Bertalmio 等^[1]首先引入到图像处理领域中的。在

[1] 中, 他们利用待修复区域的周围信息, 采用一种由粗到精的方法来估计等照度线的方向, 并采用传播机制将信息传播到待修复区域内。之后 Ballester 等^[2]通过提出一个能量泛函并利用变分法极小化该能量得到非线性的偏微分方程计算出修复后的图像。在文献 [3-4] 中作者考虑图像的等照度线方向和不可压 Navier-Stokes 方程之间的联系将图像灰度作为二维不可压流体的流函数, 将 Laplacian 算子作用后的待修复图像作为流的涡流函数。基于由流函数定义的向量场将涡流函数传播到待修复区域, 从而得到修复后的图像。由此 Tai 等^[5]提出了基于 TV-Stokes 方程的图像修复两步算法, 首先通过求解一个非线性 TV-Stokes 方程将等

* 收稿日期: 2011-07-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10971234); 国家自然科学基金天元基金资助项目(11026227); 中央高校基本科研业务费专项基金资助项目(10lgzd09); 广州市科技计划资助项目(2010C6-I00011)

作者简介: 李率杰(1980年生), 男, 博士生; 通讯作者: 冯兆永; E-mail: fzhaoy@mail.sysu.edu.cn

照度线延伸到待修复区域, 然后图像就以此等照度线方向进行修复。

不同于以上方法, Chan 等^[6]引入了 Rudin 等^[7]提出的全变差 (total variation, TV) 图像去噪模型的思想, 得到基于 TV 模型的图像修复模型, 该方法通过求解最小化能量泛函而得到非线性方程, 无论待修复图像是否带有噪声都能够有效地对图像进行修复, 得到了较好的效果。但是 TV 模型在图像平滑区域容易产生阶梯效应。在后面的工作如文献 [8-10] 中, Chan 和 Shen 提出了基于图像等照度线的曲率的能量泛函, 试图在保证光滑条件下连接修复区域周围的等照度线, 由此得到的方程是非线性的四阶方程, 该方法可以较好的修复面积较大的非纹理区域, 但是非线性的高阶方程给求解带来了困难。基于以上 Chan 和 Shen 的工作, Esedoglu 等^[11]基于 Mumford-Shah 图像分割模型提出了 Mumford-Shah-Euler 图像修复模型^[12], 利用 Ambrosio 和 Tortorelli 提出的 Mumford-Shah 模型椭圆逼近方法得到相应的抛物方程。方法的优点是方程的最高阶偏导是线性的可以快速的计算。但是却有难以修复较大的区域的缺点。Grossauer 等^[13]利用复 Ginzburg-Landau 方程解决图像修复问题, 近来 Bornemann 等^[14]提出基于一阶传输方程的图像修复的非迭代方法。但是这些方法计算量大且非常复杂。

另一方面纹理图像的修复也受到广泛的研究, 在文 [15] 中, 作者首先将待修复区域分解为纹理和结构, 然后对纹理采用纹理合成的方法, 对结构采用一般的非纹理图像修复模型进行分别修复。另外最近纹理合成的方法也同样被广泛的运用在纹理图像修复中^[16-20]。

本文基于文献 [3-5] 中的思想, 我们在等照度线方向上向待修复区域传输图像信息。在文献 [3] 通过求解不可压流体的 Navier-Stokes 方程, 得到修复后的图像函数。假设 D 为待修复区域, ∂D 为待修复区域的边界。一旦给定待修复区域 D 此模型就可以将信息沿等照度方向连续的从边界 ∂D 传输到待修复区域 D 。如此图像修复依据连接和待修复区域边界相交的等照度线得以完成。但是该修复算法只是基于待修复区域的边界 ∂D 上的信息, 因此难以得到与待修复区域相交的等照度线的准确方向。另外如果待修复区域 D 是规则的矩形区域, 算法容易实现, 但是实际上待修复区域往往是形状不规则的区域, 实现此算法将面临执行有限差分格式和边界条件的困难, 最后该修复算法对噪

声图像的修复无能为力。

与上面算法不同的是, 本文修复算法的思想是能够在待修复区域进行信息填充, 而在待修复区域外异性光滑图像去除噪声 (如果存在), 且保持边缘信息。在本文中, 基于不可压流的 Navier-Stokes 方程, 我们主要提出一种新的图像修复算法, 目的是任给一个带有噪声的且信息丢失或被破坏的待修复图像, 我们可以同时的进行图像的修复和去噪, 得到清晰、完整的图像。

1 基于 Navier-Stokes 方程的图像修复

不可压的流体一般遵循如下所谓的 Navier-Stokes 方程

$$v_i + v \cdot \nabla v = -\nabla p + \nu \Delta v, \nabla \cdot v = 0 \quad (1)$$

其中 v 为流体的速度场, p 为流体的压强, ν 为黏性系数。对于二维空间, 我们引进流函数 Ψ , 满足

$$\nabla^\perp \Psi = v \quad (2)$$

同时设涡量 $\omega = \nabla \times v$, 且由 (1) 可得满足涡流方程

$$\omega_i + v \cdot \nabla \omega = \nu \Delta \omega \quad (3)$$

在二维空间里, 涡量 ω 是一个标量, 并且满足 $\omega = \Delta \Psi$ 。当黏性系数 $\nu = 0$ 时, 可以得到无黏性流的欧拉方程。在二维时黏性流或无黏性流, 方程都是适定的, 对于任意光滑初始条件下解都是存在的, 并且连续的依赖初始条件和边界条件^[21]。

根据流函数的定义, 黏性流方程 (3) 的稳定态一定满足下列条件

$$\nabla^\perp \Psi \cdot \nabla \Delta \Psi \approx 0 \quad (4)$$

此式说明 Laplacian 算子作用后流函数 $\Delta \Psi$, 其等照度线的方向和流体的流速方向是平行的。即流体是沿着 $\Delta \Psi$ 等照度线方向流动, 如此其和在图像修复中将周围信息沿等照度线方向传播到待修复区域的原理相同。

将二维不可压流体力学中的流函数 Ψ 和图像修复中待修复图像的灰度函数 I_0 对应起来, Bertalmio 等^[3]提出了基于 Navier-Stokes 方程的图像修复模型。设 Ω 为整个图像区域, D 为待修复区域, ∂D 为待修复区域的边界, 待修复图像 I_0 在 $\Omega \setminus D$ 是足够光滑, 并且 I_0 和 ΔI_0 在 $\Omega \setminus D$ 是已知的。用图像灰度函数 I 对应流函数 Ψ , 将二维不可压流体理论和图像修复理论对应关系总结如下:

Bertalmio 等^[3]目的是在待修复区域上解决 Navier-Stokes 方程的一种形式, 即涡流方程 (3)。他们解决如下方程:

表 1 流体力学和图像修复物理量对应关系

Table 1 Relation between fluid dynamics and image inpainting

流体力学	图像修复
流函数 Ψ	图像灰度函数 I
流体流速 $\boldsymbol{v} = \nabla^\perp \Psi$	等照度线方向 $\nabla^\perp I$
涡量函数 $\omega = \Delta \Psi$	Laplacian 光滑 $\omega = \Delta I$
流体黏性系数 ν	异性光滑系数 ν

$$\omega_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla \cdot (g(|\nabla \omega|) \nabla \omega) \quad (5)$$

其中涡量 $\omega = \Delta I$, 函数 g 为单调递减函数, 可以使函数 ω 异性扩散, 速度场 $\boldsymbol{v} = \nabla^\perp I$ 。由求解方程 (5) 所得的涡量 ω , 通过求解 Poisson 方程:

$$\Delta I = \omega, I_{\partial D} = I_0 \quad (6)$$

从而得到修复后的图像 I 。

2 图像修复算法

本文中, 我们的目的是在整个区域上求解 Navier-Stokes 方程的一种不同于 (5) 式的一种形式, 可以使得在修复区域 D 内进行图像修复, 而在修复区域外 $\Omega \setminus D$ 进行图像去噪。我们求解下列涡流方程:

$$\begin{cases} \omega_t + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla \cdot (g(|\nabla \omega|) \nabla \omega), & x \in D, t > 0, \\ \omega_t = \nu \nabla \cdot (g(|\nabla \omega|) \nabla \omega) + \lambda(\omega_0 - \omega), & x \in \Omega \setminus D, t > 0, \\ \omega(x, 0) = \omega_0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (7)$$

其中 $\omega_0 = \Delta I_0$, $\boldsymbol{v} = \nabla^\perp I$, $\lambda > 0$ 是一个固定的常数, \boldsymbol{n} 为单位外法向量。函数 g 仍然是一个单调递减的函数, $g(0) = 1$, $\lim_{s \rightarrow \infty} g(s) = 0$, 使其保证对 ω 的异性扩散。我们也可以将 (7) 式写成下列形式:

$$\begin{cases} \omega_t + \chi_D \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega = \nu \nabla \cdot (g(|\nabla \omega|) \nabla \omega) + \\ \lambda(1 - \chi_D)(\omega_0 - \omega) & x \in \Omega, t > 0, \\ \omega(x, 0) = \omega_0, & x \in \Omega, \\ \frac{\partial \omega}{\partial \boldsymbol{n}} = 0, & x \in \partial \Omega \end{cases} \quad (8)$$

其中 χ_D 为修复区域 D 的特征函数, 定义为 $\chi_D = 1$, $x \in D$, $\chi_D = 0$, $x \in \Omega \setminus D$ 。由方程求得的 ω , 我们同样可以在区域 Ω 求与 (6) 式类似的 Poisson 方程, 得到修复后的图像 I 。

由提出的模型, 可以看出它能够在修复区域的内部和外部起着不同的作用。其修复过程包括: 修复区域内, 基于周围信息对破坏或丢失的信息进行

填充; 而在修复区域外部, 对 ω 进行异性光滑, 从而可以达到去噪目的。

3 数值计算

对方程数值计算, 我们假设 $m \times n$ 的图像 I 是在连续区域 $[0, m] \times [0, n]$ 上, 离散为 $m \times n$ 网格, 定义时间步长 Δt 。我们用有限差分半隐格式逼近此问题。

$$\begin{aligned} \omega_{i,j}^{k+1} + \Delta t (\chi_D \boldsymbol{v} \cdot \nabla \omega^{k+1})_{i,j} &= \omega_{i,j}^k + \\ \Delta t \nu \nabla \cdot (g(|\nabla \omega^k|) \nabla \omega^{k+1})_{i,j} &+ \\ \Delta t \lambda (1 - \chi_D) (\omega_0 - \omega^{k+1})_{i,j} & \quad (9) \end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{v} = \left(-\frac{\partial I}{\partial y}, \frac{\partial I}{\partial x} \right)$, 我们只要在图像中标出修复区域 D , 就可以得到区域 D 的特征函数 χ_D 。另外上式中的光滑项可以通过标准的五点有限差分格式逼近:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (g(|\nabla \omega^k|) \nabla \omega^{k+1})_{i,j} &= \\ (d_{i+\frac{1}{2},j} + d_{i,j+\frac{1}{2}} + d_{i-\frac{1}{2},j} + d_{i,j-\frac{1}{2}}) \omega_{i,j}^{k+1} - \\ (d_{i+\frac{1}{2},j} \omega_{i+1,j}^{k+1} + d_{i-\frac{1}{2},j} \omega_{i-1,j}^{k+1} + d_{i,j+\frac{1}{2}} \omega_{i,j+1}^{k+1} + d_{i,j-\frac{1}{2}} \omega_{i,j-1}^{k+1}) & \quad (10) \end{aligned}$$

其中 $d_{i+\frac{1}{2},j} = g(\omega_{i+1}^k - \omega_{i,j}^k)$, 类似地我们也可以得到 $d_{i,j+\frac{1}{2}}, d_{i-\frac{1}{2},j}$ 和 $d_{i,j-\frac{1}{2}}$ 。利用算子分裂法 (Additive Operator Splitting, AOS)^[22-24], 迭代方程 (9) 可以得到快速的计算。至于边界条件, 我们是利用 Neumann 边界条件, 对图像周围加边即可实现。在本文中函数 g 定义为

$$g(s) = \frac{1}{1 + (s/K)^2} \quad (11)$$

其中 K 是取定的常数。

对于 Poisson 方程 $\Delta I^{k+1} = \omega^{k+1}$, 我们采用五点中心离散格式, 将 I^{k+1} 和 ω^{k+1} 重组成 mn 的向量, 得到线性方程组 $AI^{k+1} = \omega^{k+1}$, 这里 A 为一个稀疏的 $mn \times mn$ 的矩阵, 求解这个线性方程组由 ω^{k+1} 我们快速的得到修复后的图像 I^{k+1} 。详细的计算流程如下:

- 1) 给出初始的 $\omega^0 = \Delta I_0$ 和 $\boldsymbol{v}^0 = \left(-\frac{\partial I_0}{\partial y}, \frac{\partial I_0}{\partial x} \right)$;
- 2) 通过迭代方程 (9) 计算 ω^k ;
- 3) 求解 Poisson 方程得到 I^k ;
- 4) 由 I^k 计算 \boldsymbol{v}^k ;

其中 $k = 1, 2, \dots$, 直到稳定状态, 得到的 I^k 既是修复后的图像。

4 仿真实验

在本节将用数值实验结果展示本模型的有效性

和实用性。我们选了不同类型的图像, 他们有若干区域丢失信息, 划痕, 或者同时带有噪声, 我们对其进行修复。

实验 1 本文算法和文献 [3] 算法的性能比较实验。在实验时, 通常需要给定待修复区域的掩码, 然后根据修复区域周围的信息, 利用修复算法恢复待修复区域的信息。图 1 为本文算法与文献 [3] 算法修复结果比较。其中 (a) 为原始图像, 我们特别选择图像边缘上面一个矩形区域为待修复区域如 (b) 所示, 为了清晰显示修复区域, 我们进行了随机像素填充。(c) 和 (d) 分别为文献 [3] 和本文算法的修复结果。从图中不难看出本文算法要好于文献 [3] 中的算法。参数的选择分别为: 本文算法 $\Delta t = 0.000\ 01$, $\nu = \frac{1}{\Delta t}$, $\lambda = 10^3$, $K = 10^{-16}$, 文献 [3] 算法 $\Delta t = 0.000\ 01$, $\nu = \frac{1}{\Delta t}$, $K = 10^{-16}$, 迭代次数都为 100 次。

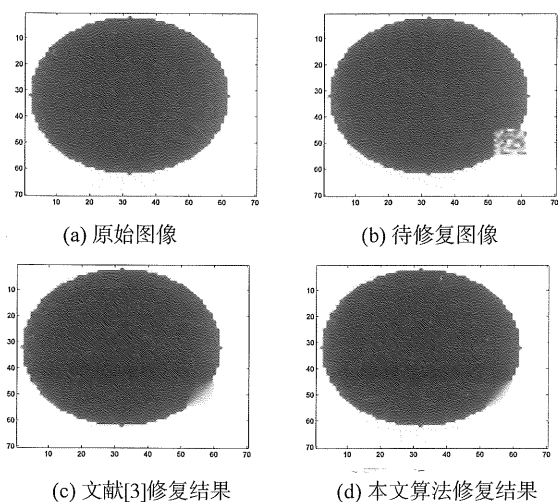


图 1 图像修复结果比较

Fig. 1 Results of different of image inpainting

实验 2 本文算法针对两幅合成图像修复结果。如图 2 所示, (a) 和 (d) 分别为原始图像, (b) 和 (e) 为丢失信息的图像, 为了清晰显示修复区域, 我们同样进行了随机像素填充。通过修复, 我们可以分别得到它们修复后的图像 (c) 和 (f), 从结果可以看出修复效果非常明显。由于二值合成图像灰度对比较强, 在边缘处和原始图像有所差别, 但是图像信息基本得到了恢复。本实验中参数选择如表 2 所示。

表 2 实验中参数选择

Table 2 Selection of the parameters in experiments

	Δt	ν	λ	K	迭代次数	
实验 1	0.000 01	$1/\Delta t$	10^3	10^{-16}	20	20
实验 2	0.000 01	$1/\Delta t$	10^3	10^{-16}	15	25
实验 3	0.000 01	$1/\Delta t$	1	10^{-16}	25	25
实验 4	0.000 01	$1/\Delta t$	10^3	10^{-16}	40	30

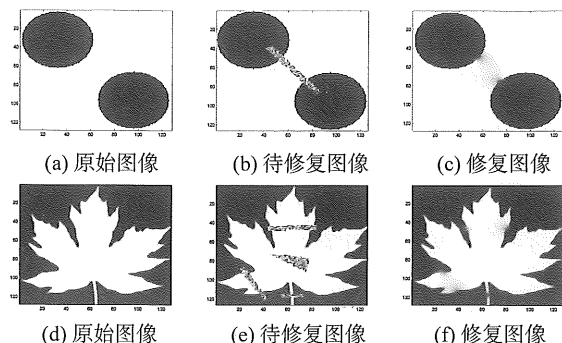


图 2 图像修复结果

Fig. 2 Results of image inpainting

实验 3 本文算法针对两幅真实图像的修复结果, 所用参数和迭代次数见表 2。在图 3 中, (a) 为一幅原始图像, (b) 为其带有划痕的图像, (c) 为修复后的图像。从效果上来看修复图像和原始图像非常相近, 可以证明本文算法对这种划痕是有效的。(d) 为选择的另一幅原始图像, (e) 为在其不同位置有信息缺失的图像, 其缺失区域大多分布在图像边缘上, (f) 为修复后的图像。我们可以看出修复结果仍然十分理想。

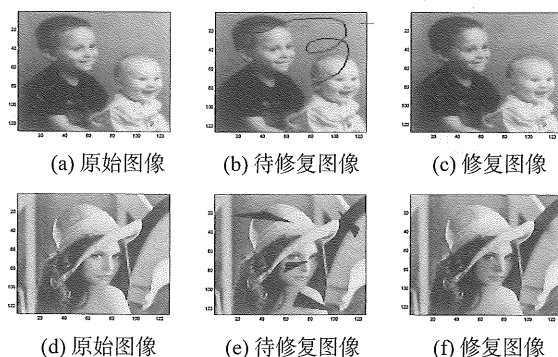


图 3 图像修复结果

Fig. 3 Results of image inpainting

实验 4 本文算法同时去除噪声和修复图像信息的仿真实验。本实验利用本章所提的修复算法同时去除噪声和修补图像中缺失的信息, 结果如图 4 所示。我们同样选择了两幅图像, 其中 (a) 和

(d) 为原始图像, (b) 和 (e) 为破损且加噪图像, (c) 和 (f) 为本文算法修复的图像。从图中可以看出, 本文算法可以有效地修复破损的噪声图像。

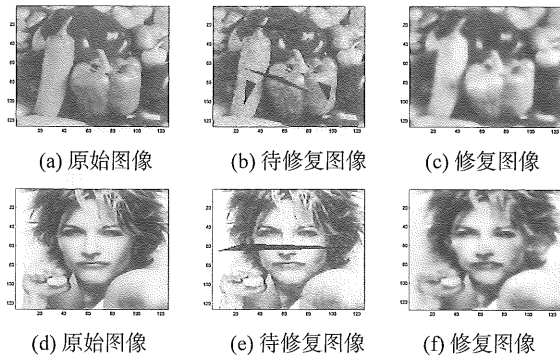


图 4 图像修复结果

Fig. 4 Results of image inpainting

实验 5 本文算法移除图中不需要的景物, 修复图像的仿真实验。结果如图 5 所示, (a) 和 (d) 为原始图像, (b) 和 (e) 是在图中标出修复区域的图像, (c) 和 (f) 为修复结果。从修复后的图像可以看出, 虽然移除景物面积较大但是本文算法仍然得到了很好的修复效果, 使观察者难以察觉图像曾经被修改过。但是修复后的图像亮度发生了轻微的变化, 相关计算过程值得我们研究改进。

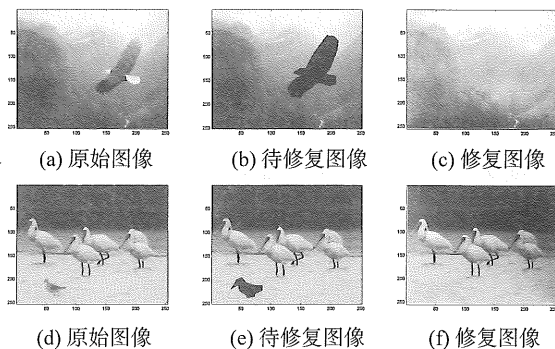


图 5 图像修复结果

Fig. 5 Results of image inpainting

5 结 论

本文基于 Navier-Stokes 方程, 提出了一个新的图像修复的数学模型。该模型能够在待修复区域对图像丢失或破损的信息进行修补, 而在待修复区域外去除噪声。

该模型的思想来自于不可压流体力学的 Navier-Stokes 方程的物理背景, 以及流体速度方向和图像的等照度线方向之间的一致性。对于图像信息丢失或损坏, 并且带有噪声的图像, 修复将被自适应方程完成, 在修复区域内表现为信息由边界向内部传播, 在修复区域外表现为异性光滑。实验结果显示了模型在处理破损图像 (图 2, 图 3 和图 5) 或噪声图像 (图 4) 时的有效性和实用性。但是模型也存在某些不足, 如在保持修复区域图像边缘方面如图 2, 图 4, 如何避免这些缺点将是以后继续研究的工作。

参考文献:

- [1] BERTALMIO M, SAPIRO G, BALLESTER C, et al. Image inpainting [C] // Siggraph 2000, Computer Graphics proceedings, K. Akeley, Ed ACM Press/ ACM SIGGRAPH/ Addison Wesley Longman, 2000:417 - 424.
- [2] BALLESTER C, BERTALMIO M, CASELLES V. Filling in by joint interpolation of vector fields and gray levels [J]. IEEE Trans Image Processing, 2001, 10 (8): 1200 - 1211.
- [3] BERTALMIO M, BERTOZZI A L, SAPIRO G. Navier-Stokes, fluid dynamics and image and video inpainting [J]. IEEE Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR), 2001, 1: 355 - 362.
- [4] WILSON A, RYO T. Inpainting with the Navier-Stokes equations [R]. <http://www.math.ucla.edu/~rrtakei/gradProj/930project.pdf>.
- [5] TAI X C, OSHER S, HOLM R. Image inpainting using TV-Stokes equation [C] // Image Processing Based on Partial Differential Equations, Springer, Heidelberg, 2006:3 - 22.
- [6] CHAN T F, SHEN J. Mathematical models for local non-texture inpaintings [J]. SIAM J Appl Math, 2002, 62 (3): 1019 - 1043.
- [7] RUDIN L, OSHER S, FATEMI E. Nonlinear total variation based noise removal algorithms [J]. Physica D, 1992, 60:259 - 268.
- [8] CHAN T F, KANG S H, SHEN J. Euler's elastica and curvature-based inpainting [J]. SIAM J Appl Math, 2002, 63(2): 564 - 592.
- [9] CHAN T F, SHEN J, VESE L. Variational PDE models in image processing [J]. Notices Am Math Soc, 2003, 50(1): 14 - 26.
- [10] CHAN T, SHEN J. Non-texture inpainting by curvature-driven diffusions (CDD) [J]. J Visual Comm. Image Rep, 2001, 12(4):436 - 449.

- ator [J]. *J Differential Equation*, 2004, 196: 209 – 225.
- [8] WANG M X. Non-constant positive steady states of Sel'kov model [J]. *J Differential Equation*, 2003, 190: 600 – 620.
- [9] PENG R, WANG M X. Global stability of the equilibrium of a diffusive Holling-Tanner prey-predator model [J]. *Appl Math Lett*, 2007, 20: 664 – 670.
- [10] PENG R, WANG M X. Positive steady states of the Holling-Tanner prey-predator model with diffusion [J]. *Proc Roy Soc Edinburgh (A)*, 2005, 135: 149 – 164.
- [11] PENG R, WANG M X, YANG G Y. Stationary patterns of the Holling-Tanner prey-predator model with diffusion and cross-diffusion [J]. *Appl Math Comp*, 2008, 196: 570 – 577.
- [12] DUBEY B, DAS B, HASSAIN J. A predator-prey interaction model with self and cross-diffusion [J]. *Ecol Model*, 2002, 141: 67 – 76.
- [13] NAKASHIMA K, YAMADA Y. Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion [J]. *Adv Differ Equat*, 1996, 6: 1099 – 1122.
- [14] RYU K, AHN I. Positive steady-states for two interacting species models with linear self-cross diffusions [J]. *Discrete Contin Dynam Syst*, 2003, 9: 1049 – 1061.
- [15] LOU Y, NI W M. Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion [J]. *J Differential Equation*, 1996, 131: 79 – 131.
- [16] LIN C S, NI W M, TAKAGI I. Large amplitude stationary solutions to a chemostat systems [J]. *J Differential Equation*, 1988, 72: 1 – 27.

(上接第 13 页)

- [11] ESEDOGLU S, SHEN J. Digital inpainting based on the Mumford-Shah-Euler image model [J]. *European Journal of Applied Mathematics*, 2002, 13: 353 – 370.
- [12] MUMFORD D, SHAH J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems [J]. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1989, 42: 577 – 685.
- [13] GROSSAUER H, SCHERZER O. Using the complex Ginzburg-Landau equation for digital inpainting in 2d and 3d, scale space methods in computer vision [J]. *Lecture Notes in Computer Science* 2695, 2003: 225 – 236.
- [14] BORNEMANN F, MÄRZ T. Fast image inpainting based on coherence transport [J]. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2007, 28(3): 259 – 278.
- [15] BERTALMIO M, VESE L, SAPIRO G, et al. Simultaneous texture and structure image inpainting [J]. *IEEE Tran Image Process*. 2003, 12(8): 882 – 889.
- [16] CRIMINISI A, PEREZ P, TOYAMA K. Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting [J]. *IEEE Trans Image Processing*, 2004, 13(9): 1200 – 1212.
- [17] WEXLER Y, SHECHTMAN E, IRANI M. Space-time video completion [J]. *IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell*, 2007, 29(3): 1463 – 1476.
- [18] FADILI M, STARCK J, MURTAGH F. Inpainting and zooming using sparse representations [J]. *Comput J*, 2009, 52(1): 64 – 79.
- [19] KOMODAKIS N, TZIRITAS G. Image completion using efficient belief propagation via priority scheduling and dynamic pruning [J]. *IEEE Transactions on Image Processing*, 2007, 16(11): 2649 – 2661.
- [20] AUJOL J, LADJAL S, MASNOU S. Exemplar-based inpainting from a variational point of view [J]. *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 2010, 42(3): 1246 – 1285.
- [21] MAJDA A, BERTOZZI A. Vorticity and incompressible flow [M]. Cambridge Univ Press, 2001.
- [22] TAI X. Global extrapolation with a parallel splitting method [J]. *Numerical Algorithm*, 1991, 3: 527 – 440.
- [23] WEICKERT J, ROMENY B, VIERGEVER M. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering [J]. *IEEE Trans on Image Processing*, 1998, 7(3): 398 – 410.
- [24] KUHNE G, WEICKERT J, VIERGEVER M. Fast implicit active contours models lecture [J]. *Notes on Computer Science*, 2002, 2449: 133 – 140.