第 51 卷　第 4 期　中山大学学报（自然科学版）　Vol. 51　No. 4
2012 年　7 月　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　Jul.　2012

模糊随机过程函数列均方一致 Henstock 积分的可积性*

任爱红
（宝鸡文理学院数学系，陕西 宝鸡 721013）

摘　要：引进了模糊随机过程函数列均方一致 Henstock 可积的概念，研究了模糊随机过程函数列均方一致 Henstock 可积的充分必要条件，得出了模糊随机过程函数列的收敛定理。

关键词：二阶模糊随机过程；均方 Henstock 积分；均方一致 Henstock 可积
中图分类号：O159　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）04－0041－04

Uniform Integrability of Mean-Square Henstock Integral for the Sequence of Fuzzy Stochastic Process

REN Aihong
（Department of Mathematics，Baoji University of Arts and Sciences，Baoji 721013，China）

Abstract：Definition of uniform integrability of mean-square Henstock integral for the sequence of fuzzy stochastic process is introduced. A necessary and sufficient condition of uniform integrability of mean-square Henstock integral for the sequence of fuzzy stochastic process is studied. Finally，convergence theorem is obtained.

Key words：second-order fuzzy stochastic process；mean-square Henstock integral；uniform mean-square Henstock integral

Henstock 积分又称 Kurzwarl 积分或广义黎曼积分，Henstock 积分不仅包含牛顿积分、黎曼积分和勒贝格积分，而且不需要测度理论的支持。近年来，许多学者已将其引入到模糊数学领域，并对其理论进行了深入的研究[1－4]。然而与模糊数值函数 Henstock 积分的研究成果相比，对模糊随机过程均方 Henstock 积分的研究显得非常欠缺[5－9]。由于收敛定理对积分理论的研究非常重要，因此，研究模糊随机过程均方 Henstock 积分的收敛定理是非常有意义的。本文引进了二阶模糊随机过程均方一致 Henstock 可积的概念，利用均方一致 Henstock 可积，研究了二阶模糊随机过程均方一致 Henstock 可积的充分必要条件，得出了模糊随机过程函数列的收敛定理。

1　预备知识

模糊数空间 $E^d = \{v:\mathbf{R}^d \to [0,1]\}$，$v$ 满足如下条件：

（i）v 是正规模糊集；（ii）v 是凸模糊集；（iii）v 是上半连续的；（iv）$[v]^0 = \overline{\{x \in \mathbf{R}^d \mid v(x) > 0\}}$ 是紧集。

对于任意的 $v \in E^d$，称 $[v]^\alpha = \{x \in \mathbf{R}^d \mid v(x) \geqslant \alpha\}$ 为 v 的 α 水平截集。

设 $\forall u,v \in E^d$，在 E^d 上定义距离 $D(u,v) = \sup\limits_{\alpha\in[0,1]} d([u]^\alpha,[v]^\alpha)$，其中 $d(\cdot,\cdot)$ 是 Hausdorff 距离。(E^d,D) 是一完备距离空间。（更多结论可参阅文献［10］）特别地，$\forall u \in E^d$，定义距离 $\|u\| = D(u,\hat{0}) = \|[u]^0\| = \sup\limits_{a\in[u]^0} |a|$。

* **收稿日期**：2011－09－24
基金项目：陕西省教育厅科研计划资助项目（11JK0506）
作者简介：任爱红（1979 生），女，讲师，博士生；E-mail：raih2003@yahoo.com.cn

设 (Ω,A,P) 是一完备的概率空间，Borel 可测函数 $X:(\Omega,A)\rightarrow(E^d,D)$ 称为模糊随机变量。设 $L^2=\{X\mid X$ 是一模糊随机变量且 $E\|X\|^2<\infty\}$，称 L^2 为二阶模糊随机变量的全体。对任意 $X,Y\in L^2$，定义 L^2 上的距离为 $\rho(X,Y)=[ED^2(X,Y)]^{\frac{1}{2}}$。

设 T 是一实数集，称 $X:T\rightarrow L^2$ 为二阶模糊随机过程。若在点 $t\in T$，X 关于 ρ 连续，称 X 在点 t 均方连续。若在 T 上的所有点都均方连续，则称 X 在 T 上均方连续（更多结论可参阅文献[5－7]）。

本文中，假定对任意的 $t\in[a,b]$，H 差 $X(t)\Theta X(s)(s<t)$ 总是存在。下面给出二阶模糊随机过程均方 Henstock 积分的定义。

定义 1 设 $\delta(x)>0$ 是 $[a,b]$ 上的一个实值函数，$[a,b]$ 的一个划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,n\}$，如果满足下列条件：

(i) $a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$；(ii) $\xi_i\in[t_{i-1},t_i]\subset(\xi_i-\delta(\xi_i),\xi_i+\delta(\xi_i)),i=1,2,\cdots,n$，则称划分 T 为 $\delta(x)$ 的精细划分，其中 t_i 称为分点，ξ_i 称为 $[t_{i-1},t_i]$ 的关联点。

定义 2[6] 设 $X(t)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的二阶模糊随机过程，若对任意 $\varepsilon>0$，存在实值函数 $\delta(t)>0$，使得对区间 $[a,b]$ 上的任意 δ 精细划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,n\}$，有 $\rho(S_T,\int_a^b X(t)\mathrm{d}t)<\varepsilon$，其中 $S_T=\sum_{i=1}^{n}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$，则称 $X(t)$ 在 $[a,b]$ 上均方 Henstock 可积。（简称均方 H 可积）

2 主要结果和证明

下面先给出二阶模糊随机过程均方一致 Henstock 可积的定义。

定义 3 设 $\{X_n,n\in\mathbf{N}\}\in L^2$ 是 $[a,b]$ 上 Henstock 可积函数列，称 $\{X_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积，如果对任给 $\varepsilon>0$，存在实值函数 $\delta(t)>0$，使得对 $[a,b]$ 上的任意 δ 精细划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 及任一 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\rho(\sum_{i=1}^{m}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(b)\Theta G_n(a))<\varepsilon$$

其中 $G_n(t)=\int_a^t X_n(u)\mathrm{d}u$ 是 $X_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数，记 $G_n(a,b)=G_n(b)\Theta G_n(a)$。

现在我们来证明模糊随机过程函数列均方一致 Henstock 可积的充分必要条件。

定理 1 设 $\{X_n,n\in\mathbf{N}\}\in L^2$ 是 $[a,b]$ 上均方 Henstock 可积函数列，则 $\{X_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积，当且仅当对任给 $\varepsilon>0$，存在实值函数 $\delta(t)>0$，使得对 $[a,b]$ 上的任意 δ 精细划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 和 $T'=\{[t'_{i-1},t'_i];\xi'_i,i=1,2,\cdots,l\}$ 及任一 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\rho(\sum_{i=1}^{m}X_n(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\sum_{i=1}^{l}X_n(\xi'_i)(x'_i-x'_{i-1}))<\varepsilon \tag{1}$$

证明 **充分性** 若对任给 $\varepsilon>0$，存在实值函数 $\delta(t)>0$，对 $[a,b]$ 上的任意 δ 精细划分 T 及 T'，上述(1)式成立，则由文献[10]定理 3.1.2 可知，每个 X_n 是 $[a,b]$ 上均方 Henstock 可积的。又因 δ 是共同的，即对任一 $n\in\mathbf{N}$ 成立，所以 $\{X_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积。

必要性 函数列 $\{X_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积，由定义 3，对任给 $\varepsilon>0$，存在实值函数 $\delta(t)>0$，使对区间 $[a,b]$ 上的任意 δ 精细划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 及 $T'=\{[t'_{i-1},t'_i];\xi'_i,i=1,2,\cdots,l\}$ 和所有的 $n\in\mathbf{N}$，

$$\rho(\sum_{i=1}^{m}X_n(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),G_n(b)\Theta G_n(a))<\varepsilon/2;$$

$$\rho(\sum_{i=1}^{l}X_n(\xi'_i)(x'_i-x'_{i-1}),G_n(b)\Theta G_n(a))<\varepsilon/2$$

由三角不等式性，综合以上两式得

$$\rho(\sum_{i=1}^{m}X_n(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),\sum_{i=1}^{l}X_n(\xi'_i)(x'_i-x'_{i-1}))\leqslant$$

$$\rho(\sum_{i=1}^{m}X_n(\xi_i)(x_i-x_{i-1}),G_n(b)\Theta G_n(a))+$$

$$\rho(\sum_{i=1}^{l}X_n(\xi'_i)(x'_i-x'_{i-1}),G_n(b)\Theta G_n(a))<\varepsilon$$

因此不等式(1)成立。

下面给出模糊随机过程函数列均方一致 Henstock 可积的收敛定理。

定理 2 设 $\{X_n,n\in\mathbf{N}\}\in L^2$ 是 $[a,b]$ 上均方 Henstock 可积函数列，满足

(i) $X\in L^2$，并且 $X_n(t)$ 以 L^2 收敛到 $X(t),t\in[a,b]$，即 $\rho(X_n,X)\rightarrow 0$；

(ii) $\{X_n,n\in\mathbf{N}\}$ 在 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积。

则 X 在 $[a,b]$ 上均方 Henstock 可积，且 $\int_a^b X\mathrm{d}t=\lim_{n\rightarrow\infty}\int_a^b X_n\mathrm{d}t$。

证明 由定理假设条件(ii)，函数列 $\{X_n\}$ 在 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积，由定义 3 可知，对任给 $\varepsilon>0$，存在实值函数 $\delta(t)>0$，使对区间

$[a,b]$ 上的任意 δ 精细划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,k\}$ 及任一 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(b)\ominus G_n(a)\right)<\varepsilon$$

现固定精细划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,k\}$，由假设（i），$X_n(t)$ 以 L^2 收敛到 $X(t),t\in[a,b]$，即 $X_n(t)\to X(t)$ 逐点收敛于 $[a,b]$，可得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{k}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1})=\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})$$

对上述极限，取自然数 N_0，使得对任意 $n>N_0$，任给 $\varepsilon>0$，有不等式

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\right)<\varepsilon$$

成立。现在说明 $X_n(t)$ 在 $[a,b]$ 上的原函数 $G_n(a,b)$ 是 L^2 中柯西序列。当 $n>N_0$，有

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(b)\ominus G_n(a)\right)\leqslant$$
$$\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\sum_{i=1}^{k}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\right)+$$
$$\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(b)\ominus G_n(a)\right)<2\varepsilon$$

而且，当 m，$n>N_0$时，由上述不等式可知

$$\rho(G_m(b)\ominus G_m(a),G_n(b)\ominus G_n(a))\leqslant$$
$$\rho\left(G_m(b)\ominus G_m(a),\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})\right)+$$
$$\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1})),G_n(b)\ominus G_n(a)\right)<4\varepsilon$$

因此 $\{G_n(a,b),n\in\mathbf{N}\}$ 为 L^2 中柯西序列，于是存在 $A\in L^2$，$N_1\geqslant N_0$，当 $n>N_1$，有 $\rho(G_n(a,b),A)<\varepsilon$。

根据以上不等式，有

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),A\right)\leqslant\rho\left(\sum_{i=1}^{k}X(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),\right.$$
$$\left.G_n(b)\ominus G_n(a)\right)+\rho(G_n(a,b),A)<2\varepsilon$$

所以 X 在 $[a,b]$ 上均方 Henstock 可积，且 $\int_a^b X\mathrm{d}t=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b X_n\mathrm{d}t$。

定理 3　设 $\{X_n,n\in\mathbf{N}\}\in L^2$ 是区间 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积函数列，若对任给 $\varepsilon>0$，存在实值函数 $\delta(t)>0$，使得对区间 $[a,b]$ 上的任意 δ 精细划分 $T=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,m\}$ 及任一 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\sum_{i=1}^{m}\rho[X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(t_i)\ominus G_n(t_{i-1})]<\varepsilon$$

成立，则对 $[a,b]$ 上 δ 精细部分划分 $T'=\{[t_{i-1},t_i];\xi_i,i=1,2,\cdots,s\}$ 及任一 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\sum_{i=1}^{s}\rho[X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(t_i)\ominus G_n(t_{i-1})]<\varepsilon$$

证明　由于 T' 是 $[a,b]$ 的 δ 精细部分划分，设 $[a,b]\setminus\bigcup\limits_{i=1}^{s}[t_{i-1},t_i]$ 由有限区间 $J_1,J_2,\cdots,J_k$ 组成，因为函数列 X_n 在 $[a,b]$ 上均方一致 Henstock 可积，由文献［10］定理 3.2.3，所以 X_n 在每一个有限区间 $J_1,J_2,\cdots,J_k$ 上也均方一致 Henstock 可积，根据定义 2，对任给正数 $\eta>0$，存在正实值函数 $\delta_l(t)<\delta(t),t\in[a,b]$，使对 $[a,b]$ 上任一 δ_l 精细划分 $T_l=\{[t_{i-1}^l,t_i^l];\xi_i^l,i=1,2,\cdots,m\}$ 和任意 $n\in\mathbf{N}$，有

$$\rho\left(\sum_{i=1}^{m}X(\xi_i^l)(t_i^l-t_{i-1}^l),\int_{J_l}X_n\mathrm{d}t\right)<\frac{\eta}{k+1}\qquad(2)$$

成立，其中 $l=1,2,\cdots,m$。

不妨令和式 $(T')\sum\limits_{i=1}^{s}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1})+\sum\limits_{l=1}^{k}(T_l)\sum\limits_{i=1}^{m}X(\xi_i^l)(t_i^l-t_{i-1}^l)$ 表示区间 $[a,b]$ 上 δ 精细划分 $T'\cup(\bigcup\limits_{l=1}^{k}T_l)$ 所对应的黎曼和，由定理假设条件可知

$$\rho\left((T')\sum_{i=1}^{s}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1})+\sum_{l=1}^{k}(T_l)\cdot\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{m}X(\xi_i^l)(t_i^l-t_{i-1}^l),G_n(b)\ominus G_n(a)\right)<\varepsilon\qquad(3)$$

由（2）-（3）式得

$$(T')\sum\rho\left[\sum_{i=1}^{s}[X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(b)\ominus G_n(a)\right]\leqslant$$
$$\rho\left((T')\sum_{i=1}^{s}X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1})+\sum_{l=1}^{k}(T_l)\cdot\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{m}X(\xi_i^l)(t_i^l-t_{i-1}^l),G_n(b)\ominus G_n(a)\right)+$$
$$\sum_{l=1}^{k}\rho\left(\sum_{i=1}^{m}X(\xi_i^l)(t_i^l-t_{i-1}^l),\int_{J_l}X_n\mathrm{d}t\right)<$$
$$\varepsilon+k\cdot\frac{\eta}{k+1}<\varepsilon+\eta$$

对任意 $\eta>0$ 和所有 $n\in\mathbf{N}$ 都成立，取 $\eta=\varepsilon$，则由上式得

$$\sum_{T'}\rho\left[\sum_{i=1}^{m}[X_n(\xi_i)(t_i-t_{i-1}),G_n(b)\ominus G_n(a)\right]<\varepsilon$$

注 1 从定理 3 可知对单个均方 Henstock 可积函数 X，上述定理仍然成立。

3　结　论

文中，通过引入二阶模糊随机过程均方一致 Henstock 可积的定义，研究了二阶模糊随机过程均

方一致 Henstock 可积的充分必要条件，得出了模糊随机过程函数列的收敛定理。该积分本质上是取值度量空间函数的积分，不需要利用测度理论的支持。根据这种积分的定义和性质，能否给出模糊值过程关于模糊值过程的积分，以及能否定义模糊 Brown 运动，进而研究模糊值过程关于此模糊 Brown 运动的积分问题，对于这种有意义的随机风趣的研究，这是我们后续研究工作的重点。

参考文献：

[1] GONG Z T. On the problem of characterizing derivatives for the fuzzy-valued functions（II）：almost everywhere differentiability and strong Henstock integral［J］. Fuzzy Sets and Systems，2004，145：381－393.

[2] GONG Z T，SHAO Y B. The controlled convergence theorem for the strong Henstock integrals of fuzzy-number-valued functions［J］. Fuzzy Sets and Systems，2009，160：1528－1546.

[3] FENG Y H. Mean-squares integral and differential of fuzzy stochastic process［J］. Fuzzy Sets and Systems，1999，102：271－280.

[4] FENG Y H. Mean-squares Riemann-Stieltjes integrals of fuzzy stochastic process and theirs applications［J］. Fuzzy Sets and Systems，2000，110：27－41.

[5] 李静，冯玉湖. 模糊随机过程的均方 Henstock 积分［J］. 东华大学学报，2007，33(5)：590－594.

[6] 李静. 模糊随机过程的均方 Henstock 积分［D］. 中国优秀硕士学位论文全文数据库，2007.

[7] 任爱红. 二阶模糊随机过程均方 Henstock-Stieltjes 积分的收敛定理［J］. 西南师范大学学报，2011，36(5)：62－66.

[8] 任爱红. 二阶模糊随机过程均方 Henstock-Stieltjes 积分的相关性质［J］. 曲阜师范大学学报，2011，37(1)：35－38.

[9] 任爱红. 二阶模糊随机过程均方 Henstock-Stieltjes 积分［J］. 甘肃科学学报，2012，24(1)：16－19.

[10] 吴从炘，马明. 模糊分析基础［M］. 北京：国防工业出版社，1991.

（上接第 40 页）

关于 $x \in (-1,1)$ 是单调递减函数，再由 Markoff 在文［8，p116，Theorem 6.12.2］中的结论知，

$$x_k^{\lambda} \leqslant x_x^{\lambda+1}, k = 1,2,\cdots,n$$

同理可证，若（ii）成立，则函数 $\dfrac{w(x;a,b,\lambda)}{w(x;a,b,\lambda+1)}$ 关于 $x \in (-1,1)$ 是单调递增函数，因此

$$x_k^{\lambda+1} \leqslant x_x^{\lambda}, k = 1,2,\cdots,n$$

证毕。

参考文献：

[1] BO R，WONG R. Asymptotic behavior of the Pollaczek polynomials and their zeros［J］. Stud Appl Math，1996，96：307－338.

[2] ZHOU J R，ZHAO Y Q. An infinite asymptotic expansion for the extreme zeros of the Pollaczek polynomials［J］. Stud Appl Math，2007，118(2)：255－279.

[3] MASTROIANNI G，OCCORSIO D. Interlacing properties of the zeros of the orthogonal polynomials and approximation of the Hilbert transform［J］. Computers and Mathematics with Applications，1995，30（3）：155－168.

[4] SEGURA J. The zeros of special functions from a fixed point method［J］. SIAM Journal of Numerical Analysis，2002，40(1)：114－133.

[5] PEHERSTORFER F. Linear combination of orthogonal polynomials generating positive quadrature formulas［J］. Mathematics of Computation，1990，55（191）：231－241.

[6] WANG H Y，ZHAO Y Q. Uniform asymptotics and zeros of a system of orthogonal polynomials defined via a difference equation［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications，2010，369（2）：453－472.

[7] BREZINSKI C，DRIVER K A，REDIVO-ZAGLIAC M. Quasi-orthogonality with applications to some families of classical orthogonal polynomials［J］. Applied Numerical Mathematics，2004，48(2)：157－168.

[8] SZEG G. Orthogonal polynomials［M］. New York：American Mathematical Society，1959.