

# 基于粒子群优化算法的均值 - VaR 投资组合选择\*

曾艳姗<sup>1,2</sup>, 李仲飞<sup>3</sup>

(1. 中山大学数学与计算科学学院, 广东 广州 510275;

2. 仲恺农业工程学院 计算科学学院, 广东 广州 510225;

3. 中山大学岭南学院//金融工程与风险管理研究中心, 广东 广州 510275)

**摘要:** 在现实市场中, ① 为防止由卖空交易引起市场操纵等问题的出现, 即使在发达的证券市场, 交易仍受到一定的卖空限制; ② 由于市场相关规定与投资者自身风险控制的需要, 在某些资产上的投资比例受到一定限制; ③ 交易过程中需支付印花税等交易成本。故结合这三方面, 采用 Value-at-Risk (VaR) 度量风险, 在收益率服从正态和非正态分布两种假设下, 构建了带有限卖空约束、投资比例约束和交易成本的均值 - VaR 投资组合模型。首先, 给出了该模型的粒子群优化 (PSO) 算法; 其次采用 A 股市场的实际数据进行了数值实验; 最后分析了有效前沿的特征及有限卖空约束对投资决策的影响。

**关键词:** 均值 - VaR; 有限卖空; 交易成本; 粒子群优化

中图分类号: O22 文献标志码: A 文章编号: 0529 - 6579 (2012) 06 - 0001 - 09

## Mean-VaR Portfolio Selection Based on Particle Swarm Optimization Algorithm

ZENG Yanshan<sup>1,2</sup>, LI Zhongfei<sup>3</sup>

(1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;

2. School of Mathematics and Computational Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, China;

3. Lingnan (University) School//Research Center for Financial Engineering and Risk Management, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** In the real market, (i) in order to prevent market manipulation and other problems caused by short selling, transaction is still subject to some short selling restrictions even in developed markets; (ii) due to the market's relevant regulations and investors' requirement of risk control, the proportions invested in some assets have certain limits; (iii) investors must pay stamp duty and other transaction costs during transaction. Considering these three aspects, Value-at-Risk (VaR) as risk measure is adopted, and a mean-VaR portfolio model is constructed with limited short selling, proportion of investment limits and transaction cost under two assumptions that the rate of return is normal and non-normal distribution. Firstly, a particle swarm optimization (PSO) algorithm is presented for the model; secondly, numerical experiments are provided by using the test data from A stock market of China; finally, the characteristics of the portfolio efficient frontier and the influences on investors' decision-making under the limited short selling constraints are discussed.

**Key words:** mean-VaR; limited short selling; transaction cost; particle swarm optimization

\* 收稿日期: 2012 - 06 - 11

基金项目: 国家杰出青年科学基金资助项目 (70825002); 广东省高等学校高层次人才资助项目; 广东省哲学社会科学规划资助项目 (GD11YYJ07)

作者简介: 曾艳姗 (1978 年生), 女, 博士生; 通讯作者: 李仲飞; E-mail: lnslzf@mail.sysu.edu.cn

Value-at-Risk (VaR), 也称风险价值, 是指在某一给定置信水平和时间水平下可能遭受的最大损失<sup>[1]</sup>。1994 年, Morgan J P 投资银行首先推出了基于 VaR 的风险度量系统。随后, VaR 被广泛应用于各大金融机构和监管部门, 成为度量金融风险的重要标准。它在金融业的广泛应用, 激发了学术界的研究兴趣, 一些学者采用 VaR 代替方差作为风险度量, 研究了均值 - VaR 模型下的最优投资决策问题。Alexander 等<sup>[2]</sup>在收益率服从正态分布的假设下, 最小化给定期望收益水平下投资组合的 VaR, 得到了该模型最优解及有效前沿的表达式, 并把相应的结果推广到了收益率为非正态分布的情形。姚京等<sup>[3]</sup>在文献 [2] 的基础上引入负债, 讨论了均值 - VaR 模型有效前沿的一些性质。姚海祥等<sup>[4]</sup>把基于均值和 VaR 的一般二元效用函数 (关于均值递增, 关于 VaR 递减) 作为模型的目标函数, 研究在收益率服从正态分布时含无风险资产且借贷利率不同情形下的均值 - VaR 模型。上述文献中都允许卖空, 但我国作为新兴的证券市场, 目前对卖空交易是完全禁止的。张鹏<sup>[5]</sup>使用旋转算法求解了在正态分布情形下不允许卖空的均值 - VaR 模型。还有一些学者是通过把 VaR 作为约束引入模型中, 研究 VaR 约束对最优投资组合的影响<sup>[6-8]</sup>。

然而, 上述研究均未考虑有限卖空约束 (允许卖空, 但卖空不能超过一定的比例)、投资比例约束及交易成本。事实上, 有限卖空在发达证券市场具有普遍性。在卖空交易中, 当投资者认为某种证券价格将下跌时, 可以通过缴纳一部分保证金向券商借入证券卖出, 等价格跌到一定程度后再买回同样证券交还以牟取价差。从市场角度看, 卖空制度有利于加强市场的有效性和流动性, 从投资者角度看, 卖空既丰富了其盈利模式又为其提供了避险工具。但是在监管能力不足以驾驭卖空活动的情况下, 卖空可能引致市场动荡、市场滥用和交割混乱等问题。因此, 即使卖空交易已被绝大多数成熟证券市场所采用, 卖空行为仍然受到一些限制。例如, 美国通过调整保证金比率的高低来控制证券市场的卖空交易量, 各证券交易所也都设有追加保证金的规定。香港交易所对卖空交易的监管更严格, 可以根据市场状况随时暂停某一证券的卖空交易或者限定卖空数量上限。再者, 由于投资者受到某些法律法规的约束及自身风险管理的需要, 投资在某些资产上的资金比例不能超过一定值。此外, 在交易过程中, 需支付印花税等交易成本。因此, 在本

文中, 我们考虑了限制投资在个股上的资金比例, 限制卖空总量及交易成本的情形。首先构建了更贴近实际的均值 - VaR 模型, 在收益率服从正态分布和非正态分布两种情形下证明了均值 - VaR 有效前沿的性质及与均值 - 方差有效前沿的关系; 其次, 给出了求解模型的 PSO 算法, 进一步采用 A 股市场实际数据进行了数值实验; 最后, 正如 Byrne 等<sup>[9]</sup>所启示的, 没有一个风险度量是完胜的, 理解现有风险度量的异同使投资者根据投资目标准确地选择恰当的风险度量更为重要, Byrne 等<sup>[9]</sup>使用市场数据比较了  $n$  阶半偏差、绝对偏差、极大极小风险与方差在最小化“风险度量”下得到的投资组合。在本文中, 我们通过数值实验分析 VaR 与方差风险度量在选择投资组合上的特点与异同, 比较了卖空总量限制与个股卖空比例限制对投资者卖空行为的制约程度和投资决策的影响, 并探讨其原因, 为中国证券市场的卖空约束研究提供一些参考。相比而言, 本文有两方面的创新: (i) 同时考虑了三种贴合市场实际的约束, 构造了更接近实际的模型; (ii) 采用了较新的粒子群优化算法进行求解。

本文结构如下: 第一节构建了相应的均值 - VaR 模型; 第二节给出了 PSO 算法, 叙述了 PSO 算法中的约束修正函数以及模型的算法流程; 第三节采用 A 股市场实验数据进行了数值实验, 讨论了 VaR 风险度量在投资组合选择上的特点、验证均值 - VaR 与均值 - 方差有效前沿的关系以及有限卖空约束对投资决策的影响; 最后一节是结论。

## 1 均值 - VaR 投资组合模型

假设投资者选择  $n$  种风险资产进行组合投资, 第  $i$  种风险资产的期望收益率为  $r_i$ , 它们收益率的协方差矩阵为  $\Sigma = (\sigma_{ij})_{n \times n}$  (假设是非奇异的),  $x_i$  表示投资在第  $i$  种风险资产上的资金比例, 则投资组合  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  满足

$$\sum_{i=1}^n x_i = 1 \quad (1)$$

为维护市场的稳定, 防止由卖空交易引起市场操纵和违约风险过量累积等问题的出现, 发达证券市场对卖空交易在价格、借券以及交付等方面作了规定, 并通过保证金制度和抵押卖空所得等措施限制市场卖空总量。设投资者卖空的比例不能超过  $k$ , 即  $\sum_{i=1}^n \max(0, -x_i) \leq k$ , 或  $\sum_{i=1}^n \frac{|x_i| - x_i}{2} \leq k$ 。故卖空的总量限制为

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 + 2k \quad (2)$$

当  $k = 0$  时, 不允许卖空, 当  $k = +\infty$  时, 允许 (无限) 卖空。

设投资在各个风险资产上的资金比例具有上、下界限。这个限制既可能是由于某些法律法规、监管条件所决定, 也有可能出于自身风险管理的需要。设  $l_i \geq 0$  和  $u_i \geq 0$ , 风险资产的投资比例限制为

$$-l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

当  $l_i = u_i = +\infty$  时, 对投资在第  $i$  个风险资产上的资金比例无限制; 当  $l_i = 0$  时, 则限制第  $i$  个风险资产不允许卖空。满足 (1) - (3) 的投资组合的集合记作  $S$ , 即

$$S = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \sum_{i=1}^n x_i = 1,$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i| \leq 1 + 2k, -l_i \leq x_i \leq u_i, i = 1, 2, \dots, n\}$$

进一步, 我们考虑交易成本。假设第  $i$  个风险资产按比例计算的交易成本记为  $c_i$ , 一般情况下, 买入和卖出的交易费率不相等。如, 在我国证券市场, 印花税在 2008 年 9 月由向双边征收改为仅向卖方单边征收。假设买入和卖出的交易费率分别记为  $c_i^b$  和  $c_i^s$ , 通常有  $c_i^s \geq c_i^b$ 。给定期初的投资组合  $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ , 交易第  $i$  个风险资产所付出的交易成本为

$$c_i = c_i^b \max\{0, x_i - x_i^0\} + c_i^s \max\{0, x_i^0 - x_i\} = c_i^b \frac{|x_i - x_i^0| + (x_i - x_i^0)}{2} + c_i^s \frac{|x_i - x_i^0| - (x_i - x_i^0)}{2} \quad (4)$$

假定已知  $n$  个风险资产的  $T$  期历史样本数据, 令  $r_{it}$  表示第  $i$  个风险资产在第  $t(t = 1, 2, \dots, T)$  期的历史收益率, 第  $i$  个风险资产的期望收益率表示为  $r_i = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T r_{it}, i = 1, 2, \dots, n$ , 则投资组合的期望收益率为

$$E(x) = \sum_{i=1}^n (r_i x_i - c_i) \quad (5)$$

投资组合的方差为

$$V(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} \quad (6)$$

为了得到不同期望收益下, 方差最小的投资组合, 引入参数  $\lambda \in [0, 1]$ , 令  $F_0(x) = \lambda \times (6) - (1 - \lambda) \times (5)$ , 则均值 - 方差 (M - V) 模型可表示为

$$\min F_0(x) = \lambda \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij} - (1 - \lambda) \sum_{i=1}^n (x_i r_i - c_i), \quad \text{s. t.} \quad (1) - (4) \quad (7)$$

当  $\lambda = 0$  时, 模型 (7) 得到最大化期望收益的投资组合, 不考虑投资组合的方差风险。当  $\lambda = 1$  时, 模型 (7) 得到最小化方差风险的投资组合, 不考虑该组合期望收益。由此,  $\lambda$  的大小反映出投资者对风险的厌恶程度, 称  $\lambda$  为风险厌恶系数。取任意  $\lambda \in [0, 1]$ , 对应可得到模型 (7) 的最优投资组合, 这些投资组合均值和方差构成的集合  $\{( \text{均值}, \text{方差} )\}$  为模型 (7) 的有效前沿。

设投资组合的收益率为  $\gamma$ , 给定置信度  $\alpha (\alpha > 0.5)$ , 则  $\gamma$  的 VaR 定义为

$$\text{Prob}(\gamma \leq -\text{VaR}_\alpha) = 1 - \alpha$$

用  $\mu$  和  $\sigma$  分别表示  $\gamma$  的期望和标准差, 则  $\text{VaR}_\alpha = \kappa(\alpha)\sigma - \mu$ , 即

$$V_\alpha(x) = \kappa(\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} - \sum_{i=1}^n (x_i r_i - c_i) \quad (8)$$

由文献 [2] 可知, 当收益率服从正态分布时,  $\kappa(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$ ,  $\Phi(\cdot)$  表示标准正态分布的分布函数; 当资产收益率不服从正态分布并存在有限的均值和方差时, 由切比雪夫不等式可得到 VaR 的上界, 此时  $\kappa(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha}}$ 。随后, Ghaoui 等<sup>[10]</sup>, Bertsimas 等<sup>[11]</sup>得到了非正态情形下 VaR 上

界更精确的表达式, 此时  $\kappa(\alpha) = \sqrt{\frac{\alpha}{1 - \alpha}}$ 。

为了得到不同期望收益下, 最小化 VaR 的投资组合, 引入风险厌恶系数  $\lambda \in [0, 1]$ , 令  $F_1(x) = \lambda \times (8) - (1 - \lambda) \times (5)$ , 则均值 - VaR (M - VaR) 模型可表示为

$$\min F_1(x) = \lambda \kappa(\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \sigma_{ij}} - \sum_{i=1}^n (x_i r_i - c_i), \quad \text{s. t.} \quad (1) - (4) \quad (9)$$

**定义 1** 给定置信度  $\alpha (\alpha > 0.5)$ , 投资组合  $x \in S$  在均值 - VaR 模型的有效前沿上当且仅当不存在投资组合  $x' \in S$ , 使得  $E(x') \geq E(x)$  和  $V_\alpha(x') \leq V_\alpha(x)$  且其中至少有一个不等式严格成立。

**定理 1** 给定置信度  $\alpha_1 > \alpha_2 > 0.5$ , 模型 (9) 在置信度  $\alpha_2$  下的有效前沿是其在置信度  $\alpha_1$  下的有效前沿的子集。

**证明** 假设  $x_m \in S$  是模型 (9) 在置信度为  $\alpha_2$

的有效前沿上的任一个投资组合, 若  $x_m$  不在置信度为  $\alpha_1$  的有效前沿上, 则存在一个投资组合  $x'_m \in S$ , 使得  $V_{\alpha_1}(x'_m) \leq V_{\alpha_1}(x_m)$ ,  $E(x'_m) \geq E(x_m)$  且其中至少有一个不等式严格成立。由于  $0 < \frac{\kappa(\alpha_2)}{\kappa(\alpha_1)} < 1$ ,

$$\frac{\kappa(\alpha_2)}{\kappa(\alpha_1)} V_{\alpha_1}(x'_m) - \left(1 - \frac{\kappa(\alpha_2)}{\kappa(\alpha_1)}\right) E(x'_m) \leq \frac{\kappa(\alpha_2)}{\kappa(\alpha_1)} V_{\alpha_1}(x_m) - \left(1 - \frac{\kappa(\alpha_2)}{\kappa(\alpha_1)}\right) E(x_m)$$

得到  $V_{\alpha_2}(x'_m) \leq V_{\alpha_2}(x_m)$ ,  $E(x'_m) \geq E(x_m)$  且其中至少有一个不等式严格成立, 即  $x_m$  不是模型 (9) 在置信度为  $\alpha_2$  的有效前沿上的投资组合, 矛盾。由  $x_m$  的任意性, 在置信度  $\alpha_2$  的有效前沿上的投资组合必然在置信度为  $\alpha_1$  的有效前沿上, 证毕。

**定理 2** 给定置信度  $\alpha (\alpha > 0.5)$ , (i) 模型 (9) 的有效前沿是模型 (7) 的有效前沿的子集; (ii) 当  $\alpha \rightarrow 1$ , 模型 (9) 的有效前沿收敛到模型 (7) 的有效前沿。

**证明** 先证收益率服从正态分布的情形, 此时  $\kappa(\alpha) = \Phi^{-1}(\alpha)$ 。(i) 在置信度为  $\alpha (\alpha > 0.5)$  时, 假设模型 (9) 有效前沿上的一个投资组合为  $x_m \in S$ 。若  $x_m$  不是模型 (7) 有效前沿上的投资组合, 则存在一个投资组合  $x'_m \in S$ , 使得  $V(x_m) \geq V(x'_m)$ ,  $E(x_m) \leq E(x'_m)$  且其中至少有一个不等式严格成立。此时,  $\Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{V(x_m)} - E(x_m) \geq \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{V(x'_m)} - E(x'_m)$ , 即  $V_{\alpha}(x_m) \geq V_{\alpha}(x'_m)$ ,  $E(x_m) \leq E(x'_m)$  且其中至少有一个不等式严格成立,  $x_m$  不是模型 (9) 的有效前沿上的一个投资组合, 矛盾。(ii) 假设模型 (7) 有效前沿上的一个投资组合为  $x_m \in S$ , 若  $x_m$  不是模型 (9) 有效前沿上的投资组合, 则存在一个投资组合  $x'_m \in S$ , 使得  $V_{\alpha}(x_m) \geq V_{\alpha}(x'_m)$ ,  $E(x_m) \leq E(x'_m)$  且其中至少有一个不等式严格成立。假设  $E(x'_m) = E(x_m) + a \geq E(x_m)$ , 则  $V(x'_m) = V(x_m) + b$ ,  $a, b > 0$ 。此时,  $V_{\alpha}(x'_m) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{V(x'_m)} - E(x'_m) = \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{V(x_m) + b} - E(x_m) - a$ , 当  $\alpha \rightarrow 1$ ,  $\Phi^{-1}(\alpha) \rightarrow \infty$ ,  $V_{\alpha}(x'_m) \geq V_{\alpha}(x_m)$ , 矛盾, 结合 (i), 得证。再证收益率为非正态分布的情形, 此时  $\kappa(\alpha) =$

$\sqrt{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$ , 证明与正态分布情形的类似, 略。证毕。

## 2 PSO 算法优化求解

模型 (9) 是一个带约束的非线性规划问题,

利用最优化理论很难得到解析解。PSO 算法具有原理简单、实现容易、通用性强、优化效果好等特点, 已被广泛用于连续或离散型优化问题的求解<sup>[12-13]</sup>。本文采用 PSO 算法求解, 根据模型 (9) 设定了粒子位置矢量的表达、迭代更新公式、适应度函数以及设计特定的修正函数处理约束条件, 最后给出了算法的流程图。

### 2.1 粒子迭代

粒子的飞行空间对应着问题的搜索空间, 每个粒子代表优化问题的一个候选解。根据模型 (9), 粒子在  $n$  维搜索空间中迭代, 由  $m$  个粒子组成种群  $X = \{x^1, x^2, \dots, x^m\}$ , 其中第  $i$  个粒子的位置  $x^i = (x_1^i, x_2^i, \dots, x_n^i)^T$  对应着模型的一个候选的投资组合, 其速度记为  $v^i = (v_1^i, v_2^i, \dots, v_n^i)^T$ , 粒子的个体历史最优位置记为  $\text{pbest}^i = (p_{b1}^i, p_{b2}^i, \dots, p_{bn}^i)^T$ , 表示第  $i$  个粒子“飞行”历史中找到的迄今为止最优的投资组合。所有粒子  $\text{pbest}^i (i = 1, 2, \dots, m)$  中的最优投资组合称为群体最优, 记作  $\text{gbest} = (p_{g1}, p_{g2}, \dots, p_{gn})^T$ 。求解过程中, 第  $i$  个粒子的第  $d$  维在第  $t+1$  次迭代时按公式 (10) 和 (11) 更新位置和速度, 即

$$v_d^i(t+1) = \omega v_d^i(t) + c_1 r_1 (p_{bd}^i - x_d^i(t)) + c_2 r_1 (p_{gd} - x_d^i(t)) \quad (10)$$

$$x_d^i(t+1) = x_d^i(t) + v_d^i(t+1) \quad (11)$$

其中,  $c_1$  和  $c_2$  为正的加速常数,  $r_1$  和  $r_2$  为  $[0, 1]$  之间的随机数,  $\omega$  为惯性权因子。

### 2.2 适应度函数

粒子群算法设置适应度函数来评价每次迭代后的个体最优粒子和群体最优粒子。以模型的目标函数作为适应度函数, 可表示为

$$f_1(p) = \lambda \Phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^p x_j^p \sigma_{ij}} - \sum_{i=1}^n (x_i^p r_i - c_i) \quad (12)$$

$$f_2(p) = \lambda \sqrt{\frac{\alpha \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i^p x_j^p \sigma_{ij}}{1-\alpha}} - \sum_{i=1}^n (x_i^p r_i - c_i) \quad (13)$$

其中,  $f_1(p)$  是模型 (9) 在正态分布情形下第  $p$  个粒子的适应度函数,  $f_2(p)$  是模型 (9) 在非正态分布情形下第  $p$  个粒子的适应度函数。

### 2.3 约束修正

基于 PSO 算法的约束优化方法主要分为两类<sup>[14]</sup>: 1) 罚函数法; 2) 设计特定的进化操作或

约束修正因子。针对约束 (1) - (3) 设计约束修正函数, 把非可行粒子按原来得到的迭代位置修正到可行空间  $S$  上, 使得每次迭代后的粒子位置都是可行解。

假定第  $p$  个粒子的位置为  $x^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)^T$ 。用  $I_0$  表示卖空风险资产的下标集,  $I_1 = \bar{I}_0$  表示买入风险资产的下标集, 即  $x_i < 0 \{i \in I_0\}$ ,  $x_i \geq 0 \{i \in I_1\}$ 。令  $\theta = -\sum_{i \in I_0} x_i^p$  为卖出资产比例之和的相反数,  $\eta = \sum_{i \in I_1} x_i^p$  为买入资产比例之和。若  $\eta - \theta = 1$ , 则满足约束 (1), 调整结束; 否则, 差额部分  $|\eta - \theta - 1|$  按对应所占比重相应增加或减少, 令

$$x_i^p = \begin{cases} x_i^p + \frac{x_i^p}{\eta + \theta}(\eta - \theta - 1), & i \in I_0, \\ x_i^p - \frac{x_i^p}{\eta + \theta}(\eta - \theta - 1), & i \in I_1 \end{cases} \quad (14)$$

检查是否满足卖空总量限制。再次, 令  $\theta = -\sum_{i \in I_0} x_i^p$  为卖出资产比例之和的相反数,  $\eta = \sum_{i \in I_1} x_i^p$  为买入资产比例之和, 若  $e = \theta - k \leq 0$ , 则满足约束 (2), 调整结束; 否则, 令

$$x_i^p = \begin{cases} x_i^p - e \cdot \frac{x_i^p}{\theta}, & i \in I_0, \\ x_i^p - e \cdot \frac{x_i^p}{\eta}, & i \in I_1 \end{cases} \quad (15)$$

检查是否满足投资比例限制。若  $x_i^p \geq 0$ , 即  $i \in I_1$ , 检查是否满足投资上限的要求。令  $a_i = u_i - x_i^p \{i \in I_1\}$ , 则投资组合允许可增加的投资总比例为  $U = \sum_{a_i > 0} a_i$ , 投资组合中超出投资上限的总比例为  $\alpha = -\sum_{a_i \leq 0} a_i$ , 若  $\alpha \neq 0$ , 则

$$x_i^p = \begin{cases} x_i^p + \alpha \cdot \frac{a_i}{U}, & a_i > 0, \\ u_i, & a_i \leq 0 \end{cases} \quad (16)$$

若  $x_i^p < 0$ , 即  $i \in I_0$ , 检查是否满足投资下限的要求。令  $s_i = x_i^p + l_i \{i \in I_0\}$ , 则投资组合允许可减的投资总比例为  $L = \sum_{s_i > 0} s_i$ , 投资组合中低于投资下限的总比例为  $\delta = -\sum_{s_i \leq 0} s_i$ , 若  $\delta \neq 0$ , 则

$$x_i^p = \begin{cases} x_i^p - \delta \cdot \frac{s_i}{L}, & s_i > 0, \\ -l_i, & s_i \leq 0 \end{cases} \quad (17)$$

若  $\alpha = 0$  和  $\delta = 0$  同时成立, 则满足约束 (3), 调整结束。

综上, 约束修正函数 Arrange () 的伪代码如下:

```

Begin
 $\theta = -\sum_{i \in I_0} x_i^p, \eta = \sum_{i \in I_1} x_i^p$ 
If  $\eta - \theta \neq 1$  then run (14)
Endif
 $\theta = -\sum_{i \in I_0} x_i^p, \eta = \sum_{i \in I_1} x_i^p, e = \theta - k$ 
If  $e > 0$  then run (15)
Endif
 $a_i = u_i - x_i^p, \forall i \in I_1, \alpha = -\sum_{a_i \leq 0} a_i$ 
If  $\alpha \neq 0$  then  $U = \sum_{a_i > 0} a_i$  and run (16)
Endif
 $s_i = x_i^p + l_i, \forall i \in I_0, \delta = -\sum_{s_i \leq 0} s_i$ 
If  $\delta \neq 0$  then  $L = \sum_{s_i > 0} s_i$  and run (17)
Endif
End
    
```

整个算法的流程图如图 1 所示。

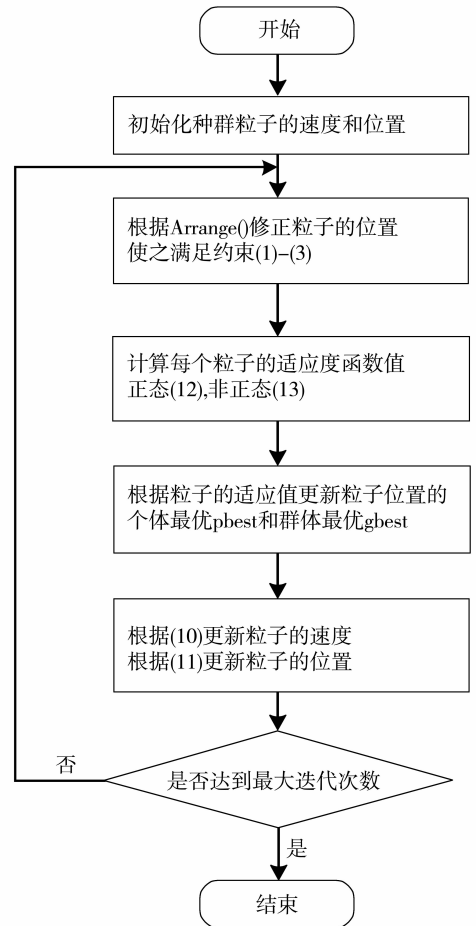


图 1 带约束修正的 PSO 算法流程图  
Fig. 1 Flow chart of PSO with constraints arrangement

### 3 数值实验与结果

本节采用 A 股市场实际数据进行数值实验, 进一步验证定理 1-2, 并研究均值 - VaR 与均值 - 方差模型中投资组合选择的异同以及分析有限卖空约束对投资决策的影响。

#### 3.1 模型数据与算法的参数设置

从上证 50 中随机选取 6 只股票: S1 (潞安环能, 601699)、S2 (海螺水泥, 600585)、S3 (上海汽车, 600104)、S4 (中金黄金, 600489)、S5 (金地集团, 600383)、S6 (三一重工, 600031), 以 2009 年 4 月 1 日至 11 月 30 日的 8 个月的月收益率作为样本数据 (数据来源: 国元领航), 得到月收益率的均值见表 1。

表 1 股票月收益率的均值

Table 1	Mean monthly return of stocks						%
证券	S1	S2	S3	S4	S5	S6	
均值	12.57	3.60	13.44	1.06	5.97	6.09	

协方差矩阵  $\Sigma = (\sigma_{ij})_{6 \times 6}$  为

$$\Sigma \times 10^2 = \begin{pmatrix} 4.05 & 2.15 & 2.44 & 1.18 & 2.72 & 1.50 \\ 2.15 & 1.87 & 1.54 & 0.33 & 1.19 & 1.17 \\ 2.44 & 1.54 & 2.05 & 1.30 & 2.11 & 1.09 \\ 1.18 & 0.33 & 1.30 & 2.22 & 2.12 & 0.15 \\ 2.72 & 1.19 & 2.11 & 2.12 & 3.12 & 1.03 \\ 1.50 & 1.17 & 1.09 & 0.15 & 1.03 & 1.16 \end{pmatrix}$$

模型的常量取值: 卖空总量限制  $k = 1$ , 初始投资比例  $x^0 = (0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1, 0.1)$ , 投资比例限制  $(-l_i, u_i) = (-0.5, 1)$ , 买入交易费率  $c^b = 0.4\%$ , 卖出交易费率  $c^s = 0.5\%$ 。

本文的粒子群算法采用线性递减惯性权重因子<sup>[14]</sup>, 即

$$\omega = \omega_{\max} - \frac{t(\omega_{\max} - \omega_{\min})}{t_{\max}}$$

随着迭代次数  $t$  的增加, 惯性权重因子从最大值  $\omega_{\max}$  减小到最小值  $\omega_{\min}$ 。迭代初期较大的惯性因子有利于跳出局部极小点, 便于全局搜索, 迭代后期较小的惯性因子有利于对当前的搜索区域进行精确局部搜索, 加快算法收敛。PSO 算法参数取值<sup>[15]</sup>:  $\omega_{\max} = 0.9$ ,  $\omega_{\min} = 0.4$ , 粒子维数  $n = 6$ , 加速因子  $c_1 = c_2 = 2$ , 粒子数  $m = 20 \lfloor \sqrt{n} \rfloor = 40$ , 最大迭代步数  $t_{\max} = \lfloor \frac{1000n}{m} \rfloor = 150$ 。

#### 3.2 结果分析

卖空比例  $k = 1$ , 置信度  $\alpha = 0.95$ ,  $\lambda = 0.2, 0.5, 0.8$ 。在正态分布情形下, 各运行 30 次取其策略的平均值, 图 2 是  $\lambda = 0.2$  时的适应度函数值的收敛趋势, 可以看出带约束修正的 PSO 算法的求解结果收敛且稳定。

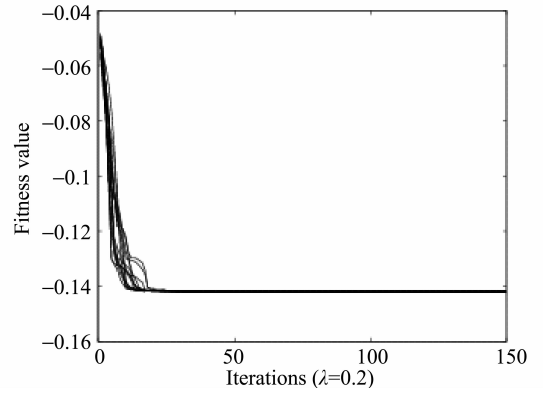


图 2 适应度函数值的收敛趋势 ( $\lambda = 0.2$ )

Fig. 2 Iterations trend of fitness function value ( $\lambda = 0.2$ )

表 2 为正态分布情形下的结果, 可以看出,  $\lambda = 0.2$  时, 投资组合中有 4 个股票达到投资比例的界限 (上界或下界),  $\lambda = 0.5$  和  $\lambda = 0.8$  时有 3 个股票达到比例的界限。

表 2 正态分布情形下的均值 - VaR 模型的最优投资组合 ( $k = 1, \alpha = 0.95$ )

Table 2 Mean - VaR optimal portfolio strategy under the normal distribution ( $k = 1, \alpha = 0.95$ )

投资决策	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.8$
$x_1$	1	0.315 3	0.068 3
$x_2$	-0.5	-0.5	-0.5
$x_3$	1	1	1
$x_4$	-0.5	0.005	0.170 7
$x_5$	0	-0.5	-0.5
$x_6$	0	0.679 7	0.761
均值	0.222 4	0.154 1	0.130 1
VaR	0.180 8	0.068 2	0.053

表 3 为非正态分布情形下的结果, 可看到投资组合中达到投资比例的界限 (上界或下界) 在  $\lambda = 0.2$  时有 3 个股票,  $\lambda = 0.5$  有 2 个和  $\lambda = 0.8$  时有 1 个股票。随着风险厌恶系数的增大, 投资于各股票的比例由集中趋于分散。

表 3 非正态分布情形下的均值 - VaR 模型的最优投资组合 (  $k = 1, \alpha = 0.95$  )

Table 3 Mean - VaR optimal portfolio strategy under the non-normal distribution (  $k = 1, \alpha = 0.95$  )

投资决策	$\lambda = 0.2$	$\lambda = 0.5$	$\lambda = 0.8$
$x_1$	0.259 9	0	0.027 7
$x_2$	-0.5	-0.5	-0.246 5
$x_3$	1	0.771 5	0.2
$x_4$	0.041 9	0.318 4	0.560 7
$x_5$	-0.5	-0.5	-0.5
$x_6$	0.698 2	0.910 1	0.958 1
均值	0.149	0.101 1	0.045
VaR	0.413 8	0.315 4	0.279 2

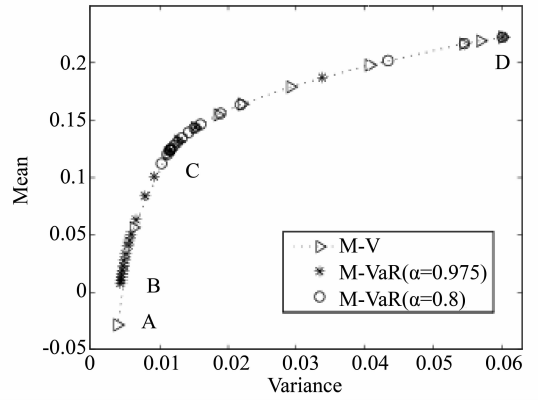


图 4 非正态分布情形下均值 - VaR 有效前沿  
Fig. 4 Mean - VaR efficient frontier under non-normal distribution

接下来，考察不同置信度下均值 - VaR 模型的有效前沿的关系并比较均值 - VaR 模型与均值 - 方差模型下的有效前沿。令  $\lambda_i = 0.05i, i = 0, 1, 2, \dots, 20$ 。分别得到均值 - 方差模型 (7) 和均值 - VaR 模型 (9) 对应不同风险厌恶系数  $\lambda_i$  的 21 组最优组合，在均值 - 方差坐标系下描绘出均值 - 方差模型 (7) 和均值 - VaR 模型 (9) 的最优组合的有效前沿。在收益率服从正态分布 (图 3) 和非正态分布 (图 4) 情形下，可以看到均值 - VaR 投资组合的有效前沿都是均值 - 方差有效前沿 (AD 段) 的子集，置信度  $\alpha = 0.8$  的投资组合的有效前沿 (CD 段) 是置信度  $\alpha = 0.975$  时 (BD 段) 的子集。也就是说，置信度  $\alpha (\alpha > 0.5)$  越小，投资者越倾向于高风险高收益的投资组合，置信度的选择反映出投资者的风险态度。同时注意到，(i) 投资者选择 VaR 作为风险度量，与方差作比较，并不能得到帕累托最优的投资组合；(ii) 数值实验结果与定理 1, 2 相符。

比较方差与 VaR 两种风险度量下的投资组合的差异。

从图 5 和图 6 可看出，当  $\lambda = 1$  时，即投资者最小化 VaR 风险得到的投资组合的收益要比最小化方差风险得到的组合收益要大，对应的风险也大。同时，随着  $\lambda$  的变化，均值 - VaR 模型得到的投资组合的收益和风险变化比均值 - 方差模型的变化要平稳，特别是风险厌恶系数较大的情形。如， $\lambda \in [0.9, 1]$  时，均值 - 方差模型得到的投资组合的风险和收益波动大。均值 - VaR 模型得到的投资组合的收益和风险的范围要比均值 - 方差模型的要小，这是因为不同的投资者对风险厌恶系数  $\lambda$  所反映的风险程度的主观感受有所不同，均值 - VaR 模型中加入了置信度的选择，使投资者对风险偏好程度的反映更直观具体，实际上缩小了投资者的选择范围，提高了投资决策的效率。

最后，我们探讨一下有限卖空约束对投资者决策的影响。

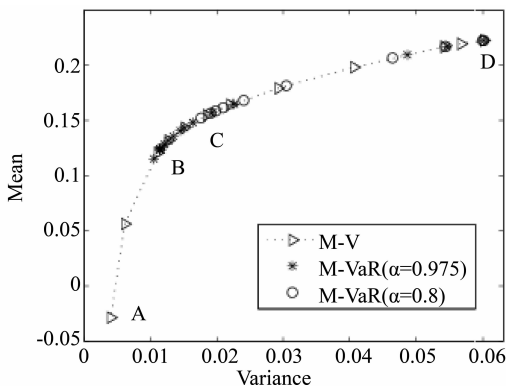


图 3 正态分布情形下均值 - VaR 有效前沿

Fig. 3 Mean - VaR efficient frontier under normal distribution

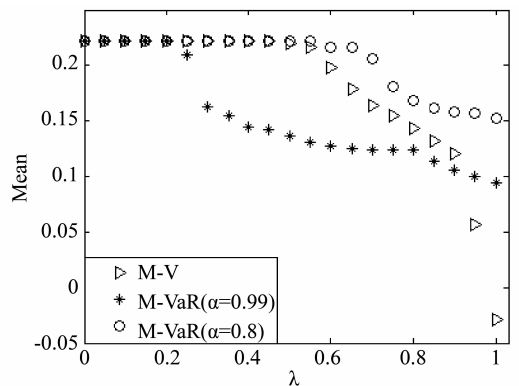


图 5 正态分布情形时不同  $\lambda$  对应的最优组合下的收益  
Fig. 5 Return of the optimal portfolio corresponding to  $\lambda$  under normal distribution

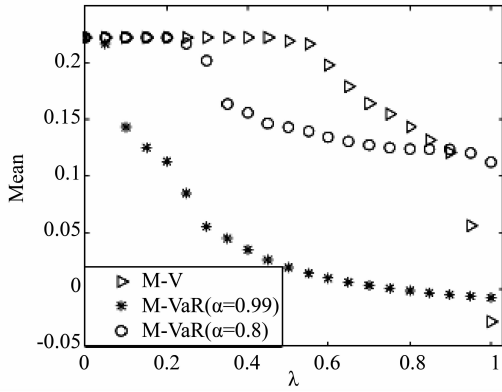


图 6 非正态分布情形时不同  $\lambda$  对应的最优组合下的收益

Fig. 6 Return of the optimal portfolio corresponding to  $\lambda$  under non-normal distribution

从图 7 和图 8 可以看出, 对追求组合收益最大的投资者, 卖空总量限制比个股的卖空比例限制对投资的约束更强。从而对投资决策影响更大, 而对追求组合风险最小的投资者, 情况可能有所不同。对追求组合收益最大的投资者, 对比表 4 和表 5 中  $\lambda = 0$  的情形, 当市场放松卖空总量约束后, 投资者的卖空总比例由 1 增加到 2, 即追求组合收益最大的投资者倾向于大量卖空收益率低或负相关的证券同时集中买进收益高的个股, 因而能够大幅提高投资者的投资收益同时又能分散风险。但是也说明了, 若市场对卖空总量不设限制, 容易大量累积信用风险, 当市场状态发生突然改变, 可能会对市场造成严重冲击。对追求组合风险最小的投资者, 对比表 4 和表 5 中  $\lambda = 1$  的情形发现, 若最小化带个股卖空比例约束的 VaR 得到的投资组合的卖空总量不超过限制时, 则个股的卖空比例约束可能导致不能集中卖空某只收益低的个股, 从而相同风险下, 收益可能要比没有卖空比例限制的要低。

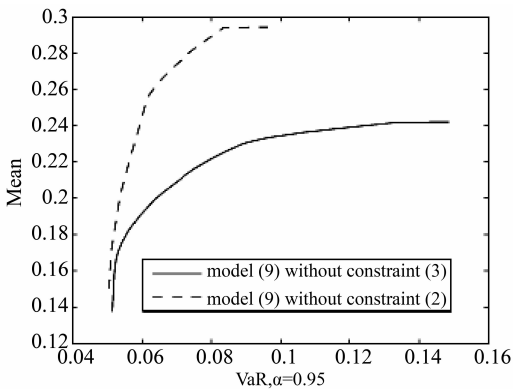


图 7 正态分布情形下有限卖空约束对有效前沿的影响

Fig. 7 The influence of efficient frontier with limited short selling constrains under normal distribution

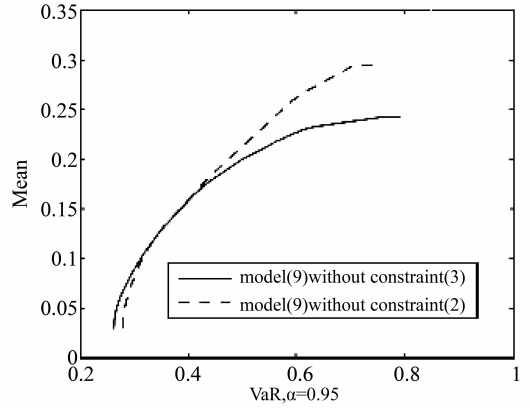


图 8 非正态分布情形下有限卖空约束对有效前沿的影响

Fig. 8 The influence of efficient frontier with limited short selling constrains under non-normal distribution

表 4 正态分布情形时不同约束下的均值 - VaR 模型的最优投资组合 ( $\alpha = 0.95$ )

Table 4 Mean - VaR optimal portfolio with different constrains under normal distribution ( $\alpha = 0.95$ )

投资决策	卖空总量 $k \leq 1$		个股卖空比例 $l_i \leq 0.5$	
	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$
$x_1$	0.2	0	0.2	-0.121 1
$x_2$	0	-0.476 6	-0.5	-0.5
$x_3$	1.8	1.168 5	2.8	1.407 8
$x_4$	-1	0.154 5	-0.5	0.066 8
$x_5$	0	-0.523 4	-0.5	-0.5
$x_6$	0	0.677	-0.5	0.646 5
均值	0.242	0.137 5	0.294 3	0.150 4
VaR	0.148 4	0.051 3	0.096 4	0.050 4

表 5 非正态分布情形时不同约束下的均值 - VaR 模型的最优投资组合 ( $\alpha = 0.95$ )

Table 5 Mean - VaR optimal portfolio with different constrains under non-normal distribution ( $\alpha = 0.95$ )

投资决策	卖空总量 $k \leq 1$		个股卖空比例 $l_i \leq 0.5$	
	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$	$\lambda = 0$	$\lambda = 1$
$x_1$	0.2	0.167 7	0.2	0.037 8
$x_2$	0	-0.219	-0.5	-0.159 5
$x_3$	1.8	0.053 6	2.8	0.041
$x_4$	-1	0.786 7	-0.5	0.625 1
$x_5$	0	-0.781	-0.5	-0.5
$x_6$	0	0.992	-0.5	0.955 6
均值	0.242	0.029 2	0.294 3	0.028
VaR	0.792 6	0.261 6	0.741 2	0.277 4

## 4 结 论

本文考虑实际市场的有限卖空约束, 包括卖空总量限制和个股投资比例限制, 构建了带交易成本

的均值 - VaR 投资组合模型, 该模型具有一般性, 通过对模型中参数  $k$  和  $l$  的取值变化, 模型可以转化成不允许卖空和允许 (无限) 卖空的两种特殊情形。针对模型的约束条件设计特定的约束修正函数, 采用 PSO 算法求解。在收益率服从正态分布和非正态分布两种情形下, 分别对 VaR 风险度量和有限卖空约束对投资者的投资组合影响进行讨论, 得到以下的结论: (i) 均值 - VaR 的有效前沿是均值 - 方差有效前沿的子集; (ii) 与方差相比, VaR 风险度量缩小了投资者的投资组合选择范围, 置信度越小, 该范围越小; (iii) 与方差相比, 追求组合风险最小的投资者若选择 VaR 作风险度量将会得到风险更大的投资组合; (iv) 与个股卖空比例限制相比, 卖空总量限制对追求组合收益最大的投资者的约束更强, 从而对投资决策影响更大。由于有限卖空在发达证券市场具有普遍性, 因而本文在允许有限卖空情况对 VaR 风险度量和模型约束的分析更接近实际。

#### 参考文献:

- [1] JORION P. Value at Risk: The New Benchmark of Controlling Derivatives Risk [M]. New York: McGraw-Hill, 1997.
- [2] ALEXANDER G, BAPTISTA A. Economic implications of using a mean-var model for portfolio selection: A comparison with mean-variance analysis [J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2002, 26: 1159 - 1193.
- [3] 姚京, 李仲飞. 基于 VaR 的金融资产配置模型[J]. 中国管理科学, 2004, 12: 8 - 14.
- [4] 姚海祥, 李仲飞. 不同借贷利率下的投资组合选择 - 基于均值和 VaR 的效用最大化模型[J]. 系统工程理论与实践, 2009, 29: 22 - 28.
- [5] 张鹏. 不允许卖空情况下均值 - 方差和均值 - VaR 投资组合比较研究[J]. 中国管理科学, 2008, 16: 30 - 35.
- [6] ALEXANDER G, BAPTISTA A, YAN S. Mean-variance portfolio selection with 'at-risk' constraints and discrete distributions [J]. Journal of Banking & Finance, 2007, 31: 3761 - 3781.
- [7] CAMPBELL R, HUISMAN R, KOEDIJK K. Optimal portfolio selection in a Value-at-Risk framework [J]. Journal of Banking & Finance, 2001, 25: 1789 - 1804.
- [8] YIU K. Optimal portfolios under a value-at-risk constraint [J]. Journal of Economic Dynamics & Control, 2004, 28: 1317 - 1334.
- [9] BYRNE P, LEE S. Different risk measures: different portfolio compositions? [J]. Journal of Property Investment & Finance, 2004, 22: 501 - 511.
- [10] GHAOUI L, OKS M, OUSTRY F. Worst-case value-at-risk and robust portfolio optimization: A conic programming approach [J]. Operations Research, 2003, 51: 543 - 556.
- [11] BERSTIMAS D, POPESCU I. Optimal inequalities in probability theory: A convex optimization approach [J]. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2005, 15: 780 - 804.
- [12] 薛云灿, 郑东亮, 杨启文. 基于改进离散粒子群算法的炼钢连铸最优浇次计划[J]. 控制理论与应用, 2010, 27: 273 - 277.
- [13] 金久才, 张杰, 官晟, 等. 自推进粒子群的空间同步平行编队控制[J]. 控制理论与应用, 2011, 28: 587 - 590.
- [14] 王凌, 刘波. 微粒群优化与调度算法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2008.
- [15] CURA T. Particle swarm optimization approach to portfolio optimization [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10: 2396 - 2406.