一类广义 Radon 变换的反演*

蔡　洋，王金平
（宁波大学理学院，浙江 宁波 315211）

摘　要：近年来，正电子和单光子发射断层成像的现代图像处理技术不仅是医学上研究大脑功能特征的两个重要工具，而且它们在临床医学、核医学等领域发挥着重要的作用。而与这些图像处理技术紧密相关的需研究的数学问题就是 Radon 变换和广义 Radon 变换的重建和反演。该文利用带权的平方可积函数空间上算子理论得到一类广义 Radon 变换的奇异值分解，从而导出了广义 Radon 变换的反演公式以及值域的特征。

关键词：广义 Radon 变换；单光子发射断层成像；奇异值分解；反演公式；值域
中图分类号：O177.6；O175.5　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 - 6579（2012）05 - 0073 - 05

Inversion of the Generalized Radon Transform

CAI Yang, *WANG Jinping*
(Faculty of Science, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

Abstract: Recently, the modern imaging techniques of positron emission tomography and of single photon emission computed tomography are two of the most important tools for studying the functional characteristics of the brain, and they now play a vital role in several areas of clinical medicine, including nuclear medicine emission imaging. The basic mathematical problems associated with these techniques are the reconstruction of the Radon transform and the so-called generalized Radon transform, respectively. The singular value decomposition of the generalized Radon transform is developed by means of operator theory of function spaces, which are square integrable on $\mathbf{R}^n$ with known weight functions. Furthermore, the inversion formula and characteristics of its range are also obtained.

Key words: generalized Radon transform; SPECT; singular value decomposition (SVD); inversion formula; range

X 射线计算机断层成像技术（X-ray CT），作为一种重要的医学诊断手段和新型的无损检测技术，由于其独特的成像优势，在医学和工业领域发挥着越来越大的作用，已成为医学和工业界诊断检测的主流技术之一。Radon 正逆变换对公式是 CT 重建最基础的数学理论，不论是从医学诊断、图象处理和信号分析诸领域的实际应用还是从数学理论研究等方面，这一领域取得了丰富的成果，特别如 Natterer F，Davison M，Bortfeld T 和 Oelfke U 等[1-7]。具体地，他们利用算子的奇异值分解理论，得到了 Radon 变换的反演公式，值域性质。近年来，针对不同的系统几何配置，研究者已提出多种重建算法[8-9]。从重建方式而言，可以把这些算法分为基于逆求解公式（Inverse formula）的解析法如 Novikov R 和基于统计模型的迭代法两类[10-12]。解析算法主要通过对成像模型进行分析，获得其相应的数学求逆公式来实现，具有实现简单、运算速度快的优点。单光子计算机断层成像（SPECT）是核医学的一种非侵入的诊断技术，投影数据用数学表达式刻画就是著名的衰减 Radon 变

* **收稿日期**：2012 - 03 - 03
基金项目：国家自然科学基金资助项目（61271398）；浙江省教育厅科研资助项目（Y201016044）；宁波市自然科学基金资助项目（2011A610170）
作者简介：蔡洋（1988 年生），男，硕士生；**通讯作者**：王金平；E-mail：wangjinping@nbu.edu.cn

换。

相应地，图像重建就是求其逆变换，FBP-型反演公式分别由 Novikov R 和 Natterer F 得到。广义 Radon 变换是 Radon 变换的推广和多种情形的表示，衰减 Radon 变换是其一种情形之一（见文[13－14]）。作为一个线性算子，广义 Radon 变换是通过某种特殊的测度，以在超平面上的积分的形式作用于 n 维欧几里得空间上的函数上。在此文中，我们记 ω 为单位球面 S^{n-1} 上的一个点，即 $\omega \in S^{n-1}$，再有 $s \in \mathbf{R}^1$，广义 Radon 变换定义为

$$R_\Phi f(\omega,s) = \int_{<x,\omega>=s} \Phi(x,\omega) f(x)\mathrm{d}S \qquad (1)$$

此处 $\Phi(x,\omega)$ 为 $(1-<x,\omega>^2)^\mu$，这里 $<,>$ 表示 $\mathbf{R}^n$ 上的点积。当 $\mu=0$ 时，（1）式即为 Radon 变换。

下面引入标准的奇异值分解方法：

假设 R 是从希尔伯特空间 H 到 K 的连续线性算子，并且 $RR^*: K \to K$ 有一个完全的特征函数系 $g_i, i=1,2,\cdots$，与之相联系的特征值系为 $\lambda_i, i=1,2,\cdots$，且 $\lambda_i>0$。若令

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} R^* g_i, i=1,2,\cdots \qquad (2)$$

那么 $\{g_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 就形成了 R 值域上的一组正交基，而 $\{f_i\}_{i=1}^{+\infty}$ 就形成 R 的核空间的正交补空间上的一组正交基。从而对 $f \in H$ 有

$$Rf = \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_i} <f,f_i>_H g_i \qquad (3)$$

这里 $<,>_H$ 表示 H 上的内积。同样对于给定的 $g \in K$，$\| Rf_1 - g \|$ 的最小范数解 f_1 可由下式得到

$$f_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{<g,g_i>_K}{\sqrt{\lambda_i}} f_i \qquad (4)$$

本文利用球谐函数的性质和上述方法，具体计算出 $R_\Phi R_\Phi^*$ 的特征函数和特征值，进而构造广义 Radon 变换 R_Φ 奇异值分解，在本文中

$$\Phi(x,\omega) = (1-<x,\omega>^2)^\mu, H = L^2(\Omega^n, W_n),$$
$$W_n = \rho^{-1}(1-|x|^2)^{3\mu-1/2}$$

其中 $\rho = |S^{n-2}| \int_{-1}^{1} (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}-3\mu}\mathrm{d}u$，$|S^{n-2}|$ 表示 $n-1$ 维单位球面的面积。$K = L^2(S^{n-1}\times[-1,1], W_1)$，$W_1 = (1-s^2)^{\mu-n/2}, \mu < \frac{1}{6}$。并且讨论其值域的特征性质和导出广义 Radon 变换 R_Φ 的反演公式，推广了 Davison M，Bortfeld T 和 Oelfke U 相关结果（其为本文 $\mu=0$ 时的情形）。

1 辅助结论及相关引理

引理 1 对于 $\omega \in S^{n-1}$，$s \in \mathbf{R}^1$，$\mu < \frac{1}{6}$，则

$$R_\Phi: L^2(\Omega^n, \rho^{-1}(1-|x|^2)^{3\mu-1/2}) = H \to L^2(S^{n-1}\times[-1,1], (1-s^2)^{\mu-n/2}) = K \qquad (5)$$

是连续线性算子。

证明 因为

$$R_\Phi f(\omega,s) = \int_{<x,\omega>=s} (1-<x,\omega>^2)^\mu f(x)\mathrm{d}S = \int_{y\in\omega^\perp} f(s\omega+y)(1-s^2)^\mu \mathrm{d}y$$

故得到

$$|R_\Phi f(\omega,s)|^2 = \left| \int_{y\in\omega^\perp} f(s\omega+y)(1-s^2)^\mu \mathrm{d}y \right|^2 = \left| \int_{y\in\omega^\perp} f(s\omega+y)\mathrm{d}y \right|^2 (1-s^2)^{2\mu} \leqslant (1-s^2)^{2\mu} \int_{y\in\omega^\perp} |f(s\omega+y)|^2 \mathrm{d}y$$

进一步有

$$\int_{-1}^{1} |R_\Phi f|^2 (1-s^2)^{\mu-n/2}\mathrm{d}s \leqslant \int_{-1}^{1} (1-s^2)^{2\mu}(1-s^2)^{\mu-n/2} \int_{y\in\omega^\perp} |f(s\omega+y)|^2 \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s =$$
$$\int_{-1}^{1} (1-s^2)^{3\mu-n/2} \int_{y\in\omega^\perp} |f(s\omega+y)|^2 \mathrm{d}y\ \mathrm{d}s \leqslant$$
$$\int_{\Omega^n} (1-|x|^2)^{3\mu-\frac{n}{2}} |f(s\omega+y)|^2 \mathrm{d}x =$$
$$\int_{\Omega^n} (1-|x|^2)^{3\mu-\frac{1}{2}} |f(s\omega+y)|^2 (1-|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}} \mathrm{d}x$$

令 $g(x) = (1-|x|^2)^{-\frac{n-1}{2}}$，则上式变形为

$$\int_{-1}^{1} |R_\Phi f|^2 (1-s^2)^{\mu-n/2}\mathrm{d}s \leqslant C_1 \| f \|_{W_n} \| g \| \leqslant +\infty$$

于是可得结论，证毕。

引理 2 令算子 $R_\Phi f(\omega,s) = R_\Phi^\omega f(s)$ 固定 $\omega \in S^{n-1}$，视为 $s \in \mathbf{R}^1$ 的一元函数。H 和 K 如引理 1 所述，则对所有的 $\omega \in S^{n-1}$，R_Φ^ω 是从 H 到 $L^2([-1,1], W_1)$ 的连续算子，$\| R_\Phi^\omega \| = 1$ 且

$$(R_\Phi^\omega g)^*(x) = \frac{1}{W_n(x)} \cdot B_\omega(gW_1)(x) \qquad (6)$$

其中 B_ω 是满足下式的背投影算子

$$(B_\omega g)(x) = g(<x,\omega>)(1-<x,\omega>^2)^\mu \qquad (7)$$

证明 只需证明 B_ω 是 $L^2([-1,1], W_1) \to$

$L^2(\Omega^n,\frac{1}{W_n})$ 保范算子即可，其中 $B_\omega^* f = W_1 \cdot R_\Phi^\omega(\frac{f}{W_n})$。

我们有以下算子

$$R_\Phi^\omega: L^2(\Omega^n,W_n) \to L^2([-1,1],W_1),$$

$$I_{W_1}: L^2([-1,1],W_1) \to L^2([-1,1],\frac{1}{W_1}),$$

$$B_\omega: L^2([-1,1],\frac{1}{W_1}) \to L^2(\Omega^n,\frac{1}{W_n}),$$

$$I_{\frac{1}{W_n}}: L^2(\Omega^n,\frac{1}{W_n}) \to L^2(\Omega^n,W_n),$$

这里 I_{W_n} 表示点乘 W_n，“ $*$ ”表示算子的共轭。易证 I_{W_n} 与 I_{W_1} 是希尔伯特空间上的同构算子，因此从上面这些算子可以得出

$$(R_\Phi^\omega)^* = I_{\frac{1}{W_n}} \cdot B_\omega \cdot I_{W_1}$$

且有 $\| R_\Phi^\omega \| = \| (R_\Phi^\omega)^* \| = \| B_\omega \|$。而

$$\| B_\omega \| = \sup_{\forall h \in L^2([-1,1],\frac{1}{W_1})} \frac{\| B_\omega h(x) \|_{\frac{1}{W_n}}}{\| h(s) \|_{\frac{1}{W_1}}} = 1$$

上式说明 B_ω 是一个保范数算子，从而 R_Φ^ω 是从 H 到 $L^2([-1,1],W_1)$ 的连续算子，且 H 与 $L^2([-1,1],W_1)$ 同构。进一步有 $B_\omega^* = I_{W_1} \cdot R_\Phi^\omega \cdot I_{\frac{1}{W_n}}$。

引理 3　算子 R_Φ^ω，H 和 K 如引理 1 中所述，如果 $G \in K$，那么

$$(R_\Phi^* G)(x) = \int_{S^{n-1}} ((R_\Phi^\omega)^* G_\omega)(x)\mathrm{d}\omega \qquad (8)$$

其中 $G_\omega(s) = G(\omega,s)$，$s \in [-1,1], \omega \in S^{n-1}, x \in \Omega^n$。则 R_Φ 是从 H 到 K 的连续线性算子。

证明　对于 $\forall f \in L^2(\Omega^n,W_n)$，那么

$$\| R_\Phi \|^2 = \int_{S^{n-1}}\int_{-1}^{+1} |R_\Phi^\omega f|^2 W_1 \mathrm{d}s\mathrm{d}\omega = \int_{S^{n-1}} \| R_\Phi^\omega f \|_{W_1}^2 \mathrm{d}\omega \leqslant |S^{n-1}| \, \| f \|^2$$

即说明 R_Φ 是 $H \to K$ 的有界线性算子，由于 H 和 K 均为希尔伯特空间，从而 R_Φ 是 $H \to K$ 的线性连续算子。而根据共轭算子的定义（8）式很容易得到。

引理 4　算子 R_Φ^ω，H 和 K 引理 1 如所述，令

$$T_m(s) = (1-s^2)^{-\mu}(\frac{1}{W_1}) C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s),$$

$m = 0,1,\cdots$，$C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s)$ 为 m 阶 Gegenbauer 多项式，$\mu < \frac{1}{6}$，那么 $\{T_m\}$ 为 $L^2([-1,1],W_1)$ 上的一组正交基，且对任意的单位向量 $\xi,\omega \in S^{n-1}$ 还成立：

$$[R_\Phi^\xi (R_\Phi^\omega)^* T_m](s) = C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>) T_m(s) \frac{2}{\rho}$$

证明　$\{T_m\}$ 的完全性和正交性可由 $C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s)$ 之性质和 W_1 的定义得出。

通过坐标的旋转我们可仅需考虑 $\xi = (1,0,\cdots,0)$，$\omega = (\cos\theta,\sin\theta,0,\cdots,0)$ 时的情况，由（6），（7）式得到

$$[(R_\Phi^\omega)^* T_m](x) = \frac{B_\omega(W_1 T_m)(x)}{W_n(x)} = \frac{C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<x,\omega>)}{W_n(x)}$$

因此

$$R_\Phi^\xi[(R_\Phi^\omega)^* T_m](s) = R_\Phi([(R_\Phi^\omega)^* T_m])(\xi,s) = (1-s^2)^{\frac{n}{2}-2\mu} |S^{n-2}| \int_{-1}^{1} \frac{C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s\cos\theta + \sqrt{1-s^2}u\sin\theta)}{\rho(1-u^2)^{3\mu-\frac{(n-1)}{2}}}\mathrm{d}u = (1-s^2)^{\frac{n}{2}-2\mu} |S^{n-2}| C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s) C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>)\frac{2}{\rho} = C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>) T_m(s) \frac{2}{\rho}$$

这里利用了

$$\int_{-1}^{1} C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s\cos\theta + \sqrt{1-s^2}u\sin\theta)(1-u^2)^{\frac{(n-1)}{2}-3\mu}\mathrm{d}u = C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s) C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>) \int_{-1}^{1}(1-u^2)^{\frac{(n-1)}{2}-3\mu}\mathrm{d}u$$

参看文［1］。

引理 5　对 $m = 0,1,\cdots$，令 V_m 是引理 1 中所述 K 的子空间，且 V_m 中元素有形式 $G(\omega)T_m(s)$，这里 $G(\omega) \in L^2(S^{n-1})$ 则有

（i）$\{V_m\}$ 构成了 K 的正交子空间系；

（ii）$\{V_m\}$ 在 $R_\Phi R_\Phi^*$ 作用下有不变性；

（iii）

$$(R_\Phi R_\Phi^* G T_m)(\omega,s) = \frac{2}{\rho} T_m(s) \int_{S^{n-1}} C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>) G(\xi)\mathrm{d}\xi$$

证明　（i）$\{V_m\}$ 之正交性由 T_m 的正交性可得，而 $C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(s)$（$\mu < \frac{1}{6}$）的完全性可保证 K 是 $\{V_m\}$ 的最小闭包，因而构成了 K 的一组正交系。

对于（ii），（iii），令 $G(\omega)T_m(s) \in V_m$，则

$$(R_\Phi R_\Phi^* G T_m)(\omega,s) = R_\Phi^\omega[R_\Phi^*(G T_m)](s) = \frac{2}{\rho} T_m(s) \int_{S^{n-1}} C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>) G(\xi)\mathrm{d}\xi$$

后一等号由引理 4 得到。

从引理 1－5 可知，$R_\Phi R_\Phi^*$ 将 $L^2(S^{n-1})$ 中的函数 $G(\omega)$ 变成 $\int_{S^{n-1}} C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>)G(\xi)\mathrm{d}\xi$，很明显，该算子在任意旋转下仍保持不变，这表明该算子的特征空间为球面调和函数的直和，使用 Funk—Hecke 定理［1］可找到所有特征值。

2 主要结论及定理

定理 1 令 SH^l 表示阶为 l 的球面调和函数构成的子空间，则 $R_\Phi R_\Phi^*$ 的特征函数为所有具有形式 $Y_l(\omega)T_m(s)$ 的函数，其中 $Y_l(\omega)\in SH^l$，相应的特征值为

$$\lambda_{lm}=\frac{2}{\rho}\frac{|S^{n-2}|}{C_l^v(1)}\int_{-1}^{1}C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(t)\ C_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

这里 $v=\frac{n}{2}-1$，$l=0,1,2,\cdots,m-l$ 是偶数

证明 由［1］知，Funk-Hecke 定理可表述如下：

对于 $[-1,1]$ 上的连续函数 $F(t)$，成立

$$\int_{S^{n-1}}F(<\xi,\omega>)Y_l(\xi)\mathrm{d}\xi=$$
$$Y_l(\omega)\frac{|S^{n-2}|}{C_l^v(1)}\int_{-1}^{1}F(t)\ C_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

由 Funk-Hecke 定理及引理 5 中的结论有

$$(R_\Phi R_\Phi^* Y_lT_m)(\omega,s)=R_\Phi^\omega[R_\Phi^*(Y_lT_m)](s)=$$
$$\frac{2}{\rho}T_m(s)\int_{S^{n-1}}C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(<\xi,\omega>)Y_l(\xi)\mathrm{d}\xi=$$
$$\frac{2}{\rho}T_m(s)Y_l(\omega)\frac{|S^{n-2}|}{C_l^v(1)}\int_{-1}^{1}C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(t)\cdot$$
$$C_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=$$
$$\lambda_{lm}T_m(s)Y_l(\omega)$$

证毕。

为了得到 R_Φ 的奇异值分解，我们还得计算 $R_\Phi R_\Phi^*$ 的特征函数在 R_Φ^* 作用下的结果。下面的定理给出了一个结果

定理 2 令 $T_m(s)Y_l(\omega)$ 是 $R_\Phi R_\Phi^*$ 的特征函数，那么对于 $\xi\in S^{n-1}$ 及 $r\xi=x\in\Omega^n$，有

$$R_\Phi^*(Y_lT_m)(r\xi)=Y_l(\xi)\frac{|S^{n-2}|}{C_l^v(1)W_n(1)}P_{lm}(r)$$

其中

$$P_{lm}(r)=r^lq_{ml}(r^2)=$$
$$r^l\int_{-1}^{1}(C_l^v(t))^2(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\times\sum_{\substack{j=l,\\ m-j\ \mathrm{even}}}^{m}a_{mj}d_{jk}r^{j-l}$$

$q_{ml}(r)$ 是关于 r 的最高阶为 $m-l$ 的多项式。

证明 直接计算得

$$R_\Phi^*(Y_lT_m)(\xi)=\int_{S^{n-1}}[(R_\Phi^\omega)^*(Y_lT_m)_\omega]\mathrm{d}\omega=$$
$$\int_{S^{n-1}}\frac{B_\omega(W_1T_mY_l(\omega))(r\xi)}{W_n(x)}\mathrm{d}\omega=$$
$$\int_{S^{n-1}}\frac{Y_l(\omega)C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(r<\xi,\omega>)}{W_n(r)}\mathrm{d}\omega$$

利用 Funk-Hecke 定理得到原积分为

$$Y_l(\xi)\frac{|S^{n-2}|}{C_l^v(1)W_n(r)}\int_{-1}^{1}C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(rt)C_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

其中 $v=\frac{n}{2}-1$。

我们记

$$P_{lm}(r)=\int_{-1}^{1}C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(rt)C_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

和

$$C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(rt)=\sum_{\substack{j=0,\\ m-j\ \mathrm{even}}}^{m}a_{mj}(rt)^j$$

则下式成立：

$$\int_{-1}^{1}C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(rt)C_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=$$
$$\int_{-1}^{1}\sum_{\substack{j=0,\\ m-j\mathrm{even}}}^{m}a_{mj}(rt)^jC_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t$$

又因为 $t^j=\sum_{\substack{k=0,\\ j-k\ \mathrm{even}}}^{j}d_{jk}C_k^v(t)$，再利用 $C_l^v(t)$ 的正交性，得到

$$\int_{-1}^{1}C_m^{\frac{(n+1)}{2}-3\mu}(rt)C_l^v(t)(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t=$$
$$r^l\int_{-1}^{1}(C_l^v(t))^2(1-t^2)^{v-\frac{1}{2}}\mathrm{d}t\times\sum_{\substack{j=l,\\ m-j\mathrm{even}}}^{m}a_{mj}d_{jk}r^{j-l}$$

这里 $\frac{m-l}{2}$ 是一个非负的整数，因而 $P_{lm}(r)=r^lq_{ml}(r^2)$，其中 $q_{ml}(r^2)$ 是关于 r^2 的最高阶为 $m-l$ 的多项式，证毕。

为了求得 $P_{lm}(r)$ 的具体形式，对固定的 l，由于 Gegenbauer 多项式的正交性，m 应该取值为 $l,l+2,l+4,\cdots$，而奇异值分解要求 $R_\Phi^*(Y_lT_m)$，$R_\Phi^*(Y_lT_q)$ 组成的基，应该为 $L^2(\Omega^n,\rho^{-1}(1-|x|^2)^{3\mu-1/2})$ 的正交系，又由于 $Y_l(\omega)T_m(s)$（$l,l+2,l+4,\cdots$）是 $R_\Phi R_\Phi^*$ 的正交特征函数，故又有：对 $m\neq q$，

$$\int_{\Omega^n}R_\Phi^*(Y_lT_q)R_\Phi^*(Y_lT_m)|\Omega^{n-1}|\rho(1-|x|^2)^{3\mu-1/2}\mathrm{d}x=0$$

令 $x = r\xi$，代入上式中则有

$$\int_0^1 r^{2l+n-1} q_{lm}(r^2) q_{lq}(r^2)(1-r^2)^{3\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{d}r = 0$$

进一步作代换 $u = r^2$，得到

$$\frac{1}{2}\int_0^1 u^{l-1+\frac{n}{2}} q_{lm}(u) q_{lq}(u)(1-u)^{3\mu-\frac{1}{2}} \mathrm{d}u = 0$$

该式表明 $q_{lm}(u)$ 与 Jacobi 多项式相差一个常数，即：$q_{lm}(u) = C_2 P_{(m-l)/2}^{(l+n/2, 3\mu+1/2)}(u)$，这里 $P_{(m-l)/2}^{(l+n/2, 3\mu+1/2)}(u)$ 为 $\frac{m-l}{2}$ 阶 Jacobi 多项式。故

$$P_{lm}(r) = r^l q_{ml}(r^2) = r^l P_{(m-l)/2}^{(l+n/2, 3\mu+1/2)}(r^2),$$

$$R_\Phi^*(Y_l T_m)(r\xi) = Y_l(\xi)\frac{|S^{n-2}|}{C_l^v(1) W_n(1)} r^l C_2 P_{(m-l)/2}^{(l+n/2, 3\mu+1/2)}(r^2)$$

为了方便，记

$$g_{lmk}(\omega, s) = T_m(s) Y_{lk}(\omega),$$

$$f_{lmk} = Y_{lk}(\xi)\frac{|S^{n-2}|}{C_l^v(1) W_n(1)} P_{lm}(r), k = 1, 2, \cdots, N_{n-1}(l)$$

这里 $N_{n-1}(l)$ 为 n 维球面调和函数空间中阶为 l 的球面函数的个数。从而根据标准的奇异值分解法，对于 $\forall f \in L^2(\Omega^n, W_n)$，有

$$f(r\xi) = \sum_{l=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{N_{n-1}(l)}\sum_{\substack{m=l,\\ m-l\text{even}}}^{+\infty} \frac{\langle g, g_{lmk}\rangle_{\frac{1}{W_1}}}{\sqrt{\lambda_{lm}}} f_{lmk}(r\xi)$$

这样就可以根据要求采用截断方法得到对图像函数的一种逼近和近似重建。

参考文献：

[1] NATTERER F. The mathematics of computerized tomography [M]. Reprint of the 1986 original. Classics in Applied Mathematics, 32. SIAM, Philadelphia, PA, 2001.

[2] NATTERER F. Inversion of the attenuated Radon transform [J]. Inverse Problems, 2001, 17(1): 113 - 119.

[3] DAVISON M. A singular value decomposition for the Radon transform in n-dimensional Euclidean space [J]. Numer Funct Anal Optimiz, 1981, 3: 321 - 340.

[4] BORTFELD T, OELFKE U. Fast and exact 2D image reconstruction by means of Chebyshev decomposition and backprojection [J]. Phys Med Biol, 1999, 44: 1105 - 1120.

[5] MAASS P. The x-ray transform: singular value decomposition and resolution [J]. Inverse Problems, 1987, 3: 729 - 741.

[6] WANG J P, DU J Y. A note on singular value decomposition for Radon transform in $\mathbf{R}^n$ [J]. Acta Mathematica Scientia, 2002, 22B (3): 311 - 318.

[7] 胡良根. 渐近半压缩映象的收敛性定理[J]. 宁波大学学报：理工版, 2008, 21(4): 514 - 519.

[8] XIAN J, LI S. General A-P iterative algorithm in shift-invariant spaces [J]. Acta Math Sinica, English series, 2009, 25(4): 545 - 552.

[9] XIAN J. Weighted sampling and reconstruction in weighted reproducing kernel spaces [J]. J Math Anal Appl, 2010, 367(1): 34 - 42.

[10] NOVIKOV R. An inversion formula for the attenuated X-ray transformation [J]. Ark Mat, 2002, 40: 145 - 167.

[11] LI T, WEN J, HAN G, et al. Evaluation of an efficient compensation method for quantitative fan-beam brain SPECT reconstruction [J]. IEEE Trans Med Imaging, 2005, 24(2): 170 - 179.

[12] FINCH D. The attenuated x-ray transform: recent developments, in inside out: Inverse problems and applications [C] // MSRI Publications, 47, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, 47 - 66.

[13] XU Y, TISCHENKO O, HOESCHEN C. Approximation and reconstruction from attenuated Radon projections [J]. SIAM Journal on Numerical Analysis, 2007, 45: 108 - 132.

[14] XU Y. A new approach to the reconstruction of images from Radon projections [J]. Adv Appl Math, 2006, 36: 388 - 420.