第50卷 第6期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 50 No. 6
2011年 11月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 2011

和轮相关图的优美性*

王 涛[1]，刘海生[1]，李德明[2]
（1. 华北科技学院基础部，河北 三河 065201；
2. 首都师范大学数学系，北京 100048）

摘 要：证明了对任意自然数 $n \geqslant 1, p \geqslant 1$，当 $m = 2p+3, 2p+4$ 时，非连通图 $W_m \cup K_{n,p}$ 和 $W_{m,2m+1} \cup K_{n,p}$ 是优美图；当 $i = 1,2$ 时，图 $W_{2p+2+i} \cup G_p^{(i)}$ 是优美图。当 $m \geqslant 3, n \geqslant s$ 时，$W_{m,2m+1} \cup St(n)$ 是优美图；当 $m = 2n+5$ 时，图 $W_{m,2m+1} \cup (C_3 \vee \overline{K_n})$ 是优美图。

关键词：图；优美图；优美标号；非连通图
中图分类号：O157.5 **文献标志码**：A **文章编号**：0529-6579（2011）06-0016-04

Gracefulness of the Graphs Related to Wheel

WANG Tao[1], *LIU Haisheng*[1], *LI Deming*[2]
(1. Department of Basic Course, North China Institute of Science and Technology, Sanhe 065201, China;
2. Department of Mathematics, Capital Normal University, Beijing 100048, China)

Abstract: For any natural numbers n, p, which are not less than one, when $m = 2p+3$ or $2p+4$, the disconnected graphs $W_m \cup K_{n,p}$ and $W_{m,2m+1} \cup K_{n,p}$ are graceful; when $i = 1$ or 2, the graph $W_{2p+2+i} \cup G_p^{(i)}$ is graceful. If m is greater than or equal to three, and n is greater than or equal to s, where s is a natural number, $W_{m,2m+1} \cup St(n)$ is graceful; in particular, if $m = 2n+5$, $W_{m,2m+1} \cup (C_3 \vee \overline{K_n})$ is graceful.

Key words: graphs; graceful graphs; graceful labeling; disconnected graph

本文所讨论的图 $G(V,E)$ 均为简单无向图，设 $V = V(G)$ 为图 G 的顶点集，$E = E(G)$ 为图 G 的边集，$|E|$ 为图 G 的边数，$K_{n,p}$ 为完全二部图，P_n 为 n 个顶点的路，$St(n)$ 为 $n+1$ 个顶点的星，C_n 为 n 个顶点的圈。$G_1 \vee G_2$ 为图 G_1 与 G_2 的联图，其顶点集合 $V(G_1 \vee G_2) = V(G_1) \cup V(G_2)$，边集合 $E(G_1 \vee G_2) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup F$，其中 $F = \{xy : x \in G_1, y \in G_2\}$ 联图 $P_1 \vee C_n$ 称为轮，记作 W_n，其中 P_1 的顶点称为 W_n 的中心。$W_{n,m}$ 是由轮 W_n 与 W_m 的中心顶点合并后构成的连通图。$[a]$ 表示不超过实数 a 的最大整数。

在图的优美性的研究成果中，多数是关于连通图优美性的研究[1-6]，近年来，人们开始关注非连通图优美性问题并取得不少关于此条件下的优美性的结论见文［7-10］。

1 相关结论

本文对与轮形图相关的非连通并图的优美性进行了研究，推广了文［7-8］中的结论，得到非连通图 $W_m \cup K_{n,p}$，$W_{m,2m+1} \cup K_{n,p}$，$W_{2p+2+i} \cup G_p^{(i)}$，$W_{m,2m+1} \cup St(n)$ 和 $W_{m,2m+1} \cup (C_3 \vee \overline{K_n})$ 是优美图。

本文涉及的主要概念是优美图的定义。设图 $G = (V,E)$，k 为正整数，如果存在一个单射 $f: V \rightarrow \{0,1,\cdots,|E|+k-1\}$，使得对所有的边 $uv \in E$，由 $f'(uv) = |f(u) - f(v)|$ 导出一个双射 $f': E \rightarrow \{k, k+1, \cdots, |E|+k-1\}$，则称图 G 是 k-优美图，f

* 收稿日期：2011-02-23
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10201022）；北京市自然科学基金资助项目（1102015）；中央高校基本科研业务费资助项目（2011B019）
作者简介：王涛（1972年生），男，副教授；E-mail：wangtgy@ncist.edu.cn

是 G 的一个 k -优美标号。1 - 优美图也称优美图，1 - 优美标号也称优美标号。

下面三个结果是要用到或要推广的定理：

定理 A[6]　对 $\forall n\in\mathbb{N},n\geqslant 3$，轮形图 W_n 是优美图。

定理 B[7]　对任意正整数数 n，图 $W_{2n+5}\cup(C_3\vee\overline{K_n})$ 是优美图。

定理 C[8]　设 m,n 为任意自然数，当 $n\geqslant 3$，$m\geqslant s=\left[\dfrac{n}{2}\right]$ 时，图 $W_n\cup St(m)$ 优美图。

2　定理及其证明

本文中约定 a,b 分别表示序列 $x_1,x_2,\cdots,x_m$ 奇数项和偶数项的最大脚标。$s=\left[\dfrac{m}{2}\right]$，即 m 为偶数时，$s=\dfrac{m}{2}$,m 为奇数时，$s=\dfrac{m-1}{2}$。

定理 1　设任意自然数 $n\geqslant 1,p\geqslant 1$，当 $m=2p+3,2p+4$ 时，图 $W_m\cup K_{n,p}$ 是优美图。

证 明　设 $V(W_m)=\{x_0;x_1,x_2,\cdots,x_m\}$，$V(K_{n,p})=\{v_1,v_2,\cdots,v_n;u_1,u_2,\cdots,u_p\}$，$E=E(W_m\cup K_{n,p})$，则 $|E|=2m+np$。

定义图 $W_m\cup K_{n,p}$ 的顶点标号 f 为：

$$f(x_0)=0,f(x_1)=2m+np-s,$$

$$f(x_i)=s+\frac{i-1}{2},(i=3,5,\cdots,2p+3),$$

$$f(x_i)=2m+np+1-\frac{i}{2},(i=2,4,6,\cdots,b);$$

$$f(u_i)=i,(i=1,2,\cdots,p),f(v_n)=s,$$

$$f(v_i)=s+(i+1)p+2,(i=1,2,\cdots,n-1)$$

下面证明标号 f 是图 $W_m\cup K_{n,p}$ 的优美标号。

1）当 $m=2p+3$ 时，$s=p+1$。

（i）由于序列

$$0=f(x_0),f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_p),$$
$$f(v_n),f(x_3),f(x_5),\cdots,f(x_{2p+3}),$$
$$f(v_1),f(v_2),\cdots,f(v_{n-1}),f(x_1),$$
$$f(x_{2p+2}),f(x_{2p}),\cdots,f(x_4),f(x_2)=2m+np$$

是严格递增的，故映射 f 是单射。

（ii）　对所有的边 $uv\in E$，设 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$，则

$$f'(x_0x_1)=2m+(n-1)p-1,f'(x_1x_2)=p+1,$$

$$f'(x_0x_i)=\begin{cases}p+\dfrac{i+1}{2},(i=3,5,\cdots,2p+3)\\[2ex]2m+np+1-\dfrac{i}{2},(i=2,4,\cdots,2p+2)\end{cases};$$

$$f'(u_iv_n)=p+1-i,(i=1,2,\cdots,p),$$

$$f'(u_iv_j)=(j+2)p+3-i,$$
$$(i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,n-1);$$
$$f'(x_ix_{i+1})=2m+(n-1)$$
$$p-i,(i=2,3,\cdots,2p+2),f'(x_1x_2)=p+1,$$
$$f'(x_1x_{2p+3})=m+(n-1)p$$

因此，序列

$$1=f'(u_pv_n),f'(u_{p-1}v_n),\cdots,f'(u_1v_n),$$
$$f'(x_1x_2),f'(x_0x_3),f'(x_0x_5),\cdots,f'(x_0x_{2p+3}),$$
$$f'(v_1u_p),f'(v_1u_{p-1}),\cdots,f'(v_1u_1),$$
$$f'(v_2u_p),f'(v_2u_{p-1}),\cdots,f'(v_2u_1),\cdots,$$
$$f'(v_{n-1}u_p),f'(v_{n-1}u_{p-1}),\cdots,f'(v_{n-1}u_1),f'(x_1x_{2p+3}),$$
$$f'(x_{2p+2}x_{2p+3}),f'(x_{2p+1}x_{2p+2}),\cdots,f'(x_2x_3),f'(x_0x_1),$$
$$f'(x_0x_{2p+2}),f'(x_0x_{2p}),\cdots,f(x_0x_4),f'(x_0x_2)=$$
$$2m+np$$

是严格递增的，映射 f'：$E\to\{1,2,\cdots,2m+np\}$ 是双射。

2）当 $m=2p+4$ 时，$s=p+2$。

（i）　由于序列

$$0=f(x_0),f(u_1),f(u_2),\cdots,f(u_p),$$
$$f(v_n),f(x_3),f(x_5),\cdots,f(x_{2p+3}),$$
$$f(v_1),f(v_2),\cdots,f(v_{n-1}),$$
$$f(x_1),f(x_{2p+4}),f(x_{2p+2}),\cdots,f(x_4),f(x_2)=$$
$$2m+np$$

是严格递增的，故映射 f 是单射。

（ii）　对所有的边 $uv\in E$，由 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$，有

$$f'(x_0x_1)=2m+(n-1)p-2,f'(x_1x_2)=p+2,$$

$$f'(x_0x_i)=\begin{cases}p+1+\dfrac{i+1}{2},(i=3,5,\cdots,2p+3)\\[2ex]2m+np+1-\dfrac{i}{2},(i=2,4,\cdots,2p+4)\end{cases};$$

$$f'(u_iv_n)=p+2-i,(i=1,2,\cdots,p),$$
$$f'(u_iv_j)=(j+2)p+4-i,$$
$$(i=1,2,\cdots,p;j=1,2,\cdots,n-1);$$
$$f'(x_ix_{i+1})=2m+(n-1)$$
$$p-1-i,(i=2,3,\cdots,2p+3),$$
$$f'(x_1x_2)=p+2,f'(x_1x_{2p+4})=1$$

因此，序列

$$1=f(x_1x_{2p+4}),f'(u_pv_n),f'(u_{p-1}v_n),\cdots,f'(u_1v_n),$$
$$f'(x_1x_2),f'(x_0x_3),f'(x_0x_5),\cdots,f'(x_0x_{2p+3}),$$
$$f'(v_1u_p),f'(v_1u_{p-1}),\cdots,f'(v_1u_1),$$
$$f'(v_2u_p),f'(v_2u_{p-1}),\cdots,f'(v_2u_1),\cdots,$$
$$f'(v_{n-1}u_p),f'(v_{n-1}u_{p-1}),\cdots,f'(v_{n-1}u_1),$$
$$f'(x_{2p+3}x_{2p+4}),f'(x_{2p+2}x_{2p+3}),\cdots,f'(x_2x_3),f'(x_0x_1),$$
$$f'(x_0x_{2p+4}),f'(x_0x_{2p+2}),\cdots,f(x_0x_4),f'(x_0x_2)=$$

$$2m + np$$

是严格递增的，映射 $f' : E \to \{1,2,\cdots,2m+np\}$ 是双射。

综合1)、2)，我们有图 $W_m \cup K_{n,p}$ 是优美图。

在定理1中，取 $p=1$，可得以下结论。

推论1 对任意自然数 $n \geqslant 1$，图 $W_5 \cup St(n)$ 和 $W_6 \cup St(n)$ 是优美图。

推论2 对任意自然数 $p \geqslant 1$，图 $W_{2p+2+i} \cup G_p^{(i)}$ 是优美图。其中 $G_p^{(i)}(i=1,2)$ 表示 p 条边的 i – 优美图。

证明 i) 当 $i=1$ 时，在定理1中，取 $m=2p+3, n=1$，图 W_{2p+3} 中的顶点标号 f 是从 $V(W_{2p+3})$ 到 $\{0,p+2,p+3,\cdots,2m+p\}$ 的单射，顶点标号所确定边值为 $\{p+1,p+2,p+3,\cdots,2m+p\}$。在图 $K_{1,p}$ 中的顶点标号值为 $\{1,2,3,\cdots,p+1\}$，顶点标号确定的边值为 $\{1,2,3,\cdots,p\}$。由图的非连通性，对任意图 G，若能有顶点标号 g 是从 $V(G)$ 到 $\{1,2,3,\cdots,p+1\}$ 的单射，且顶点标号所确定的边值为 $\{1,2,3,\cdots,p\}$，则 $W_{2p+3} \cup G$ 是优美图。设 g_1 是图 $G_p^{(1)}$ 的优美标号，我们给图 $G_p^{(1)}$ 的顶点用 g_1+1 从新标号，则新标号满足该条件。

特殊地，对轮 W_n，结合定理A，有 $W_n \cup W_{4n+3}$ 是优美图。

ii) 当 $i=2$ 时，在定理1中，取 $m=2p+4, n=1$，图 W_{2p+4} 中的顶点标号 f 是 $V(W_{2p+4})$ 到 $\{0,p+3,p+4,\cdots,2m+p\}$ 的单射，顶点标号所确定的边值为 $\{1,p+2,p+3,\cdots,2m+p\}$。在图 $K_{1,p}$ 中的顶点标号值为 $\{1,2,3,\cdots,p,p+2\}$，顶点标号所确定的边值为 $\{2,3,\cdots,p+1\}$。由图的非连通性，对任意图 G，若能有顶点标号 g 是从 $V(G)$ 到 $\{1,2,3,\cdots,p+2\}$ 的单射，且顶点标号所确定的边值为 $\{2,3,\cdots,p+1\}$，则 $W_{2p+4} \cup G$ 是优美图。设 g_2 是图 $G_p^{(2)}$ 的 2 – 优美标号，我们给图 $G_p^{(2)}$ 用 g_2+1 从新标号，则新标号满足该条件。

定理2 设任意自然数 $n \geqslant 1, p \geqslant 1$，当 $m=2p+3, 2p+4$ 时，图 $W_{m,2m+1} \cup K_{n,p}$ 是优美图。

证明 设 $V(W_{m,2m+1}) = \{x_0; x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_{2m+1}\}$，$V(K_{n,p})) = \{v_1, v_2, \cdots, v_n; u_1, u_2, \cdots, u_p\}$，$E = E(W_{m,2m+1} \cup K_{n,p})$，则 $|E| = 6m + np + 2$。

定义图 $W_m \cup K_{n,p}$ 的顶点标号 f 为：

$$f(x_0)=0, f(x_1)=6m+np+2-s,$$

$$f(x_i)=s+\frac{i-1}{2}, (i=3,5,\cdots,2p+3),$$

$$f(x_i)=6m+np+3-\frac{i}{2}, (i=2,4,6,\cdots,b);$$

$$f(y_1)=2s+2m+(n+1)p+5,$$

$$f(y_i)=s+p+2+\frac{i-1}{2}, (i=3,5,\cdots,2m+1),$$

$$f(y_i)=3s+2m+(n+2)p+8-\frac{i}{2},$$

$$(i=2,4,6,\cdots,2m);$$

$$f(u_i)=i, (i=1,2,\cdots,p), f(v_n)=s,$$

$$f(v_i)=s+(i+1)p+m+3, (i=1,2,\cdots,n-1)$$

类似定理1可证 f 是图 $W_{m,2m+1} \cup K_{n,p}$ 的优美标号。

推论3 对任意自然数 $n \geqslant 1$，图 $W_{5,11} \cup St(n)$ 和 $W_{6,13} \cup St(n)$ 是优美图。

定理3 当 $m \geqslant 3, n \geqslant s = \left[\frac{m}{2}\right]$ 时，$W_{m,2m+1} \cup St(n)$ 是优美图。

证明 设 $V(W_{m,2m+1}) = \{x_0; x_1, x_2, \cdots, x_m; y_1, y_2, \cdots, y_{2m+1}\}$，$V(St(n)) = \{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$，$E = E(W_{m,2m+1} \cup St(n)))$，则 $|E| = 6m + n + 2$。

定义图 $W_{m,2m+1} \cup St(n)$ 的顶点标号 f 为：

$$f(x_0)=0, f(x_1)=6m+n+2-s,$$

$$f(x_i)=s+\frac{i-1}{2}, (i=3,5,\cdots,a),$$

$$f(x_i)=6m+n+3-\frac{i}{2}, (i=2,4,6,\cdots,b);$$

$$f(x_a)=m-1,$$

$$f(y_i)=m+\frac{i-1}{2}, (i=3,5,\cdots,2m+1),$$

当 m 为奇数时，$f(y_i)=5m+n+3-s-\frac{i}{2}, (i=2,4,6,\cdots,2m)$；

当 m 为偶数时，$f(y_i)=5m+n-s+4-\frac{i}{2}, (i=2,4,6,\cdots,2m)$。

$$f(y_1)=f(y_{2m})-1, f(v_0)=s, f(v_i)=i,$$

$$(i=1,2,\cdots,m-s-2),$$

$$f(v_i)=m+2+2s+i,$$

$$(i=m-s-1, m-s, \cdots, n)$$

当 $m-s-2=0$ 时，去掉定义式的第一种情况。

我们仅验证当 m 为偶数时，标号 f 是图 $W_m \cup K_{n,p}$ 的优美标号。当 m 为奇数时，类似。

(i) 由于序列

$$0=f(x_0), f(v_1), f(v_2), \cdots, f(u_{m-s-2}),$$

$$f(x_3), f(x_5), \cdots, f(x_{m-1}),$$

$$f(y_3), f(y_5), \cdots, f(y_{2m+1}),$$

$$f(u_{m-s-1}), f(u_{m-s}), \cdots, f(u_n),$$

$$f(y_1), f(y_{2m}), f(y_{2m-2}), \cdots, f(y_4), f(y_2),$$

$$f(x_1),f(x_m),f(x_{m-2}),\cdots,f(x_4),f(x_2)=6m+n+2$$

是严格递增的，故映射f是单射。

（ii） 对所有的边 $uv\in E$，设 $f'(uv)=|f(u)-f(v)|$，有

$$f'(x_0x_1)=6m+n+2-s,f'(x_1x_2)=s,f'(x_1x_m)=1;$$

$$f'(x_0x_i)=\begin{cases}s+\dfrac{i-1}{2},(i=3,5,\cdots,m-1)\\ 6m+n+3-\dfrac{i}{2},(i=2,4,\cdots,m)\end{cases},$$

$$f'(x_ix_{i+1})=6m+n+3-s-i,(i=2,3,\cdots,m-1);$$

$$f'(v_0v_i)=s-i,(i=1,2,\cdots,n-s-2),$$

$$f'(v_0v_i)=m+2+s+i,(i=m-s-1,m-s,\cdots,n);$$

$$f'(x_0y_1)=4m+n+3-s,$$

$$f'(x_0y_i)=5m+n-s+4-\frac{i}{2},$$

$$(i=2,4,6,\cdots,2m);$$

$$f'(y_1y_2)=m,f'(y_iy_{i+1})=4m+n-s+4-i,$$

$$(i=2,3,\cdots,2m),$$

$$f'(y_1y_{2m+1})=2m+n-s+3$$

因此，序列

$$1=f'(x_1x_m),f'(v_0v_{n-s-2}),f'(v_0v_{n-s-3}),\cdots,f'(v_0v_1),$$
$$f'(x_1x_2),f'(x_0x_3),f'(x_0x_5),\cdots,f'(x_0x_{m-1}),$$
$$f'(y_1y_2),f'(x_0y_3),f'(x_0y_5),\cdots,f'(x_0y_{2m+1}),$$
$$f'(v_0v_{n-s-1}),f'(v_0v_{n-s}),\cdots,f'(v_0v_n),$$
$$f'(y_1y_{2m+1}),f'(y_{2m+1}y_{2m}),f'(y_{2m}y_{2m-1}),\cdots,f'(y_3y_2),$$
$$f'(x_0y_1),f'(x_0y_{2m}),f'(x_0y_{2m-2}),\cdots,f'(x_0y_2),$$
$$f'(x_mx_{m-1}),f'(x_{m-1}x_{m-2}),\cdots,f'(x_3x_2),f'(x_0x_1),$$
$$f'(x_0x_m),f'(x_0x_{m-2}),\cdots,f(x_0x_4),f'(x_0x_2)=6m+n+2$$

是严格递增的，映射$f':E\to\{1,2,\cdots,6m+n+2\}$是双射，因此，图 $W_{m,2m+1}\cup St(n)$ 是优美图。

定理4 对任意自然数 $n\geqslant 1$，当 $m=2n+5$ 时，图 $W_{m,2m+1}\cup(C_3\vee\overline{K_n})$ 是优美图。

证明 设 $V(W_{m,2m+1})=\{x_0;x_1,x_2,\cdots,x_m;y_1,y_2,\cdots,y_{2m+1}\}$，$V(C_3)=\{v_1,v_2,v_3\}$，$V(\overline{K_n})=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$。

下面给出图 $W_{m,2m+1}\cup(C_3\vee\overline{K_n})$ 的顶点标号f：

$$f(x_0)=0,f(x_i)=15n+35-\frac{i-1}{2},$$

$$(i=1,3,5,\cdots,2n+5),$$

$$f(x_i)=n+2+\frac{i}{2},(i=2,4,6,\cdots,2n+4);$$

$$f(y_i)=12n+28-\frac{i-1}{2},(i=1,3,5,\cdots,4n+11),$$

$$f(y_i)=2n+5+\frac{i}{2},(i=2,4,6,\cdots,4n+10);$$

$$f(u_i)=i+1,(i=1,2,\cdots,n),$$

$$f(v_1)=5n+12,f(v_2)=1,f(v_3)=6n+13$$

容易验证f是图 $W_{m,2m+1}\cup(C_3\vee\overline{K_n})$ 的优美标号。

参考文献：

[1] CHENG H, YAO B, CHEN X, et al. On graceful generalized spiders and caterpillars [J]. Ars Combin, 2008, 87:181－191.

[2] YANG Y S, RONG Q, XU X R. A class of graceful graphs [J]. . Math Research and Exposition, 2004, 24: 520－524.

[3] YANG Y, XU X, XI Y, et al. The graphs $C_9^{(t)}$ are graceful for $t\equiv 0,1(\mathrm{mod}4)$ [J]. Ars Combin, 2006, 79:295－301.

[4] YANG Y, XU X, XI Y, et al. The graphs $C_7^{(t)}$ are graceful for $t\equiv 0,3(\mathrm{mod}4)$ [J]. Ars Combin, 2007, 85:361－368.

[5] YOUSSEF M Z. On Skolem-graceful and cordial graphs [J]. Ars Combin, 2006, 78:167－177.

[6] 刘家保,潘向峰. 轮形图和扇型图的优美性[J]. 安徽大学学报:自然科学版,2009, 33 (4):11－13.

[7] 刘瑞芹,张昆龙. 非连通并图的优美标号研究[J]. 合肥工业大学学报:自然科学版,2009,32(6):940－944.

[8] 蔡华,魏丽侠,吕显瑞. 非连通图 $(P_1\vee P_n)\cup G_r$ 和 $(P_1\vee P_n)\cup(P_3\vee\overline{K_r})$ 及 $W_n\cup St(m)$ 的优美性[J]. 吉林大学学报:理学版,2007,45(4):540－543.

[9] 潘伟,路线. 两类非连通图 $(P_2\vee\overline{K_n})\cup St(m)$ 及 $(P_2\vee\overline{K_n})\cup T_n$ 的优美性 [J]. 吉林大学学报:理学版, 2003,41(2):152－154.

[10] 魏丽侠，贾治中. 非连通图 $G_1\cup G_2$ 及 $G_1\cup G_2\cup K_2$ 的优美性 [J]. 应用数学学报, 2005, 28(4): 689－694.