

关于一类高阶齐次线性微分方程解的增长性*

金 瑾

(毕节学院数学系, 贵州 毕节 551700)

摘 要: 研究了高阶线性齐次微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)P_{k-1}(e^z)f' + \cdots + A_1(z)P_1(e^z)f' + A_0(z)P_0(e^z)f = 0$$

解的增长性, 其中 $A_j(z) \neq 0 (j = 0, 1, \dots, k-1)$ 是整函数, $P_j(e^z) (j = 0, 1, \dots, k-1)$ 是 e^z 的非常数多项式, 它们的常数项都为零, 且次数不相等. 证明了该微分方程的每一个非零解有无穷级.

关键词: 线性微分方程; 整函数; 增长级

中图分类号: 0175.29 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579 (2013) 01-0051-04

On the Growth of Solutions of Higher Order Homogeneous Linear Differential Equations

JIN Jin

(Mathematics Department, Bijie University, Bijie 551700, China)

Abstract: The growth of solutions of higher order homogeneous linear differential equation

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)P_{k-1}(e^z)f' + \cdots + A_1(z)P_1(e^z)f' + A_0(z)P_0(e^z)f = 0$$

is investigated, where $A_j(z) \neq 0 (j = 0, 1, \dots, k-1)$ are entire functions, $P_j(e^z) (j = 0, 1, \dots, k-1)$ are nonconstant polynomials of e^z without constant term, and $\deg P(z)$ is not equal to $\deg Q(z)$. It is showed that the order of growth of each nonzero solution of the above equations is infinite.

Key words: linear differential equations; entire function; order of growth

本文采用 Nevanlinna 值分布理论的标准记号^[1-27], 用 $\sigma(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级。

设二阶线性微分方程

$$f'' + A_1(z)e^{a_1z}f' + A_0(z)e^{a_0z}f = 0 \quad (1)$$

其中 $A_j(z) \neq 0 (j = 0, 1)$ 是整函数, 且 $\sigma(A_j) < 1$, $a_j \in C - \{0\} (j = 0, 1)$ 。陈宗煊^[1]研究了微分方程 (1) 的解的增长性问题, 大大推广和完善了 Frei^[2], Ozawa^[3-4], Gundersen^[5], Langley^[6]关于二阶线性微分方程 $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ (其中 $Q(z)$ 为有限级整函数) 解的增长性的结果。

本文主要研究了高阶线性复微分方程

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)P_{k-1}(e^z)f' + \cdots + A_1(z)P_1(e^z)f' + A_0(z)P_0(e^z)f = 0 \quad (2)$$

的解 $f(z)$ 的增长性。得到了下述结论。

定理 1 设 $A_j(z) \neq 0$ 是整函数, $\sigma(A_j) < 1$, $P_j(e^z) = a_{m_j}e^{m_j z} + a_{m_j-1}e^{(m_j-1)z} + \cdots + a_1e^z$, ($j = 0, 1, \dots, k-1$) 其中 $a_{m_j} (j = 0, 1, \dots, k-1)$ 为非零常数, m_j 为正整数, 且 $m_0 > m_j (j = 1, 2, \dots, k-1)$, 则微分方程 (2) 的所有非零解 $f(z)$ 具有无穷级。

1 若干引理

注 1 假设 $P(e^z) = a_m e^{mz} + a_{n-1} e^{(m-1)z} + \cdots + a_2 e^{2z} + a_1 e^z$, $a_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 是非零常数, m 是正整数, 由定义得到

$$|P(e^z)| = |a_m| e^{m \operatorname{Re} z} (1 + o(1)),$$

* 收稿日期: 2012-09-14

基金项目: 贵州省科学技术基金资助项目 (2012GZ10526, 2010GZ43286); 贵州省毕节地区科研基金资助项目 ([2011] 02)

作者简介: 金瑾 (1962 年生), 男, 教授; E-mail: zhaoxinghua62530@163.com

$$\left(\arg z = \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], r \rightarrow \infty \right);$$

$$|P(e^z)| = Me^{r \cos \theta}, \left(\arg z = \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right], r \rightarrow \infty \right);$$

$$|P(e^z)| = M, \left(\arg z = \theta \in \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\} \right)$$

其中 M 为正常数。

引理 1^[1] 假设 $p(z) = (\alpha + \beta i)z^n + \dots$ ($\alpha, \beta \in \mathbf{R}, |\alpha| + |\beta| \neq 0$) 是多项式且 $\deg p = n \geq 1$ 。 $A(z) \neq 0$ 是整函数, 且 $\sigma(A) < n$ 。令 $g(z) = A(z)e^{p(z)}$, $z = re^{i\theta}$, $\delta(p, \theta) = \alpha \cos \theta - \beta \sin \theta$ 。则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在线性测度为零的集合 $H_1 \subset [0, 2\pi)$, 使得对 $\forall \theta \in [0, 2\pi) - (H_1 \cup H_2)$, 存在 $R > 1$, 对所有 $|z| = r > R$ 有

(i) 如果 $\delta(p, \theta) > 0$, 则

$$\exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} < |g(re^{i\theta})| < \exp\{(1 + \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} \quad (3)$$

(ii) 如果 $\delta(p, \theta) < 0$, 则

$$\exp\{(1 + \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} < |g(re^{i\theta})| < \exp\{(1 - \varepsilon)\delta(p, \theta)r^n\} \quad (4)$$

其中 $H_2 = \{\theta \in [0, 2\pi); \delta(p, \theta) = 0\}$ 是有限集。

由引理 1 和注 1 容易得到下面的引理 2。

引理 2 假设 $P(e^z) = a_m e^{mz} + a_{n-1} e^{(m-1)z} + \dots + a_2 e^{2z} + a_1 e^z$, $a_j (j = 1, 2, \dots, m)$ 是非零常数, m 是正整数, $A(z) (\neq 0)$ 是整函数, $\sigma(A) < 1$ 。令 $g(z) = A(z)P(e^z)$, $z = re^{i\theta}$ 。那么对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在集合 $H_1 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, 其线测度为零, 满足对任意 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - (H_1 \cup H_2)$, 存在常数 $R > 0$, 使得对 $|z| = r > R$ 有

(i) 如果 $\cos \theta > 0$, 则

$$\exp\{(1 - \varepsilon)mrcos\theta\} (1 + o(1)) < |g(re^{i\theta})| < \exp\{(1 + \varepsilon)mrcos\theta\} (1 + o(1)) \quad (5)$$

(ii) 如果 $\cos \theta < 0$, 则

$$|g(re^{i\theta})| < R \exp\{rcos\theta + r^{\sigma(A)+\varepsilon}\} \quad (6)$$

其中 $H_2 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 是有限集。

引理 3^[7] 设 $f(z)$ 是整函数, $|f^{(k)}(z)|$ 在射线 $\arg z = \theta$ 上是无界的, 则存在一无界数列 $z_n = r_n e^{i\theta} (n = 1, 2, \dots)$ (其中 $n \rightarrow \infty$ 时, $r_n \rightarrow \infty$) 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(k)}(z_n)}{f^{(j)}(z_n)} = \infty \text{ 和 } \left| \frac{f^{(j)}(z_n)}{f^{(k)}(z_n)} \right| \leq |z_n|^{k-j} (1 + o(1)), \quad (j = 0, 1, 2, \dots, k-1) \quad (7)$$

引理 4^[8] 设 $f(z)$ 是超越亚纯函数且 $\sigma(f) =$

$\sigma < +\infty$ $H = \{(k_1, j_1), (k_2, j_2), \dots, (k_q, j_q)\}$ 是不同的整数对的有限集合, 满足 $k_i > j_i \geq 0 (i = 1, 2, \dots, q)$ 。假设 $\varepsilon > 0$ 是任意给定的常数, 则存在一集合 $E \subset [0, 2\pi)$, 其线性测度为零, 使得如果 $\varphi \in [0, 2\pi) - E$, 则存在常数 $R_0 = R_0(\varphi) > 1$, 对满足 $\arg z = \varphi$ 及 $|z| \geq R_0$ 的 z , 所有 $(k, j) \in H$ 有

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f^{(j)}(z)} \right| \leq |z|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)} \quad (8)$$

注 2 显然在引理 4 中, 如果 $\varphi \in [0, 2\pi) - E$ 由 $\varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - E$ 来替代那么 (8) 式仍然成立。

引理 5^[9] 假设 $f(z)$ 是整函数, 且 $\sigma(f) = \sigma < +\infty$, 存在一集合 $E \subset [0, 2\pi)$, 其线性测度为零, 满足对任意射线 $\arg z = \theta_0 \in [0, 2\pi) - E$, $|f(re^{i\theta_0})| \leq Mr^k$ 。其中 $M = M(\theta_0) > 0$ 是一常数, $k > 0$ 是与 θ_0 无关的常数。则 $f(z)$ 是一多项式且 $\deg f \leq k$ 。

2 定理 1 的证明

证明 设 $f(z)$ 是方程 (2) 的任意超越解, 且 $\sigma(f) = \sigma < +\infty$, 令 $a = \max\{m_j\} (j = 1, 2, \dots, k-1)$ 。 $b = m_0$, 则 $a < b$ 。由已知和引理 4 及注 2 可知, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 满足

$$0 < 2\varepsilon < \frac{b-a}{a+b} \quad (9)$$

存在子集 $E_1 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, 且 E_1 的线测度为零, 满足如果 $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - E_1$ 。则存在常数 $R_0 = R_0(\theta) > 1$, 使得对所有满足 $\arg z = \theta$ 和 $|z| = r > R_0$ 的 z , 有

$$\left| \frac{f^{(k)}(re^{i\theta})}{f^{(j)}(re^{i\theta})} \right| \leq |r|^{(k-j)(\sigma-1+\varepsilon)} (j = 0, 1, \dots, k-1)$$

由引理 2 知, 对上述的 ε , 存在具有线测度为零的集合 $H_1 \subset \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, $\forall \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] - (H_1 \cup H_2)$ ($H_2 = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ 是有限集), 存在 $R_1 > 0$, 使得对 $|z| = r > R_1$ 的 z , 有

(i) 如果 $\cos \theta < 0$, 则

$$|A_j(re^{i\theta})P_j(re^{i\theta})| \leq M \exp\{rcos\theta + r^{\sigma'+\varepsilon}\} \quad (j = 1, 2, \dots, k-1) \quad (10)$$

$$|A_0(re^{i\theta})P_0(re^{i\theta})| \leq M \exp\{rcos\theta + r^{\sigma'+\varepsilon}\} \quad (11)$$

(ii) 如果 $\cos \theta > 0$, 则

$$|A_j(re^{i\theta})P_j(re^{i\theta})| < \exp\{(1 + \varepsilon)brcos\theta\} \cdot (1 + o(1)) (j = 2, \dots, k-1) \quad (12)$$

$$|A_0(re^{i\theta}) P_0(re^{i\theta})| \geq \exp\{(1 - \varepsilon) \arccos\theta\} (1 + o(1)) \quad (13)$$

其中 $M > 0$ 为常数, $\sigma' = \max\{\sigma(A_j)\} (j = 0, 1, \dots, k - 1)$ 。

取 $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] - (E_1 \cup H_1 \cup H_2) (E_1 \cup H_1 \cup H_2 \text{ 的线测度为零})$, 则 θ 满足 $\cos\theta < 0$ 或 $\cos\theta > 0$, 分两种情形证明。

情形 1 $\cos\theta < 0$ 。由方程 (2) 得到

$$1 \leq |A_{k-1}(z) P_{k-1}(e^z)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + \dots + |A_1(z) P_1(z)| \left| \frac{f'(z)}{f^{(k)}(z)} \right| + |A_0(z) P_0(z)| \left| \frac{f(z)}{f^{(k)}(z)} \right| \quad (14)$$

如果 $|f^{(k)}(re^{i\theta})|$ 在射线 $\arg z = \theta$ 上是有界的, 则由引理 3 存在无穷点列 $\{z_q = r_q e^{i\theta}\}$, 其中 $r_q \rightarrow \infty$ 满足

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(r_q e^{i\theta})}{f^{(k)}(r_q e^{i\theta})} \right| &\leq r_q^k (1 + o(1)), \\ \left| \frac{f'(r_q e^{i\theta})}{f^{(k)}(r_q e^{i\theta})} \right| &\leq r_q^{k-1} (1 + o(1)), \dots, \\ \left| \frac{f^{(k-1)}(r_q e^{i\theta})}{f^{(k)}(r_q e^{i\theta})} \right| &\leq r_q^{k-1} (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (15)$$

将 (10) 式、(11) 式及 (15) 式代入 (14) 式得到: 当 $r_q \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} 1 &\leq M \exp\{r_q \cos\theta + r_q^{\sigma' + \varepsilon}\} r_q^k (1 + o(1)) + \\ &M \exp\{r_q \cos\theta + r_q^{\sigma' + \varepsilon}\} r_q^{k-1} (1 + o(1)) + \\ &\dots + M \exp\{r_q \cos\theta + r_q^{\sigma' + \varepsilon}\} r_q^2 (1 + o(1)) + \\ &M \exp\{r_q \cos\theta + r_q^{\sigma' + \varepsilon}\} r_q (1 + o(1)) = \\ &M \exp\{r_q \cos\theta + r_q^{\sigma' + \varepsilon}\} \frac{r_q (1 - r_q)^k}{1 - r_q} \cdot \\ &(1 + o(1)) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

这是一个矛盾。所以

$$|f^{(k)}(re^{i\theta})| \leq M_1 \quad (16)$$

在射线 $\arg z = \theta$ 上成立, 其中 $M_1 > 0$ 是常数。取积分路线 $\Gamma = \{s: \arg s = \theta, \rho \leq |s| \leq |z|\}$, 由 (16) 式和

$$f^{(k-1)}(z) = f^{(k-1)}(0) + \int_0^z f^{(k)}(s) ds$$

得到 $|f^{(k-1)}(z)| \leq M_2 |z|$

其中 $M_2 > 0$ 是常数。类似地由

$$f^{(k-2)}(z) = f^{(k-2)}(0) + \int_0^z f^{(k-1)}(s) ds,$$

.....

$$f'(z) = f'(0) + \int_0^z f''(s) ds,$$

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(s) ds$$

得到 $|f(z)| \leq M_3 |z|^k$

其中 $M_3 > 0$ 是常数。

情形 2 $\cos\theta > 0$ 。由方程 (2) 得到

$$\begin{aligned} |A_0(z) P_0(e^z)| &\leq \\ \left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| + |A_{k-1}(z) P_{k-1}(e^z)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} \right| + \dots + \\ |A_1(z) P_1(e^z)| \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| \end{aligned} \quad (17)$$

如果 $|f'(re^{i\theta})|$ 在射线 $\arg z = \theta$ 上是有界的, 则由引理 4 存在无穷点列 $\{z_i = r_i e^{i\theta}\}$, 其中 $r_i \rightarrow \infty$ 满足

$$\begin{aligned} \left| \frac{f^{(k)}(r_i e^{i\theta})}{f(r_i e^{i\theta})} \right| &\leq r_i^{k(\sigma-1+\varepsilon)}, \left| \frac{f^{(k-1)}(r_i e^{i\theta})}{f(r_i e^{i\theta})} \right| \leq \\ r_i^{(k-1)(\sigma-1+\varepsilon)}, \dots, \left| \frac{f'(r_i e^{i\theta})}{f(r_i e^{i\theta})} \right| &\leq r_i^{(\sigma-1+\varepsilon)} \end{aligned} \quad (18)$$

将 (12) 式、(13) 式及 (18) 式代入 (17) 式得到: 当 $r_i \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \exp\{(1 - \varepsilon) a r_i \cos\theta\} (1 + o(1)) &\leq \\ |A_1(r_i e^{i\theta}) P(e^{r_i e^{i\theta}})| &\leq r_i^{k(\sigma-1+\varepsilon)} + \\ r_i^{(k-1)(\sigma-1+\varepsilon)} \exp\{(1 + \varepsilon) b r_i \cos\theta\} &(1 + o(1)) + \\ r_i^{(k-2)(\sigma-1+\varepsilon)} \exp\{(1 + \varepsilon) b r_i \cos\theta\} &(1 + o(1)) + \dots + \\ r_i^{(\sigma-1+\varepsilon)} \exp\{(1 + \varepsilon) b r_i \cos\theta\} &(1 + o(1)) \leq \\ k r_i^{k(\sigma-1+\varepsilon)} \exp\{(1 + \varepsilon) b r_i \cos\theta\} &(1 + o(1)) \end{aligned} \quad (19)$$

由 (9) 式和 (19) 式得到

$$\exp\{(a + b) r_i \varepsilon \cos\theta\} \leq k r_i^{k(\sigma-1+\varepsilon)} (1 + o(1)) \quad (20)$$

由于 $\cos\theta > 0$, 可知当 $r_i \rightarrow \infty$ 时, (20) 矛盾。所以在射线 $\arg z = \theta$ 上

$$|f'(r_i e^{i\theta})| \leq M_0 \quad (21)$$

成立, 其中 $M_0 > 0$ 是常数。取积分路线 $\Gamma = \{s: \arg s = \theta, \rho \leq |s| \leq |z|\}$, 由 (21) 式和

$$f(z) = f(0) + \int_0^z f'(s) ds$$

可得 $|f(z)| \leq M_0 |z|$ 。

由上述情形 1 和情形 2 可知, 在射线 $\arg z = \theta$ 上有 $|f(z)| \leq G |z|^k$ 成立, 其中 $G > 0$ 是常数。

以上证明了在射线 $\arg z = \theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] - (E_1 \cup H_1 \cup H_2)$ 上有 $|f(z)| \leq G |z|^k$ 。由于 $E_1 \cup H_1 \cup H_2$ 的线测度为零, 由引理 5 可知 $f(z)$ 是多项式, 这与 $f(z)$ 是超越函数矛盾。所以 $\sigma(f) = \infty$ 。

下面证明方程 (2) 不可能有非常数多项式解。假设 $f(z)$ 是方程 (2) 的非常数多项式解, 取射线 $\arg z = \theta$ 满足 $\cos\theta > 0$, 由引理 2 和方程 (2) 得到

对任给的 $\varepsilon (0 < 2\varepsilon < \frac{b-a}{a+b})$, 当 r 充分大时有

$$\begin{aligned} \exp\{(1-\varepsilon)\arccos\theta\}r^n(1+o(1)) &\leq \\ |A_0(re^{i\theta})P_0(e^{re^{i\theta}})f(re^{i\theta})| &\leq \\ |f^{(k)}(re^{i\theta})| + |A_{k-1}(re^{i\theta})P_{k-1}(e^{re^{i\theta}})| &|f^{(k-1)}(re^{i\theta})| + \\ \cdots + |A_1(re^{i\theta})P_1(e^{re^{i\theta}})| &|f'(re^{i\theta})| \leq \\ r^{kn}\exp\{(1+\varepsilon)\arccos\theta\}r^n(1+o(1)) & \end{aligned}$$

即 $\exp\{\frac{a+b}{2}r\cos\theta\} \leq kr^{(k-1)n}(1+o(1))$

其中 $n = \deg f$ 。这是一个矛盾。

又由 $Q(e^z) \neq 0$ 可知 $f(z)$ 不可能为非零常数。所以方程 (2) 的每个非零解具有无穷级。

参考文献:

- [1] 陈宗煊. 关于微分方程 $f'' + A_1(z)e^{a_1z}f' + A_0(z)e^{a_0z}f = 0$ 的增长性[J]. 中国科学: A 辑, 2001, 31(9): 775 - 784.
- [2] FREI M. Uber die subnormalen losungen der differentialgleichung $w'' + e^{-z}w' + (K\text{const})w = 0$ [J]. Comment Math Helv, 1962, 36: 1 - 8.
- [3] OZAWA M. On a solution of $w'' + e^{-z}w' + (az + b)w = 0$ [J]. Kodai Math J, 1980, 3: 295 - 309.
- [4] AMEMIYA I, OZAWA M. Non-existence of finite order solution of $w'' + e^{-z}w' + Q(z)w = 0$ [J]. Hokkaido Math J, 1981, 10: 1 - 17.
- [5] GUNDERSEN G. On the question of whether $f'' + e^{-z}f' + Q(z)f = 0$ can admit a solution $f \neq 0$ of finite order [J]. Proc R S E, 1986, 102A: 9 - 17.
- [6] LANGLEY J K. On complex oscillation and a problem of Ozawa [J]. Kodai Math J, 1986, 9: 430 - 439.
- [7] CHEN Z X. On the growth of solutions of a class of higher order differential equation [J]. China Ann of Math, 2003, 24B(4): 501 - 508.
- [8] GUNDERSEN G. Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates [J]. J London Math Soc, 1988, 37: 88 - 104.
- [9] GUNDERSEN G. Finite order solutions of second order linear differential equations [J]. Tran Amer Math Soc, 1988, 305: 415 - 429.
- [10] XU J F, YI H X. The relation between solutions of higher order differential equation with functions of small growth [J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2010, 53(2): 291 - 296.
- [11] TU J, CHEN Z X. Growth of solutions of a class of higher order linear differential equations [J]. Acta Mathematica Scientia, 2008, 28A(4): 670 - 678.
- [12] HUANG Z B, CHEN Z X. Subnormal solutions of second order homogeneous linear differential equations with periodic coefficients [J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2009, 52(1): 9 - 16.
- [13] CHEN Z X, ZHANG Z L. Entire functions sharing fixed points with their higher order derivatives [J]. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 2007, 50(6): 1213 - 1222.
- [14] GROSS F. On the distribution of values of meromorphic functions [J]. Tran Amer Math Soc, 1968, 131: 199 - 214.
- [15] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论[M]. 北京: 科学出版社, 1995.
- [16] XU J F, YI H X. Growth and fixed points of meromorphic solutions of higher-order linear differential equations [J]. J Korean Math Soc 2009, 46(4): 74 - 78.
- [17] CHEN Z X. Zeros of meromorphic solutions of higher order linear differential equations [J]. Analysis, 1999, 14: 425 - 438.
- [18] 金瑾. 复方程 $f'' + Af = 0$ 的解的零点充满圆 [J]. 数学进展, 2005, 5: 609 - 613.
- [19] 金瑾. 高阶整函数系数线性微分方程的解及其解的导数的不动点 [J]. 数学研究与评论, 2007, 27(4): 107 - 113.
- [20] 金瑾. 高阶线性微分方程解的二阶导数的不动点 [J]. 数学理论与应用, 2007, 27(4): 107 - 113.
- [21] 金瑾. 一类高阶齐次线性微分方程亚纯解的超级及其不动点 [J]. 华中师范大学学报: 自然科学版, 2011, 45(1): 18 - 22.
- [22] JIN J. The hyper order of solutions of higher order linear differential equations with analytic coefficients in the unit disc [C]//Proceedings of the 5th International Congress on Mathematical Biology (ICMB2011), 2011.
- [23] JIN J. The fix point and hyper of solutions of higher order homogeneous linear differential equations with meromorphic function coefficients [C]//Proceedings of the 5th International Congress on Mathematical Biology (ICMB2011), 2011.
- [24] 金瑾. 一类微分方程的解及其解的导数与不动点的关系 [J]. 数学实践与认识, 2011, 41(22): 185 - 190.
- [25] 金瑾. 高阶齐次线性微分方程解的超级的角域分布 [J]. 数学实践与认识, 2008, 38(12): 178 - 167.
- [26] JIN J. The fixed point and hyper order of solutions of higher order nonhomogeneous linear differential equations with meromorphic function coefficients [J]. Mechanical and Aerospace Engineering (ICMAE2011), 2011: 3297 - 3300.
- [27] 王金华, 赵育林, 向红军. 分数微分方程 m 点边值问题解的存在性与唯一性 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2011, 50(1): 4 - 8.