一类高维非线性反应扩散方程有限差分格式的稳定性*

徐琛梅，于吉亮，王 波
（河南大学数学与信息科学学院，河南 开封 475001）

摘 要：利用增量未知元方法，对一类高维非线性反应扩散方程，建立具有增量未知元的有限差分格式，并利用非线性 Galerkin 方法讨论该差分格式的稳定性。通过对该格式的稳定性分析，说明和古典差分格式的稳定性相比较，带有增量未知元的有限差分格式的稳定性得到了提高。

关键词：稳定性分析；增量未知元；有限差分；反应扩散方程
中图分类号：O241.84 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2011）06－0012－04

Stability of the Finite Difference Scheme for a Higher Dimensional Nonlinear Reaction-Diffusion Equation

XU Chenmei, *YU Jiliang*, *WANG Bo*
(College of Mathematics and Information Science, Henan University, Kaifeng 475001, China)

Abstract: The finite difference scheme with incremental unknowns for a higher dimensional nonlinear reaction-diffusion equation is presented by means of introducing incremental unknowns method and the stability of the scheme is discussed with nonlinear Galerkin method. Through stability analysis for the scheme, it was shown that stability of the finite difference scheme with the incremental unknowns is improved when compared with that of the corresponding classic difference scheme.

Key words: stability analysis; incremental unknowns; finite difference; reaction-diffusion equation

微分方程数值解法很多，但对于非线性发展方程问题，长时间求解仍然是个难题，因此在进行数值计算时，将会增加大量的运算量。使用增量未知元方法，可以提高发展方程的稳定性和改善椭圆方程的条件数，从而节省计算时间。用增量未知元方法研究微分方程数值解法问题，在 20 世纪 90 年代初，由 Temam[1] 在利用有限差分逼近耗散性发散方程时首次提出；然后，Chen 和 Temam[2] 将该方法用于椭圆型方程的数值解中，通过对未知元的大变元和小变元进行不同的处理，所得结果导致了椭圆型方程差分格式的条件数改善；随后，Chen 和 Temam[3] 等又将增量未知元方法用于研究其它类型的发展方程的数值解问题，从而提高微分方程的有限差分格式的稳定性。目前该方法已应用到各类方程，并且得到许多有效的数值格式[4-6]。

本文将利用增量未知元方法，研究某些特殊的非线性反应扩散方程的有限差分格式稳定性问题。为简单起见，下面就以特殊的二维反应扩散方程为例来说明这个问题，对于高于二维的情形，也可以用同样的办法处理。

在这篇文章中，首先，对这类特殊的二维非线性反应扩散方程，引入增量未知元方法，建立出具有一阶增量未知元的半离散有限差分方程，并利用非线性 Galerkin 方法对非线性部分进行处理，得到具有增量未知元的完全离散的非线性有限差分格式；然后，引入步长函数空间，在这个函数空间

* 收稿日期：2010－12－25
基金项目：河南省教育厅自然科学研究计划资助项目（2010A100003）；国家自然科学青年基金资助项目（40805020）
作者简介：徐琛梅（1965 年生），女，副教授；E-mail：chen. m. x@ henu. edu. cn

中，利用变分近似法，将具有增量未知元的完全离散的非线性有限差分格式用变分形式写出，并讨论该有限差分格式的稳定性。通过对该格式的稳定性分析，说明和古典差分格式的稳定性相比较，带有增量未知元的有限差分格式的稳定性得到了提高。

1 非线性反应扩散方程的半离散格式和增量未知元方法

假设二维非线性反应扩散方程的初边值问题为

$$\begin{cases} u_t - p\Delta u + u^{2m-1} = 0, & x \in D, t > 0 \quad (1) \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in D \quad (2) \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial D, t \geqslant 0 \quad (3) \end{cases}$$

其中 m 是个正整数，$p > 0$ 且 $D = (0,1)^2$。

取空间步长为 $h = \frac{1}{2N+1}$，并记 $x_{1,i} = ih$，$x_{2,j} = jh$，$(ih,jh) = (i,j)$，$(i,j = 0,1,\cdots,2N+1)$，采用中心差分，对方程（1）进行离散，得到半离散的非线性有限差分方程为

$$\frac{\partial u_{ij}}{\partial t} - p\left(\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h^2}\right) + u_{ij}^{2m-1} = 0 \quad (4)$$

其中 u_{ij} 表示未知函数 $u(x_1,x_2,t)$ 在节点 $(x_{1,i},x_{2,j},t)$ 处函数值的近似值，即 $u_{ij} \approx u(x_{1,i},x_{2,j},t)(i,j = 1,2,\cdots,2N)$。

为方便起见，记

$U = (u_{11},u_{12},\cdots,u_{1,2N},u_{21},\cdots,u_{2,2N},\cdots,u_{2N,1},\cdots,u_{2N,2N})^{\mathrm{T}}$,

$U^{2m-1} = (u_{11}^{2m-1},u_{12}^{2m-1},\cdots,u_{1,2N}^{2m-1},u_{21}^{2m-1},\cdots,u_{2,2N}^{2m-1},\cdots,u_{2N,2N}^{2m-1})^{\mathrm{T}}$

方程（4）可以用矩阵表示为

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{p}{h^2}AU + U^{2m-1} = 0 \quad (5)$$

其中 A 是个 $(2N)^2$ 阶的三对角分块矩阵。

下面介绍增量未知元方法。在粗网格处的近似值和细网格处的近似值分别定义为

$$\begin{cases} y_{2i,2j} = \frac{1}{4}(u_{2i,2j} + u_{2i-1,2j} + u_{2i,2j-1} + u_{2i-1,2j-1}) \\ z_{2i-1,2j} = u_{2i-1,2j} - y_{2i,2j} & (i,j = 1,2,\cdots,N) \\ z_{2i,2j-1} = u_{2i,2j-1} - y_{2i,2j} \\ z_{2i-1,2j-1} = u_{2i-1,2j-1} - y_{2i,2j} \end{cases} \quad (6)$$

根据上式可得

$$\begin{cases} u_{2i,2j} = y_{2i,2j} - z_{2i-1,2j} - z_{2i,2j-1} - z_{2i-1,2j-1} \\ u_{2i-1,2j} = y_{2i,2j} + z_{2i-1,2j} & (i,j = 1,2,\cdots,N) \\ u_{2i,2j-1} = y_{2i,2j} + z_{2i,2j-1} \\ u_{2i-1,2j-1} = y_{2i,2j} + z_{2i-1,2j-1} \end{cases} \quad (7)$$

对 U 进行调序，并记为 $\widetilde{U}$，则

$$\widetilde{U} = (u_{22},u_{24},\cdots,u_{2,2N},u_{42},\cdots,u_{2N,2N}, u_{12},u_{14},\cdots,u_{1,2N},u_{32},\cdots,u_{2N-1,2N}, u_{21},u_{23},\cdots,u_{2,2N-1},u_{41},\cdots,u_{2N,2N-1},u_{11},u_{13},\cdots, u_{1,2N-1},u_{31},\cdots,u_{2N-1,2N-1})^{\mathrm{T}}$$

从而有 $U = P\widetilde{U}$，其中 P 是个 $(2N)^2$ 阶的置换矩阵。

一阶增量未知元为

$$\overline{U} = (Y,Z)^{\mathrm{T}} = (Y,Z_1,Z_2,Z_3)^{\mathrm{T}}$$

其中

$Y = (y_{22},y_{24},\cdots,y_{2,2N},y_{42},\cdots,y_{4,2N},\cdots,y_{2N,2},\cdots,y_{2N,2N})^{\mathrm{T}}$,

$Z_1 = (z_{12},z_{14},\cdots,z_{1,2N},z_{32},\cdots,z_{3,2N},\cdots,z_{2N-1,2},\cdots,z_{2N-1,2N})^{\mathrm{T}}$,

$Z_2 = (z_{21},z_{23},\cdots,z_{2,2N-1},z_{41},\cdots,z_{4,2N-1},\cdots,z_{2N,1},\cdots,z_{2N,2N-1})^{\mathrm{T}}$,

$Z_3 = (z_{11},z_{13},\cdots,z_{1,2N-1},z_{31},\cdots,z_{3,2N-1},\cdots,z_{2N-1,1}\cdots,z_{2N-1,2N-1})^{\mathrm{T}}$

根据式（7），可以得到 $\widetilde{U} = S\overline{U}$，其中

$$S = \begin{pmatrix} E & -E & -E & -E \\ E & E & 0 & 0 \\ E & 0 & E & 0 \\ E & 0 & 0 & E \end{pmatrix}$$

E 是 N^2 阶的单位矩阵。我们很容易得到下式

$$U = P\widetilde{U} = PS\overline{U} \quad (8)$$

将式（8）代入有限差分方程（5），然后两边同乘 $(PS)^{-1}$，得到

$$S^{-1}P^{-1}\frac{\partial(PS\overline{U})}{\partial t} + \frac{p}{h^2}S^{-1}P^{-1}APS\overline{U} + S^{-1}P^{-1}(PS\overline{U})^{2m-1} = 0$$

利用 $PP^{-1} = E$，$S^{-1}S = E$ 和 $(PS\overline{U})^{2m-1}$ 的定义，上式可写为

$$\frac{\partial \overline{U}}{\partial t} + \frac{p}{h^2}S^{-1}P^{-1}APS\overline{U} + S^{-1}(S\overline{U})^{2m-1} = 0 \quad (9)$$

该式就是具有一阶增量未知元的半离散非线性有限差分方程。不考虑用 $\overline{U} = (Y,Z)^{\mathrm{T}} = (Y,Z_1,Z_2,Z_3)^{\mathrm{T}}$ 代替 U 的情况下，方程（9）和（5）是等价的。在方程（9）中，舍去关于 Z_1,Z_2,Z_3 的很小量，方程（9）可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} Y \\ Z \end{pmatrix} + \frac{p}{h^2}S^{-1}P^{-1}APS\overline{U} + \begin{pmatrix} Y^{2m-1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \quad (10)$$

取时间网格大小为 k，并令 $t_n = nk(n = 0,1,\cdots)$，

对方程（10）关于时间变量离散，得到具有一阶增量未知元的完全离散的非线性有限差分格式

$$\begin{cases}\dfrac{1}{k}\begin{pmatrix} Y^{n+1}-Y^n \\ Z^{n+1}-Z^n \end{pmatrix}+\dfrac{p}{h^2}S^{-1}P^{-1}APS\begin{pmatrix} Y^n \\ Z^n \end{pmatrix}+ \\ \qquad \begin{pmatrix} (Y^n)^{2m-1} \\ 0 \end{pmatrix}=0, \\ Y^0=(y_{22}^0,y_{24}^0,\cdots,y_{2,2N}^0,\cdots,y_{2N,2N}^0)^{\mathrm{T}}, \\ Z^0=(Z_1^0,Z_2^0,Z_3^0), \\ Z_1^0=(z_{2i-1,2j}^0)^{\mathrm{T}}, \\ Z_2^0=(z_{2i,2j-1}^0)^{\mathrm{T}}, \\ Z_3^0=(z_{2i-1,2j-1}^0)^{\mathrm{T}}, \end{cases} \tag{11}$$

其中 $i,j=1,2,\cdots,N$。

2 差分格式（11）的稳定性分析

假设 V_h 为由基函数 $\omega_{h,ij}(x_1,x_2)=\omega_{h,i}(x_1)\omega_{h,j}(x_2)(i,j=1,2,\cdots,2N)$ 张成的有限维函数空间，其中基函数 $\omega_{h,i}(x_1)$ 在区间 $[ih,(i+1)h)$ 上取值为1，在该区间之外取值为0；而基函数 $\omega_{h,j}(x_2)$ 在区间 $[jh,(j+1)h)$ 上取值为1，在该区间之外取值为0。$u_h(x_1,x_2)$ 是 V_h 中的一个步长函数，且当 $(x_1,x_2)\in[ih,(i+1)h)\times[jh,(j+1)h)(i,j=1,2,\cdots,2N)$ 时，$u_h(x_1,x_2)=u_{ij}$，其它均有 $u_h(x_1,x_2)=0$。因此，任意的函数 $u_h(x_1,x_2)\in V_h$，都有

$$u_h(x_1,x_2)=\sum_{i,j=1}^{2N}u_{ij}\omega_{h,ij}(x_1,x_2),(x_1,x_2)\in D$$

有限差分算子定义如下：

$$\nabla_{h,x_1}u_h(x_1,x_2)=\frac{1}{h}[u_h(x_1+h,x_2)-u_h(x_1,x_2)],$$

$$\nabla_{h,x_2}u_h(x_1,x_2)=\frac{1}{h}[u_h(x_1,x_2+h)-u_h(x_1,x_2)]$$

V_h 中的内积定义为

$$((u_h,v_h))_h=\iint_D\nabla u_h\cdot\nabla v_h\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2=$$

$$\iint_D\sum_{l=1}^{2}\nabla_{h,l}u_h\nabla_{h,l}v_h\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

其中 $(\cdot,\cdot)$ 表示 $L^2(D)$ 空间中的内积。用 $\|\cdot\|_h=\{((\cdot,\cdot))_h\}^{\frac{1}{2}}$ 和 $|\cdot|=\{(\cdot,\cdot)\}^{\frac{1}{2}}$ 分别表示相应的范数，并且范数 $\|\cdot\|_h$ 和 $|\cdot|$ 都是空间 V_h 中 Hilbert 范数。

在空间 V_h 中，方程（4）可以用变分的形式写为

$$(\frac{\partial u_h}{\partial t},\tilde{u})+p((u_h,\tilde{u}))_h+$$

$$((u_h)^{2m-1},\tilde{u})=0,\tilde{u}\in V_h \tag{12}$$

在（12）中取 $\tilde{u}=\omega_{h,i}(x_1)\omega_{h,j}(x_2)(i,j=1,2,\cdots,2N)$ 时，方程（12）就是（4）；再对空间 V_h 进行适当的分解，方程（12）可以覆盖方程（9）。

设 $Q_{1h}=\{(ih,jh)\mid i,j=1,2,\cdots,2N\}$，$Q_{2h}=\{(2ih,2jh)\mid i,j=1,2,\cdots,N\}$，$Y_h$ 和 Z_h 分别为由 $\varphi_{h,M}(x_1,x_2)(M\in Q_{2h})$ 和 $\psi_{h,M}(x_1,x_2)(M\in\dfrac{Q_{1h}}{Q_{2h}})$ 所张成的步长函数空间，其中

$$\varphi_{h,M}(x_1,x_2)=\omega_{h,2i}(x_1)\omega_{h,2j}(x_2)+\omega_{h,2i-1}(x_1)\omega_{h,2j-1}(x_2)+\omega_{h,2i}(x_1)\omega_{h,2j-1}(x_2)+\omega_{h,2i-1}(x_1)\omega_{h,2j}(x_2),M\in Q_{2h},$$

$$\psi_{h,M}(x_1,x_2)=\omega_{h,2i-1}(x_1)\omega_{h,2j-1}(x_2)-\omega_{h,2i}(x_1)\omega_{h,2j}(x_2),$$
$$M\in\{((2i-1)h,(2j-1)h)\mid i,j=1,2,\cdots,N\},$$

$$\psi_{h,M}(x_1,x_2)=\omega_{h,2i-1}(x_1)\omega_{h,2j}(x_2)-\omega_{h,2i}(x_1)\omega_{h,2j}(x_2),$$
$$M\in\{((2i-1)h,2jh)\mid i,j=1,2,\cdots,N\},$$

$$\psi_{h,M}(x_1,x_2)=\omega_{h,2i}(x_1)\omega_{h,2j-1}(x_2)-\omega_{h,2i}(x_1)\omega_{h,2j}(x_2),$$
$$M\in\{(2ih,(2j-1)h)\mid i,j=1,2,\cdots,N\}$$

那么

$$y_h(x_1,x_2)=\sum_{M\in Q_{2h}}y_M\varphi_{h,M}(x_1,x_2),y_h(x_1,x_2)\in Y_h,$$

$$z_h(x_1,x_2)=\sum_{M\in Q_{1h}/Q_{2h}}z_M\psi_{h,M}(x_1,x_2),z_h(x_1,x_2)\in Z_h$$

根据范数 $\|\cdot\|_h$ 和 $|\cdot|$ 的定义，容易验证下面引理[7]的正确性。

引理1 任意的函数 $y_h\in Y_h$，都有

$$\|y_h\|_h\leqslant\frac{2}{h}|y_h|,|y_h|_\infty\leqslant\frac{1}{2h}|y_h|$$

成立，其中 $|y_h|_\infty=\max\limits_{1\leqslant i,j\leqslant N}|y_{2i,2j}|$。

引理2 任意的函数 $z_h\in Z_h$，都有 $\|z_h\|_h\leqslant\dfrac{2\sqrt{2}}{h}|z_h|$ 成立。

根据式（7），可得

$$V_h=Y_h\oplus Z_h。\tag{13}$$

在式（13）的分解意义下，方程（9）和（10）分别等价于

$$\begin{cases}(\dfrac{\partial y_h}{\partial t},\tilde{y})+p((y_h+z_h,\tilde{y}))_h+ \\ \qquad((y_h+z_h)^{2m-1},\tilde{y})=0,\tilde{y}\in Y_h, & (14)\\ (\dfrac{\partial z_h}{\partial t},\tilde{z})+p((y_h+z_h,\tilde{z}))_h+ \\ \qquad((y_h+z_h)^{2m-1},\tilde{z})=0,\tilde{z}\in Z_h & (15)\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}(\dfrac{\partial y_h}{\partial t},\tilde{y})+p((y_h+z_h,\tilde{y}))_h+((y_h)^{2m-1},\tilde{y})=0,\tilde{y}\in Y_h, \\ (\dfrac{\partial z_h}{\partial t},\tilde{z})+p((y_h+z_h,\tilde{z}))_h=0,\tilde{z}\in Z_h\end{cases}$$

方程（11）的变分形式为

$$\begin{cases} (\dfrac{y_h^{n+1}-y_h^n}{k},\tilde{y}) + p((y_h^n+z_h^n,\tilde{y}))_h + \\ \quad ((y_h^n)^{2m-1},\tilde{y}) = 0,\ \tilde{y}\in Y_h & (16) \\ (\dfrac{z_h^{n+1}-z_h^n}{k},\tilde{z}) + p((y_h^n+z_h^n,\tilde{z}))_h = 0, \tilde{z}\in Z_h & (17) \end{cases}$$

定理 1　设 $M_0 = |u_h^0|^2$，如果

$$\frac{k}{h^2} \leqslant \frac{1}{8p} \text{和} \frac{k}{h^{2(m-1)}} \leqslant \frac{2^{2(m-1)}}{M_0^{m-1}}$$

成立，则有如下估计式

$$|u_h^n|^2 = |y_h^n|^2 + |z_h^n|^2 \leqslant M_0, n \geqslant 0$$

证明　使用数学归纳法证明。当 $n=0$ 时，结论显然；假定取 n 时成立，即 $|u_h^n|^2 \leqslant M_0$。

下面证明取 $n+1$ 时，结论的正确性。

在式（16）和（17）中，分别令 $\tilde{y} = 2ky_h^n$ 和 $\tilde{z} = 2kz_h^n$，并将两式联立，再利用关系式

$2(a-b,b) = |a|^2 - |b|^2 - |a-b|^2$，得

$$|y_h^{n+1}|^2 - |y_h^n|^2 - |y_h^{n+1}-y_h^n|^2 + |z_h^{n+1}|^2 - |z_h^n|^2 - |z_h^{n+1}-z_h^n|^2 + 2kp\|u_h\|_h^2 + 2k\iint_D (y_h^n)^{2m-1}y_h^n \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0$$

从而得到

$$|u_h^{n+1}|^2 = |u_h^n|^2 + |y_h^{n+1}-y_h^n|^2 + |z_h^{n+1}-z_h^n|^2 - 2kp\|u_h\|_h^2 - 2k\iint_D (y_h^n)^{2m}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 = 0 \quad (18)$$

在方程（16）中，用 $k(y_h^{n+1}-y_h^n)$ 代替 $\tilde{y}$，并使用 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 1，有

$$|y_h^{n+1}-y_h^n|^2 \leqslant \frac{8k^2p^2}{h^2}\|u_h\|_h^2 + 2k^2|(y_h^n)^{2m-1}|^2$$

根据引理 1，有

$$|(y_h^n)^{2m-1}|^2 \leqslant (\frac{1}{2h}|y_h^n|)^{2(m-1)}\iint_D (y_h^n)^{2m}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\text{，得}$$

$$|y_h^{n+1}-y_h^n|^2 \leqslant \frac{8k^2p^2}{h^2}\|u_h\|_h^2 + \frac{2k^2}{(2h)^{2(m-1)}} |y_h^n|^{2(m-1)}\iint_D (y_h^n)^{2m}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \quad (19)$$

在方程（17）中，用 $k(z_h^{n+1}-z_h^n)$ 代替 $\tilde{z}$，且利用 Cauchy-Schwarz 不等式和引理 2，得

$$|z_h^{n+1}-z_h^n|^2 \leqslant \frac{8k^2p^2}{h^2}\|u_h\|_h^2 \quad (20)$$

将关系式（18）、（19）、（20）联立，可以得到

$$|u_h^{n+1}|^2 \leqslant |u_h^n|^2 + (\frac{16k^2p^2}{h^2} - 2kp)\|u_h\|_h^2 + [\frac{2k^2}{(2h)^{2(m-1)}}|y_h^n|^{2(m-1)} - 2k]\iint_D (y_h^n)^{2m}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2 \quad (21)$$

利用定理的条件和式（21），可得

$$|u_h^{n+1}|^2 \leqslant |u_h^n|^2 \leqslant M_0$$

因此，当取 $n+1$ 时，结论正确。根据数学归纳法，对任意的自然数 n，都有

$$|u_h^n|^2 \leqslant M_0$$

说明：通过稳定性分析，说明和方程（1）的古典差分格式稳定性条件比较[8]，时间步长提高 $2^{2(m-1)}$ 倍。在进行数值实验时，完全离散差分格式（11）简单有效，并不会增加每一时间层上的计算复杂度。该方法也可以和其它差分格式联合[9-10]，使格式的稳定性得到改善。

参考文献：

[1] TEMAM R. Inertial manifolds and multigrid methods [J]. SIAM J Math Anal, 1990, 21 (1): 154 – 178.

[2] CHEN M, TEMAM R. Incremental unknowns in finite differences: Condition number of the matrix [J]. SIAM J Matrix Anal Appl, 1993, 14 (2): 432 – 455.

[3] CHEN M, TEMAM R. Incremental unknowns for solving partial differential equations [J]. Numer Math, 1991, 59 (3): 255 – 271.

[4] CHEN M, TEMAM R. Incremental unknowns for convection-diffusion equations [J]. App Numer Math, 1993, 11 (3): 365 – 383.

[5] CHEN M, MIRANVILL A, TEMAM R. Incremental unknowns in finite differences in three space dimensions [J]. Comput Appl Math, 1995, 14 (3): 1 – 15.

[6] POUIT F. Stability study, error estimation, and condition number for semi-implicit schemes using incremental unknowns [J]. Numerical Methods for Partial Differential Equation, 1996, 12: 743 – 766.

[7] CHEN M, TEMAM R. Nonlinear Galerkin method in the finite difference case and wavelet-like incremental unknowns [J]. Numer Math, 1993, 64: 271 – 294.

[8] XU C M. The stability research for the finite difference scheme of a nonlinear reaction-diffusion equation [J]. Chin Quart J of Math, 2008, 23 (2): 159 – 164.

[9] 汪晓东，朱庆勇．求解带源项双曲守恒律方程的 IGVC 格式 [J]．中山大学学报：自然科学版，2008，47 (S2)：131 – 135.

[10] 朱庆勇，卞静．三维飞船绕流问题的高精度迎风紧致差分格式 [J]．中山大学学报：自然科学版，2001，40 (1)：16 – 19.