带交叉扩散项的捕食模型非常数正解的存在性*

王利娟[1,2]，姜洪领[2]
（1. 陕西师范大学数学与信息科学学院，陕西 西安 710062；
2. 宝鸡文理学院数学系，陕西 宝鸡 721013）

摘　要：讨论了一类具有交叉扩散项的捕食食饵模型正解的存在性。利用最大值原理和 Harnack 不等式给出了模型正解的先验估计，运用积分性质证明了非常数正解的不存在性，再利用度理论得到了非常数正解存在的充分条件。

关键词：交叉扩散；非常数正解；度理论
中图分类号：O175.26　**文献标志码**：A　**文章编号**：0529-6579（2012）01-0014-05

The Existence of Nonconstant Positive Solution for a Prey-Predator Model with Cross-Diffusion

WANG Lijuan[1,2], *JIANG Hongling*[2]
（1. College of Mathematics and Information Science, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China;
2. Department of Mathematics, Baoji University of Arts and Sciences, Baoji 721013, China）

Abstract: The existence of positive solutions is discussed for a prey-predator model with cross-diffusion. The prior estimate to the positive solutions of the model is given by means of maximum principle and Harnack inequality. By using the integral property, the nonexistence of the nonconstant positive solutions is proved. The sufficient conditions for the existence of nonconstant positive solutions are obtained.

Key words: cross-diffusion; nonconstant positive solution; degree theory

本文考虑如下带交叉扩散项的捕食食饵模型：

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial t} - d_1\Delta u = \alpha u - u^2 - \dfrac{\beta uv}{1+au+bv}, & x\in\Omega, t>0\\
\dfrac{\partial v}{\partial t} - d_2\Delta(1+d_3u)v = \delta v - \dfrac{v^2}{u}, & x\in\Omega, t>0\\
\partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x\in\partial\Omega, t>0\\
u(x,0) = u_0(x) \geqslant 0 \not\equiv 0,\\
v(x,0) = v_0(x) \geqslant 0 \not\equiv 0, & x\in\bar{\Omega}
\end{cases}
\tag{1}
$$

其中 u,v 分别代表食饵和捕食者的密度，Ω 是 $R^n(n\geqslant 1)$ 中具有光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域，∂_ν 表示单位外法向量的方向导数，边界条件表示它们生活在同一个封闭的环境，常数 d_1,d_2 分别是 u,v 的扩散系数，d_2d_3 是交叉扩散系数，参数 α,β,a,b,δ 均为正常数。

对于捕食模型，国内外已有许多研究，并且取得了很多有意义的成果，诸如捕食问题正平衡态解的存在性、稳定性和惟一性、局部和全局分歧等。有关这些模型的背景、研究成果和进展，有兴趣的读者可参看文献［1-8］。对于 $d_3=0$ 且功能反应函数为 Holling-Tanner 型函数的模型，文献［9］利用 Lyapunov 方法研究了其平衡态正常数解的全局稳定性，文献［10］讨论了其非常数正解的存在性和不存在性。对于 $d_3\neq 0$ 即带有交叉扩散项的模型，文献［11］讨论了反应函数为 Holling-

* 收稿日期：2011-05-19
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971124）；教育部高等学校博士点基金资助项目（200807180004）；宝鸡文理学院重点资助项目（Zk10116）
作者简介：王利娟（1982 生），女，博士生，讲师；E-mail：lijuanw82@163.com

Tanner 型函数时模型平衡态正解的先验估计和非常数正解的存在性。但是 Holling-Tanner 型函数只与变量 u 有关，这是食物依赖型的反应函数，说明捕食者的捕食行为仅仅由食饵决定，这有悖于一些物种的实际观测结果。因此我们引入较 Holling-Tanner 更合理的 Beddington-DeAngelis 功能反应函数来进一步刻画生态系统，研究物种的共存条件。模型（1）对应的平衡态方程为：

$$\begin{cases} -d_1\Delta u = \alpha u - u^2 - \dfrac{\beta uv}{1+au+bv}, & x\in\Omega \\ -d_2\Delta(1+d_3u)v = \delta v - \dfrac{v^2}{u}, & x\in\Omega \\ \partial_\nu u = \partial_\nu v = 0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

其中 $d_3\geqslant 0$，记 $J=-\nabla(d_2v+d_2d_3uv)=-d_2d_3v\nabla u-(d_2+d_2d_3u)\nabla v$，如果 $d_3>0$，那么 $-d_2d_3v\nabla u$ 表示大群食饵者避开捕食者的侵害。对模型更详细的生物意义和背景可参看文献［4，12－14］。

显然，(2)有惟一的一个正常数解 (u^*,v^*)，其中

$$u^*=\frac{1}{2m}(m\alpha-1-\beta\delta+\sqrt{(\beta\delta+1-m\alpha)^2+4m\alpha}),$$

$$v^*=\delta u^*,(m=a+b\delta)$$

本文主要研究模型（2）非常数正解的存在性。

1　正解的先验估计

为了得到正解的估计，首先引入下面的两个引理。

引理 1[15]（最大值原理）设 $g\in C(\bar\Omega\times R)$，

(i) 若 $w\in C^2(\Omega)\times C^1(\bar\Omega)$，满足 $\Delta w+g(x,w(x))\geqslant 0$，$x\in\Omega$ 且 $\partial_\nu w\leqslant 0$，$x\in\partial\Omega$。如果 $w(x_0)=\max_{\bar\Omega}w$，那么 $g(x_0,w(x_0))\geqslant 0$；

(ii) 若 $w\in C^2(\Omega)\times C^1(\bar\Omega)$，满足 $\Delta w+g(x,w(x))\leqslant 0$，$x\in\Omega$ 且 $\partial_\nu w\geqslant 0$，$x\in\partial\Omega$。如果 $w(x_0)=\min_{\bar\Omega}w$，那么 $g(x_0,w(x_0))\leqslant 0$。

引理 2[16]（Harnack 不等式）若 $c(x)\in C(\bar\Omega)$，令 $w\in C^2(\Omega)\times C^1(\bar\Omega)$ 是

$$\Delta w+c(x)w=0,\quad x\in\Omega;\partial_\nu w=0,\quad x\in\partial\Omega$$

的正解，那么存在常数 $C=C(\|c(x)\|_\infty,\Omega)$，使得 $\max_{\bar\Omega}w\leqslant C\min_{\bar\Omega}w$。

为了方便，用 Λ 表示 α,β,a,b,δ，下面用到的常数 $C,\underline{C},\bar{C}$ 等都只与 Ω 和参数 Λ 有关。

定理 1　设 D_1,D_2 是任意正常数，那么存在 $\underline{C}(\Lambda,D_1,D_2)$，$\bar{C}(\Lambda,D_1,D_2)$，使得 $d_1,d_2\geqslant D_1$，$d_3/d_2\leqslant D_2$ 时，模型（2）的任意正解 $u(x),v(x)$ 满足

$$\underline{C}(\Lambda,D_1,D_2)\leqslant u(x),v(x)\leqslant\bar{C}(\Lambda,D_1,D_2),x\in\bar\Omega$$

证明　利用引理 1 得 $u(x)<\alpha,x\in\bar\Omega$，故 $u(x)$ 有上界。为了证明 $v(x)$ 有上界，首先证明存在 $C=C(\Lambda,D_1,D_2)$，使得

$$\max_{\bar\Omega}u\leqslant C\min_{\bar\Omega}u,\max_{\bar\Omega}v\leqslant C\min_{\bar\Omega}v \tag{3}$$

令 $w=d_2(1+d_3u)v$，则 $w(x)$ 满足方程

$$-\Delta w=v(\delta-\frac{v}{u}),\quad x\in\Omega;\partial_\nu w=0,\quad x\in\partial\Omega \tag{4}$$

设 $w(x_0)=\max_{\bar\Omega}w$，则由引理 1 知 $v(x_0)\leqslant\delta u(x_0)<\delta\alpha$，那么 $\max_{\bar\Omega}v(x)\leqslant d_2^{-1}\max_{\bar\Omega}w\leqslant\delta(1+d_3\alpha)u(x_0)\leqslant\delta(1+d_3\alpha)\max_{\bar\Omega}u(x)$，$\min_{\bar\Omega}v(x)\leqslant v(x_0)<\delta\alpha$。

直接利用引理 2 可知，存在 $C=C(\Lambda,D_1,D_2)$，使得 $\max_{\bar\Omega}u\leqslant C\min_{\bar\Omega}u$。

又由于（4）等价于

$$-\Delta w=\frac{\delta u-v}{d_2u(1+d_3u)}w,x\in\Omega;\quad\partial_\nu w=0,\quad x\in\partial\Omega$$

令 $c(x)=\dfrac{\delta u-v}{d_2u(1+d_3u)}$，那么

$$\|c(x)\|_\infty\leqslant\max_{\bar\Omega}\left|\frac{\delta u}{d_2u(1+d_3u)}\right|+\max_{\bar\Omega}\left|\frac{v}{d_2u(1+d_3u)}\right|\leqslant$$

$$\frac{\delta}{d_2}+\frac{\max_{\bar\Omega}v}{d_2\min_{\bar\Omega}u}\leqslant\frac{\delta}{d_2}+\frac{\delta(1+d_3\alpha)}{d_2}\frac{\max_{\bar\Omega}u}{\min_{\bar\Omega}u}\leqslant$$

$$\frac{\delta}{D_1}+\delta(\frac{1}{D_1}+D_2\alpha)C$$

由引理 2 知，存在 $C=C(\Lambda,D_1,D_2)$ 使得 $\max_{\bar\Omega}v\leqslant C\min_{\bar\Omega}v$，所以（3）式成立，且

$\max_{\bar\Omega}v\leqslant C\delta\alpha$，故 $v(x)$ 有上界。下面证明正解 $u(x),v(x)$ 有下界。

假设 $u(x),v(x)$ 没有下界，则存在参数列 $(d_{1,i},d_{2,i},d_{3,i})=(d_1,d_2,d_3)$，其中 $d_{1,i},d_{2,i}\geqslant D_1$，$d_{3,i}\geqslant 0$，使得模型（2）对应的正解列 (u_i,v_i) 满足

$$\min_{\bar\Omega}u_i\to 0 \text{ 或者 } \min_{\bar\Omega}v_i\to 0,i\to\infty \tag{5}$$

由于 (u_i,v_i) 满足方程

$$\begin{cases} -d_{1,i}\Delta u_i=\alpha u_i-u_i^2-\dfrac{\beta u_iv_i}{1+au_i+bv_i}, & x\in\Omega \\ -d_{2,i}\Delta(1+d_{3,i}u_i)v_i=\delta v_i-\dfrac{v_i^2}{u_i}, & x\in\Omega \\ \partial_\nu u_i=\partial_\nu v_i=0, & x\in\partial\Omega \end{cases} \tag{6}$$

对（6）式两端在 Ω 上积分得

$$\int_\Omega u_i(\alpha-u_i-\frac{\beta v_i}{1+au_i+bv_i})\mathrm{d}x=0,\int_\Omega v_i(\delta-\frac{v_i}{u_i})\mathrm{d}x=0 \tag{7}$$

则存在 $x_i\in\bar{\Omega}$，使得对任意 $i\geqslant 1$，有 $\delta-\dfrac{v_i(x_i)}{u_i(x_i)}=0$，即 $\delta u_i(x_i)=v_i(x_i)$。由（3）和（5）式可得，当 $i\to\infty$ 时，$u_i(x)$ 和 $v_i(x)$ 在 $\bar{\Omega}$ 上一致收敛于0。另外根据（7）式的第一个方程可知，存在 $y_i\in\bar{\Omega}$ 使得 $\alpha=u_i(y_i)+\dfrac{\beta v_i(y_i)}{1+au_i(y_i)+bv_i(y_i)}$，$i\geqslant 1$。那么当 $i\to\infty$ 时，有 $\alpha=0$，矛盾。所以定理1成立。

2 非常数正解的不存在性

设 $0=\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots\cdots$ 是 $-\Delta$ 算子在 Neumann 边界条件下的特征值，其中 λ_i 的代数重数记为 $m_i\geqslant 1$。

定理2 设 D,ε 是任意正常数，那么存在 $C=C(\Lambda,\varepsilon,D)$，使得当 $d_1>C(1+d_2^2d_3^2)$，$d_2>\delta+\varepsilon$ 且 $d_3/d_2\leqslant D$ 时，模型（2）没有非常数正解。

证明 设 (u,v) 是模型（2）的一个正解，记 $\bar{g}=\dfrac{1}{|\Omega|}\int_\Omega g\mathrm{d}x$，在模型（2）两方程两边分别同乘以 $(u-\bar{u})$ 和 $(v-\bar{v})$，两式相加并在 Ω 上积分得：

$$\int_\Omega\{d_1|\nabla u|^2+d_2(1+d_3u)|\nabla v|^2+d_2d_3v\nabla u\cdot\nabla v\}\mathrm{d}x=$$

$$\int_\Omega\{[\alpha-(u+\bar{u})-\frac{\beta\bar{v}(1+bv)}{(1+au+bv)(1+a\bar{u}+b\bar{v})}](u-\bar{u})^2+$$

$$[\frac{\bar{v}^2}{u\bar{u}}-\frac{\beta u(1+a\bar{u})}{(1+au+bv)(1+a\bar{u}+b\bar{v})}](u-\bar{u})(v-\bar{v})+$$

$$(\delta-\frac{v+\bar{v}}{u})(v-\bar{v})^2\}\mathrm{d}x$$

由定理1和 ε - Young 不等式，有

$$\int_\Omega[d_1|\nabla u|^2+d_2(1+d_3u)|\nabla v|^2]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_\Omega\{C(\varepsilon)(u-\bar{u})^2+(\delta+\varepsilon)(v-\bar{v})^2+\frac{d_2^2d_3^2v^2}{4\varepsilon}|\nabla u|^2+\varepsilon|\nabla v|^2\}\mathrm{d}x$$

其中 $C(\varepsilon)$ 只依赖于 $\Lambda,\Omega,\varepsilon$ 和 D。

再利用定理1及 Poincaré 不等式 $\lambda_1\int_\Omega(u-\bar{u})^2\mathrm{d}x\leqslant\int_\Omega|\nabla(u-\bar{u})|^2\mathrm{d}x$，有

$$\int_\Omega[d_1|\nabla u|^2+d_2(1+d_3u)|\nabla v|^2]\mathrm{d}x\leqslant$$

$$\int_\Omega\{C(\varepsilon)(1+d_2^2d_3^2)|\nabla u|^2+(\delta+\varepsilon)|\nabla v|^2\}\mathrm{d}x$$

由上面不等式知，存在 $C=C(\Lambda,\varepsilon,D)$，使得当 $d_1>C(1+d_2^2d_3^2)$，$d_2>\delta+\varepsilon$ 且 $d_3/d_2\leqslant D$ 时，模型（2）没有非常数正解。

3 非常数正解的存在性

令 $w(d_3)=(1+d_3u)v$，$w^*(d_3)=(1+d_3u^*)v^*$，为了方便将 $w(d_3)$ 和 $w^*(d_3)$ 分别记为 w 和 w^*。令 $U^*=(u^*,w^*)$，$U=(u,w)$，那么模型（2）等价于

$$(I-G)U=0 \tag{8}$$

其中

$$G(U)=\begin{pmatrix}(I-d_1\Delta)^{-1}((\alpha+1)u-u^2-\dfrac{\beta uw}{(1+au)(1+d_3u)+bw})\\(I-d_2\Delta)^{-1}(\dfrac{\delta+1+d_3u}{1+d_3u}w-\dfrac{w^2}{u(1+d_3u)^2})\end{pmatrix}$$

$(I-d_i\Delta)^{-1}(i=1,2)$ 是 $I-d_i\Delta$ 在齐次 Neumann 边界条件下的逆算子。因为算子 $(I-d_i\Delta)^{-1}:C(\bar{\Omega})\to C(\bar{\Omega})(i=1,2)$ 是紧的，所以 $G:[C(\bar{\Omega})]^2\to[C(\bar{\Omega})]^2$ 也是紧的，首先计算 $I-G$ 在 U^* 的指标，考虑特征值问题

$$-(I-D_UG(U^*))(y,z)=\mu(y,z),(y,z)\neq(0,0) \tag{9}$$

由 Leray-Schauder 度理论知，如果0不是（9）的特征值，那么

$$\mathrm{index}(I-G,U^*)=(-1)^r,r=\sum_{\mu>0}n_\mu \tag{10}$$

其中 n_μ 是方程（9）的正特征值的代数重数。显然，方程（9）等价于

$$\begin{cases}-d_1(\mu+1)\Delta y+\\ [-\alpha+2u^*+\dfrac{\beta\delta u^*(1+(b\delta-a)d_3u^{*2}+b\delta u^*)}{(1+mu^*)^2(1+d_3u^*)}+\mu]y+\\ \dfrac{\beta u^*(1+au^*)}{(1+mu^*)^2(1+d_3u^*)}z=0, & x\in\Omega;\\ -d_2(\mu+1)\Delta z+\\ (\mu+\dfrac{\delta}{1+d_3u^*})z-\dfrac{\delta^2(1+2d_3u^*)}{1+d_3u^*}y=0, & x\in\Omega;\\ \partial_\nu y=\partial_\nu z=0, & x\in\partial\Omega\end{cases} \tag{11}$$

因此 μ 是方程（9）的特征值当且仅当对某些整数 $k\geqslant 0$，$P_k(\mu)=0$，这里 $P_k(\mu)=\det\begin{pmatrix}A&B\\C&D\end{pmatrix}$，其中

$$A=\mu+\frac{d_1\lambda_k-\alpha+2u^*+\dfrac{\beta\delta u^*(1+(b\delta-a)d_3u^{*2}+b\delta u^*)}{(1+mu^*)^2(1+d_3u^*)}}{1+d_1\lambda_k},$$

$$B=\frac{\beta u^*(1+au^*)}{(1+d_1\lambda_k)(1+mu^*)^2(1+d_3u^*)},$$

$$C=-\frac{\delta^2(1+2d_3u^*)}{(1+d_3u^*)(1+d_2\lambda_k)},$$

$$D=\mu+\frac{d_2\lambda_k+\dfrac{\delta}{1+d_3u^*}}{1+d_2\lambda_k}$$

记 $P_k(\mu)=0$ 的正解 μ 的代数重数为 l_μ。由（10）式知，对任意的整数 $k\geqslant 0$，$P_k(0)\neq 0$，那么

$$\operatorname{index}(I-G,U^*)=(-1)^r,r=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\mu>0,P_k(\mu)=0}l_\mu m_k \tag{12}$$

引理 3　若 $d_3=0$，那么存在正常数 $\widetilde{D}_1=\widetilde{D}_1(d_2,\Lambda)$，使得对任意 $d_1\geqslant\widetilde{D}_1$，有 $\operatorname{index}(I-G,U^*)=1$。

证明　当 $k=0$ 时，由于 $\lambda_0=0$，所以 $P_0(\mu)$ 的常数项为 $\dfrac{\delta(\alpha+mu^{*2})}{1+mu^*}>0$，因此 0 不是 $P_0(\mu)$ 的根，且 $P_0(\mu)=0$ 或者没有正根，或者有两个正根。

当 $k\geqslant 1$ 时，有 $\lambda_k\geqslant\lambda_1>0$，且 $\lim\limits_{d_1\to\infty}P_k(\mu)=(\mu+1)(\mu+\dfrac{\delta+d_2\lambda_k}{1+d_2\lambda_k}),k\geqslant 1$，所以存在 $\widetilde{D}_1>0$，使得当 $d_1>\widetilde{D}_1$ 时，$P_k(\mu)=0(k\geqslant 1)$ 没有正根。因而利用公式（12）得 $\operatorname{index}(I-G,U^*)=1$。

引理 4　设 $Q=\alpha-2u^*-\dfrac{\beta\delta(b\delta-a)u^{*2}}{(1+mu^*)^2}$，如果对某个整数 $k^*\geqslant 0$，有 $\dfrac{Q}{d_1}\in(\lambda_{k^*},\lambda_{k^*+1})$，那么存在正常数 $\widetilde{D}_2=\widetilde{D}_2(\Lambda,d_1,d_2)$，使得当 $d_3\geqslant\widetilde{D}_2$ 时，$\operatorname{index}(I-G,U^*)=(-1)^r$，其中 $r=\sum\limits_{i=0}^{k^*}m_i$。

证明　记 $P_k(\mu)$ 关于 μ 的常数项为 $\Pi(k)$，那么直接计算得

$$\lim_{d_3\to\infty}\Pi(k)=\frac{d_2\lambda_k(d_1\lambda_k-Q)}{(1+d_1\lambda_k)(1+d_2\lambda_k)}$$

所以对于某个整数 $k^*\geqslant 0$，若 $\dfrac{Q}{d_1}\in(\lambda_{k^*},\lambda_{k^*+1})$，固定 d_1,d_2，若 d_3 充分大，对于 $k\in[0,k^*]$ 有 $\Pi(k)<0$。那么方程 $P_k(\mu)=0$ 只有一个正根。引理得证。

定理 3　设对于某个整数 $k^*\geqslant 0$，有 $\dfrac{Q}{d_1}\in(\lambda_{k^*},\lambda_{k^*+1})$，其中 Q 在引理 4 中已定义。如果 $\sum\limits_{i=0}^{k^*}m_i$ 是奇数，那么存在正常数 $\bar{D}=\bar{D}(\Lambda,d_1,d_2)$，使得当 $d_3\geqslant\bar{D}$ 时，模型（2）至少有一个非常数正解。

证明　对于固定的 $\bar{d}_2$，令 $\bar{d}_1$ 充分大，使得当 $d_3=0$ 时，定理 2 和引理 3 都成立。设 $t\in[0,1]$，定义

$$G(U;t)=\begin{pmatrix}(I-[td_1+(1-t)\bar{d}_1]\Delta)^{-1}((\alpha+1)\\ u-u^2-\dfrac{\beta uw}{(1+au)(1+td_3u)+bw})\\ (I-[td_2+(1-t)\bar{d}_2]\Delta)^{-1}\\ (\dfrac{\delta+1+td_3u}{1+td_3u}w-\dfrac{w^2}{u(1+td_3u)^2})\end{pmatrix}$$

由定理 2 知，存在正常数 $M=M((\bar{d}_1,\bar{d}_2,d_1,d_2,d_3,\Lambda)$，使得式（8）在 $\partial\Theta$ 上没有正解，其中

$$\Theta=\{(u,w)\in[C(\bar{\Omega})]^2|\frac{1}{M}<u,w<M\}$$

因为 $G(U;t):\Theta\times[0,1]\to[C(\bar{\Omega})]^2$ 是紧的，所以 $\deg(I-G(\cdot;t),\Theta,0)$ 是有定义的，由度的同伦不变性知 $\deg(I-G(\cdot;0),\Theta,0)=\deg(I-G(\cdot;1),\Theta,0)$。根据定理 2 和引理 3 可得

$$\deg(I-G(\cdot;0),\Theta,0)=\operatorname{index}(G(\cdot;0),U^*)=1$$

另一方面，假设当 $d_3\geqslant\bar{D}$ 时，式（8）没有非常数正解，由引理 4 知

$$\deg(I-G(\cdot;1),\Theta,0)=$$
$$\operatorname{index}(G(\cdot;1),U^*)=(-1)^r,r=\sum_{i=0}^{k^*}m_i$$

由于 $\sum\limits_{i=0}^{k^*}m_i$ 是奇数，可得 $\deg(I-G(\cdot;1),\Theta,0)=-1$，矛盾，所以式（8）至少有一个非常数正解。由于模型（2）等价于式（8），故定理得证。

参考文献：

[1] CHEN W Y, PENG R. Stationary patterns created by cross-diffusion for the competitor-competitor-mutualist model [J]. J Math Anal Appl, 2004, 291: 550 – 564.

[2] DU Y H, LOU Y. S-shaped global bifurcation curve and Hopf bifurcation of positive solutions to a predator-prey model [J]. J Differential Equation, 1998, 144: 390 – 440.

[3] KUTO K. Stability of steady-state solutions to a prey-predator system with cross-diffusion [J]. J Differential Equation, 2004, 197: 293 – 314.

[4] KUTO K, YAMADA Y. Multiple coexistence states for a prey-predator system with cross-diffusion [J]. J Differential Equation, 2004, 197:315 – 348.

[5] LOU Y, NI W M. Diffusion vs cross-diffusion: an elliptic approach [J]. J. Differential Equation, 1999, 154: 157 – 190.

[6] PANG P Y H, WANG M X. Strategy and stationary pattern in a three-species predator-prey model [J]. J Differential Equation, 2004, 200:245 – 273.

[7] SCHREIBER S J. Coexistence for species sharing a pred-

ator [J]. J Differential Equation, 2004, 196: 209 - 225.

[8] WANG M X. Non-constant positive steady states of Sel' kov model [J]. J Differential Equation, 2003, 190: 600 - 620.

[9] PENG R, WANG M X. Global stability of the equilibrium of a diffusive Holling-Tanner prey-predator model [J]. Appl Math Lett, 2007, 20: 664 - 670.

[10] PENG R, WANG M X. Positive steady states of the Holling-Tanner prey-predator model with diffusion [J]. Proc Roy Soc Edinburgh (A), 2005, 135: 149 - 164.

[11] PENG R, WANG M X, YANG G Y. Stationary patterns of the Holling-Tanner prey-predator model with diffusion and cross-diffusion [J]. Appl Math Comp, 2008, 196: 570 - 577.

[12] DUBEY B, DAS B, HASSAIN J. A predator-prey interaction model with self and cross-diffusion [J]. Ecol Model, 2002, 141: 67 - 76.

[13] NAKASHIMA K, YAMADA Y. Positive steady states for prey-predator models with cross-diffusion [J]. Adv Differ Equat, 1996, 6: 1099 - 1122.

[14] RYU K, AHN I. Positive steady-states for two interacting species models with linear self-cross diffusions [J]. Discrete Contin Dynam Syst, 2003, 9: 1049 - 1061.

[15] LOU Y, NI W M. Diffusion, self-diffusion and cross-diffusion [J]. J Differential Equation, 1996, 131:79 - 131.

[16] LIN C S, NI W M, TAKAGI I. Large amplitude stationary solutions to a chemostat systems [J]. J Differential Equation, 1988, 72: 1 - 27.

（上接第13页）

[11] ESEDOGLU S, SHEN J. Digital inpainting based on the Mumford-Shah-Euler image model[J]. European Journal of Applied Mathematics, 2002, 13:353 - 370.

[12] MUMFORD D, SHAH J. Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems [J]. Communications on Pure and Applied Mathematics, 1989, 42: 577 - 685.

[13] GROSSAUER H, SCHERZER O. Using the complex Ginzburg-Landau equation for digital inpainting in 2d and 3d, scale space methods in computer vision[J]. Lecture Notes in Computer Science 2695, 2003: 225 - 236.

[14] BORNEMANN F, MÄRZ T. Fast image inpainting based on coherence transport[J]. Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2007, 28(3): 259 - 278.

[15] BERTALMIO M, VESE L, SAPIRO G, et al. Simultaneous texture and structure image inpainting[J]. IEEE Tran Image Process. 2003, 12(8): 882 - 889.

[16] CRIMINISI A, PEREZ P, TOYAMA K. Region filling and object removal by exemplar-based image inpainting [J]. IEEE Trans Image Processing, 2004, 13(9): 1200 - 1212.

[17] WEXLER Y, SHECHTMAN E, IRANI M. Space-time video completion[J]. IEEE Trans Pattern Anal Mach Intell, 2007, 29(3): 1463 - 1476.

[18] FADILI M, STARCK J, MURTAGH F. Inpainting and zooming using sparse representations [J]. Comput J, 2009, 52(1):64 - 79.

[19] KOMODAKIS N, TZIRITAS G. Image completion using efficient belief propagation via priority scheduling and dynamic pruning[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2007, 16(11): 2649 - 2661.

[20] AUJOL J, LADJAL S, MASNOU S. Exemplar-based inpainting from a variational point of view[J]. SIAM Journal on Mathematical Analysis, 2010, 42(3): 1246 - 1285.

[21] MAJDA A, BERTOZZI A. Vorticity and incompressible flow [M]. Cambridge Univ Press, 2001.

[22] TAI X. Global extrapolation with a parallel splitting method[J]. Numerical Algorithm, 1991, 3:527 - 440.

[23] WEICKERT J, ROMENY B, VIERGEVER M. Efficient and reliable schemes for nonlinear diffusion filtering[J]. IEEE Trans on Image Processing, 1998, 7(3):398 - 410.

[24] KUHNE G, WEICKERT J, VIERGEVER M. Fast implicit active contours models lecture[J]. Notes on Computer Science, 2002, 2449: 133 - 140.