一类三阶非线性时标动态方程的振动性*

张少艳[1]，王其如[2]
（1. 广东金融学院，广东 广州 510520；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘　要：主要利用广义 Riccati 变换技巧和 $H(t,s)$ 型函数，给出了一类三阶非线性时性标动态方程

$$\left(a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma}\right)^{\Delta}+f(t,x(\tau(t)))=0$$

的振动准则。

关键词：三阶时标动态方程；振动性；非线性；广义 Riccati 技巧
中图分类号：O175　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）04－0050－07

Oscillation for Third-order Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales

ZHANG Shaoyan[1], *WANG Qiru*[2]
（1. Department of Mathematics, Guangdong University of Finance, Guangzhou 510520, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China）

Abstract: By using generalized Riccati transformation technique and functions of the form $H(t,s)$, new oscillation criteria are established for third-order nonlinear dynamic equations on time scales of the form

$$\left(a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma}\right)^{\Delta}+f(t,x(\tau(t)))=0$$

Key words: third order dynamic equations on time scales; oscillation; nonlinear; generalized Riccati technique

2009 年，Hassan 在文献［1］中给出了方程

$$\left(a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma}\right)^{\Delta}+f(t,x(\tau(t)))=0 \tag{1}$$

在 $\int_a^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty$，$\int_a^{\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty$，$\int_b^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^{\infty}q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s=\infty$，$\tau\circ\sigma=\sigma\circ\tau$，$\tau^{\Delta}(t)\geqslant 0$ 且如下条件（H1）－（H3）成立时的振动准则，其中

（H1）$\tau(t)\in C_{rd}(T,T)$，$\tau(t)\leqslant t$，$\lim\limits_{t\to\infty}\tau(t)=\infty$；

（H2）$a(t),r(t)\in C_{rd}(T,\mathbf{R}^{+})$；

（H3）$f(t,u)\in C(T\times\mathbf{R},\mathbf{R})$，存在 $q(t)\in C_{rd}(T,\mathbf{R}_0^{+})$ 且 $q(t)$ 不最终恒等于 0，使得 $uf(t,u)\geqslant q(t)|u^{\gamma+1}|$，其中 γ 为不可约正奇数的商，$\mathbf{R}^{+}=(0,+\infty)$，$\mathbf{R}_0^{+}=[0,+\infty)$。

2010 年，Erbe 等在文献［2］中也对（1）在（H1）－（H3）成立时进行了研究，给出了异于文献［1］新的振动准则，但文献［2］中同样要求 $\tau^{\Delta}(t)\geqslant 0$。其它相关结果，可参见文献［3－10］。

本文同样假设（H1）－（H3）成立的前提下，对方程（1）的振动性进行研究，去掉文献［1－2］中 $\tau\circ\sigma=\sigma\circ\tau$，$\tau^{\Delta}(t)\geqslant 0$ 的条件，但要求 $\int_T^{\infty}q(s)\tau^{\gamma}(s)\Delta s=\infty$ 成立，改进了文献［1－2］的部分结论，同时也得到了一些新的结论。

---

* **收稿日期**：2011－12－01
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10971231，11071238）
作者简介：张少艳（1981 年生），女，讲师；**通讯作者**：王其如；E-mail：mcswqr@mail.sysu.edu.cn

为了书写的方便，我们记 $x(\sigma(t)) = x^{\sigma}(t) = x^{\sigma}$。

我们研究的是方程（1）的解的振动性质，所以我们假设上述方程是在无上界的时标上讨论的，即形如 $[a,\infty)$ 的时标。方程（1）的解 $x(t)$ 称为振动，若 $x(t)$ 既不是最终正解，也不是最终负解，否则，称 $x(t)$ 为非振动的。方程（1）称为振动的，如果它的所有解都是振动的。

本文由三部分组成，第一部分为基本引理，第二部分为主要定理，第三部分给出 2 个应用的例子。

1　基本引理

下面，我们给出第一个引理

引理 1[1]　设（H1）-（H3）且 $\int_a^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s = \infty$，$\int_a^{\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s = \infty$，

$$\int_b^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^{\infty}q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s = \infty$$

成立，若方程（1）存在最终正解，则 $\exists t_0 \in \boldsymbol{T}$，使得 $\left(a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma}\right)^{\Delta} < 0$，$(r(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta} > 0$，$x^{\Delta}(t) > 0(t \geqslant t_0)$ 或 $\lim\limits_{t\to\infty}x(t) = 0$。

引理 2[1]　若方程（1）存在最终正解，且 $[r(t)(x^{\Delta}(t))]^{\Delta} > 0, x^{\Delta}(t) > 0$，则

$$x^{\Delta}(t) \geqslant \frac{1}{r(t)}a^{\frac{1}{\gamma}}(t)(r(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta}\int_{t_*}^{t}\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}, x(t) \geqslant a^{\frac{1}{\gamma}}(t)(r(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta}\int_{t_*}^{t}\frac{1}{r(s)}\Delta s\int_{t_*}^{s}\frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}(t_* \geqslant t_0)$$

引理 3　若 $\int_T^{\infty}q(s)\tau^{\gamma}(s)\Delta s = \infty$ 且 $x(t) \geqslant 0(t \geqslant t_0)$，则 $\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{\Delta} \leqslant 0$ 且等号不最终成立。

证明　$\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{\Delta} = \frac{tx^{\Delta}(t) - x(t)}{t\sigma(t)}$，我们断言 $tx^{\Delta}(t) - x(t) \leqslant 0$。若不然，则 $\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{\Delta} > 0$。

取 $t_1 \in [t_0, +\infty)$，使得 $\tau(t) \geqslant \tau(t_1)(t \geqslant t_1)$。则，$\frac{x(\tau(t))}{\tau(t)} \geqslant \frac{x(\tau(t_1))}{\tau(t_1)} := d \geqslant 0$，故 $x(\tau(t)) \geqslant d\tau(t)$。由

$$\left(a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma}\right)^{\Delta} \leqslant -q(t)x^{\gamma}(\tau(t)),$$

对上式积分可得

$$a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma} + \int_{t_1}^{t}q(s)x^{\gamma}(\tau(s))\Delta s \leqslant a(t_1)\left[\left(r(t_1)x^{\Delta}(t_1)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma},$$

$$a(t_1)\left[\left(r(t_1)x^{\Delta}(t_1)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma} \geqslant \int_{t_1}^{t}q(s)x^{\gamma}(\tau(s))\Delta s \geqslant d^{\gamma}\int_{t_1}^{t}q(s)\alpha(s)\tau^{\gamma}(s)\Delta s \to \infty\ (\text{矛盾})$$

故 $\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{\Delta} \leqslant 0$ 且等号不最终成立。

注 1　因为 $\left(\frac{x(t)}{t}\right)^{\Delta} \leqslant 0, t \geqslant \tau(t)$，故

$$\frac{x(\tau(t))}{x(t)} \geqslant \frac{\tau(t)}{t} \tag{2}$$

引理 4[3]　设 $f(u) = Bu - Au^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}$，$A > 0$，$B$ 是常数，γ 是不可约正奇数的商。则 f 在 R 上存在最大值，且

$$\max_{u\in\mathbf{R}}f(u) = f(u^*) = \frac{\gamma^{\gamma}}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{B^{\gamma+1}}{A^{\gamma}}$$

其中　$u^* = \left(\frac{B\gamma}{A(\gamma+1)}\right)^{\gamma}$。

引理 5[3]　若 $x(t)$ 是时标上可导函数，且 $x^{\Delta}(t) \geqslant 0$，则有下列不等式成立：

（i）若 $\gamma \geqslant 1$，则 $((x(t))^{\gamma})^{\Delta} \geqslant \gamma(x(t))^{\gamma-1}x^{\Delta}(t)$；

（ii）若 $0 < \gamma < 1$ 且 $x(t)\cdot x(\sigma(t)) > 0$，则 $((x(t))^{\gamma})^{\Delta} \geqslant \gamma(x(\sigma(t)))^{\gamma-1}x^{\Delta}(t)$.

引理 6[4]　若 x，z 是时标上的可导函数，则对 $x \neq 0, \forall t \in T$，有

$$x^{\Delta}\left(\frac{z^2}{x}\right)^{\Delta} = (z^{\Delta})^2 - xx^{\sigma}\left[\left(\frac{z}{x}\right)^{\Delta}\right]^2.$$

2　主要结果

定理 1　设（H1）-（H3）成立，且 $\int_T^{\infty}q(s)\tau^{\gamma}(s)\Delta s = \infty$，$\int_a^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s = \infty$，$\int_a^{\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s = \infty$，$\int_b^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^{\infty}q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s = \infty$ 成立，若存在一个 Δ 可导的正函数 z，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\left[z(s)Q(s) - \frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{r^{\gamma}(s)(z^{\Delta}(s))^{\gamma+1}}{z^{\gamma}(s)A^{\gamma}(s)}\right]\Delta s = \infty$$

成立。这里 $Q(t) = q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma}$，$A(t) = \int_{t_*}^{t}\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}$，则方程（1）的解或振动或趋向于 0。

证明　假设方程（1）的解非振动，不失一般

性，我们假设 $\exists T \in [t_*, \infty), x(t) > 0 (t \geqslant T)$，则引理 1－3 成立。

定义 Riccati 变换

$$w(t) = \frac{z(t)a(t)((r(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta})^{\gamma}}{x^{\gamma}(t)} \qquad (t \geqslant T) \tag{3}$$

对上式求导可得

$$w^{\Delta} = z^{\Delta}\left(\frac{a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}}{x^{\gamma}}\right)^{\sigma} + z\left(\frac{a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}}{x^{\gamma}}\right)^{\Delta} =$$

$$\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}w^{\sigma} + z\left(\frac{(a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma})^{\Delta}x^{\gamma} - a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}(x^{\gamma})^{\Delta}}{x^{\gamma}(x\circ\sigma)^{\gamma}}\right) =$$

$$\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}w^{\sigma} + z\left(\frac{(a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma})^{\Delta}(x^{\sigma})^{\gamma} - a^{\sigma}(((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma})^{\gamma}(x^{\gamma})^{\Delta}}{x^{\gamma}(x\circ\sigma)^{\gamma}}\right)$$

由（1）及（H3）可得

$$w^{\Delta} \leqslant \frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}w^{\sigma} + z\frac{-q(x\circ\tau)^{\gamma}}{x^{\gamma}} - z\frac{a^{\sigma}(((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma})^{\gamma}(x^{\gamma})^{\Delta}}{x^{\gamma}(x\circ\sigma)^{\gamma}}$$

由（2）式，可得

$$w^{\Delta} \leqslant \frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - z\frac{a^{\sigma}(((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma})^{\gamma}(x^{\gamma})^{\Delta}}{x^{\gamma}(x\circ\sigma)^{\gamma}}$$

（i）当 $\gamma \geqslant 1$ 时，由引理 5 可得

$$w^{\Delta} \leqslant \left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - z\frac{(((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma})^{\gamma}}{(x^{\sigma})^{\gamma}}\frac{a^{\sigma}\gamma x^{\gamma-1}x^{\Delta}}{x^{\gamma}} =$$

$$\left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - \frac{(z^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(a^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma})^{\gamma+1}}{(x^{\sigma})^{\gamma+1}}\cdot \frac{za^{\sigma}\gamma x^{\Delta}x^{\sigma}}{(z^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(a^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}x((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma}} \leqslant$$

$$\left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - (w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\frac{z\gamma x^{\Delta}}{(z^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(a^{\sigma})^{\frac{1}{\gamma}}((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma}},$$

$$(\because x^{\Delta} > 0, \sigma(t) \geqslant t) \tag{4}$$

又因为 $\left(a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma}\right)^{\Delta} \leqslant 0, x^{\Delta}(t) > 0, \sigma(t) \geqslant t$，则有

$$(a(t)[(r(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta}]^{\gamma})^{\sigma} \leqslant a(t)\left[\left(r(t)x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta}\right]^{\gamma}$$

故

$$((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma} \leqslant \left(\frac{a}{a^{\sigma}}\right)^{\frac{1}{\gamma}}(rx^{\Delta})^{\Delta}, x^{\sigma} \geqslant x \tag{5}$$

$$w^{\Delta} \leqslant \left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - (w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\frac{z\gamma x^{\Delta}}{(z^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}a^{\frac{1}{\gamma}}(rx^{\Delta})^{\Delta}} \tag{6}$$

（ii）当 $0 < \gamma < 1$ 时，由引理 5 可得，

$$w^{\Delta} \leqslant \left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - z\frac{(((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma})^{\gamma}}{(x\circ\sigma)^{\gamma}}\frac{a^{\sigma}\gamma(x\circ\sigma)^{\gamma-1}x^{\Delta}}{x^{\gamma}} = \left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - (w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\frac{z\gamma x^{\Delta}(x\circ\sigma)^{\gamma}}{(z^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}(a^{\sigma})^{\frac{1}{\gamma}}x^{\gamma}((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\sigma}}$$

由（5）式，$x^{\Delta}(t) > 0$ 及 $\sigma(t) \geqslant t$ 可得

$$w^{\Delta} \leqslant \left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - (w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}z\frac{\gamma x^{\Delta}}{(z^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}a^{\frac{1}{\gamma}}(rx^{\Delta})^{\Delta}}$$

与（6）式相同。由引理 2 可得

$$w^{\Delta} \leqslant \left[\frac{z^{\Delta}}{z^{\sigma}}\right]w^{\sigma} - zq\left(\frac{\tau}{t}\right)^{\gamma} - (w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\frac{z\gamma}{(z^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}r}\int_{t_*}^{t}\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}$$

令 $Q(t) = q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma}, A(t) = \int_{t_*}^{t}\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}$，则有

$$w^{\Delta}(t) \leqslant \frac{z^{\Delta}(t)}{z^{\sigma}(t)}w^{\sigma}(t) - z(t)Q(t) - (w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\frac{z(t)\gamma}{r(t)(z(\sigma(t)))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}A(t)$$

令 $B = \frac{z^{\Delta}(t)}{z^{\sigma}(t)}, A = \frac{\gamma z(t)A(t)}{r(t)(z(\sigma(t)))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}, u = w^{\sigma}(t)$，由引理 4 可得

$$w^{\Delta} \leqslant -z(t)Q(t) + \frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{(z^{\Delta}(t))^{\gamma+1}r^{\gamma}(t)}{z^{\gamma}(t)A^{\gamma}(t)}$$

对上式从 T 到 $t(\geqslant T)$ 积分，可得

$$w(T) \geqslant \int_{T}^{t}z(s)Q(s) - \frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{r^{\gamma}(s)(z^{\Delta}(s))^{\gamma+1}}{z^{\gamma}(s)A^{\gamma}(s)}\Delta s \text{（矛盾）}$$

故结论成立。证毕。

下面，我们将给出一个推广的 Kamenev 型振动准则。

令 $D_0 = \{(t,s): t > s \geqslant t_0, t,s \in T\}, D = \{(t,s): t \geqslant s \geqslant t_0, t,s \in T\}$，$H(t,s) \in C_{rd}(D,\mathbf{R})$，$H$ 满足以下条件

(a) $H(t,t) = 0, (t \geqslant t_0); H(t,s) > 0, (t,s) \in D$;

(b) $H(t,s)$ 在 D_0 上对 s 有非正的连续的偏导数，即 $H_s^{\Delta}(t,s) \in C_{rd}(D,\mathbf{R}), H_s^{\Delta}(t,s) \leqslant 0$。

定理 2 设（H1）－（H3）成立，且 $\int_T^{\infty}q(s)\tau^{\gamma}(s)\Delta s = \infty$，$\int_a^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s = \infty$，$\int_a^{\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s = \infty$，$\int_b^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^{\infty}q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s = \infty$ 成立。若存在一个 Δ 可导的函数正 z 及满足条件（a），（b）的函数 $H(t,s)$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{H(t,s)Q(s)z(s) -$$

$$\frac{[H_s^{\Delta}(t,s)z(\sigma(s))+H(t,s)z^{\Delta}(s)]^{\gamma+1}r^{\gamma}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}A^{\gamma}(s)H^{\gamma}(t,s)(z(s))^{\gamma}}\Big\}\Delta s=\infty$$

成立。这里 $Q(t)=q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma}, A(t)=\int_{t_*}^{t}\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}$，则方程（1）的解或振动或趋向于 0。

证明　由定理 1 的证明可得

$$\int_T^t H(t,s)Q(s)z(s)\Delta s\leqslant$$
$$-\int_T^t H(t,s)w^{\Delta}(s)\Delta s+\int_T^t H(t,s)w^{\sigma}\frac{z^{\Delta}(t)}{z^{\sigma}(t)}\Delta s-$$
$$\int_T^t H(t,s)\frac{\gamma z}{r(s)(z(\sigma(s)))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}A(s)(w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s$$

由分部积分公式可得，

$$-\int_T^t H(t,s)w^{\Delta}(s)\Delta s=$$
$$-H(t,s)w(s)\big|_T^t+\int_T^t H_s^{\Delta}(t,s)w^{\sigma}(s)\Delta s=$$
$$H(t,T)w(T)+\int_T^t H_s^{\Delta}(t,s)w^{\sigma}(s)\Delta s$$

故

$$\int_T^t H(t,s)Q(s)z(s)\Delta s\leqslant H(t,T)w(T)+$$
$$\int_T^t\left[H_s^{\Delta}(t,s)+H(t,s)\frac{z^{\Delta}(t)}{z^{\sigma}(t)}\right]w^{\sigma}(s)\Delta s-$$
$$\int_T^t\frac{\gamma A(s)z(s)H(t,s)}{r(s)(z(\sigma(s)))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}(w^{\sigma})^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\Delta s$$

令 $B=H_s^{\Delta}(t,s)+H(t,s)\frac{z^{\Delta}(t)}{z^{\sigma}(t)}, A=\frac{\gamma A(s)z(s)H(t,s)}{r(s)(z(\sigma(s)))^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}}$，$u=w^{\sigma}(s)$，由引理 5 可得

$$\int_T^t H(t,s)Q(s)z(s)\Delta s\leqslant H(t,T)w(T)+$$
$$\int_T^t\frac{\left[H_s^{\Delta}(t,s)+H(t,s)\frac{z^{\Delta}(s)}{z^{\sigma}(s)}\right]^{\gamma+1}(z(\sigma(s)))^{\gamma+1}r^{\gamma}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}A^{\gamma}(s)H^{\gamma}(t,s)(z(s))^{\gamma}}\Delta s$$

故

$$\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{H(t,s)Q(s)z(s)-$$
$$\frac{[H_s^{\Delta}(t,s)z(\sigma(s))+H(t,s)z^{\Delta}(s)]^{\gamma+1}r^{\gamma}(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}A^{\gamma}(s)H^{\gamma}(t,s)(z(s))^{\gamma}}\}\Delta s\leqslant w(T)$$

可知与条件矛盾，故方程的解振动．证毕。

定理 3　设（H1）–（H3）成立，且 $\int_T^{\infty}q(s)\tau^{\gamma}(s)\Delta s=\infty, \int_a^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty, \int_a^{\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty, \int_b^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^{\infty}q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s=\infty$ 成立，若存在一个 Δ 可导的正函数 z，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\left[z^{\sigma}(s)q(s)\frac{\tau^{\gamma}(s)}{s^{\gamma}}-\frac{z^{\Delta}(s)}{A_1^{\gamma}(s)}\right]\Delta s=\infty$$

成立。这里 $A_1(t)=\int_{t_*}^{t}\frac{1}{r(s)}\Delta s\int_{t_*}^{s}\frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}$，则方程（1）的解振动或趋于 0。

证明　假设方程（1）的解非振动，不失一般性，我们假设 $\exists T\in[t_*,\infty), x(t)>0(t\geqslant T)$，则引理 1–3 成立。

定义 Riccati 变换如（3）式，则可得

$$w^{\Delta}=\left[za((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}\cdot\frac{1}{x^{\gamma}}\right]^{\Delta}=$$
$$[za((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}]^{\Delta}\frac{1}{x^{\gamma}}+[za((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}\left[\frac{1}{x^{\gamma}}\right]^{\Delta}=$$
$$[z^{\Delta}a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}+z^{\sigma}\cdot(a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma})^{\Delta}]\frac{1}{x^{\gamma}}+$$
$$[z\cdot r(x^{\Delta})^{\gamma}]^{\sigma}\left[\frac{1}{x^{\gamma}}\right]^{\Delta}$$

因为 $\left[\frac{1}{x^{\gamma}}\right]^{\Delta}=-\frac{(x^{\gamma})^{\Delta}}{x^{\gamma}\cdot(x^{\gamma})^{\sigma}}\leqslant 0$，且引理 1–3 成立，故

$$w^{\Delta}\leqslant\frac{z^{\Delta}a((rx^{\Delta})^{\Delta})^{\gamma}}{x^{\gamma}}-\frac{z^{\sigma}q(x\circ\tau)^{\gamma}}{x^{\gamma}}\leqslant$$
$$\frac{z^{\Delta}}{\left(\int_{t_*}^{t}\frac{1}{r(s)}\Delta s\int_{t_*}^{s}\frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\right)^{\gamma}}-z^{\sigma}q\frac{\tau^{\gamma}}{t^{\gamma}}=$$
$$\frac{z^{\Delta}}{A_1^{\gamma}(t)}-z^{\sigma}q\frac{\tau^{\gamma}}{t^{\gamma}}$$

其中 $A_1(t)=\int_{t_*}^{t}\frac{1}{r(s)}\Delta s\int_{t_*}^{s}\frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}$。对 w^{Δ} 从 T 到 $t(\geqslant T)$ 积分，可得

$$w(T)\geqslant\int_T^t\left[z^{\sigma}(s)q(s)\frac{\tau^{\gamma}(s)}{s^{\gamma}}-\frac{z^{\Delta}(s)}{A_1^{\gamma}(s)}\right]\Delta s$$

可知与条件矛盾，故结论成立．证毕。

下面将给出 $\gamma\geqslant 1$ 时的相应结论。

定理 4　设（H1）–（H3）成立 $\gamma\geqslant 1$，且 $\int_T^{\infty}q(s)\tau^{\gamma}(s)\Delta s=\infty, \int_a^{\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty, \int_a^{\infty}\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty, \int_b^{\infty}\frac{1}{r(s)}\int_s^{\infty}\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^{\infty}q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s=\infty$ 成立，若存在一个 Δ 可导的正函数 z，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\left[z(s)Q(s)-\frac{(z^{\Delta}(s))^2r(s)}{4z(s)\gamma(A_1(s))^{\gamma-1}A(s)}\right]\Delta s=\infty$$

成立。这里 $Q(t)=q(t)\left(\frac{\tau(t)}{t}\right)^{\gamma}, A(t)=\int_{t_*}^{t}\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}$，$A_1(t)=\int_{t_*}^{t}\frac{1}{r(s)}\Delta s\int_{t_*}^{s}\frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}$ 则方程（1）的解或振

动或趋向于0。

证明 假设方程（1）的解非振动，不失一般性，我们假设 $\exists T\in[t_*,\infty),x(t)>0(t\geqslant T)$，则引理1-3成立。

定义 Riccati 变换如（3）式，由（4）-（6）式可得

$$w^\Delta\leqslant\frac{z^\Delta}{z^\sigma}w^\sigma-zQ-\left(\frac{a^\sigma(z\circ\sigma)([(rx^\Delta)^\Delta]^\sigma)^\gamma}{(x\circ\sigma)^\gamma}\right)^2\cdot\frac{z\gamma x^{\gamma-1}x^\Delta(x\circ\sigma)^\gamma}{(z\circ\sigma)^2x^\gamma(a)^\sigma([(rx^\Delta)^\Delta]^\sigma)^\gamma}\leqslant$$

$$\frac{z^\Delta}{z^\sigma}w^\sigma-zQ-(w^\sigma)^2\frac{z\gamma}{(z\circ\sigma)^2a^\sigma}\frac{x^{\gamma-1}x^\Delta}{\left(\frac{a}{a^\sigma}\right)[(rx^\Delta)^\Delta]^\gamma}\leqslant$$

$$\frac{z^\Delta}{z^\sigma}w^\sigma-zQ-(w^\sigma)^2\frac{z\gamma}{(z\circ\sigma)^2a}\left(\frac{x}{(rx^\Delta)^\Delta}\right)^{\gamma-1}\frac{x^\Delta}{(rx^\Delta)^\Delta}$$

由引理2可得

$$w^\Delta\leqslant\frac{z^\Delta}{z^\sigma}w^\sigma-zQ-(w^\sigma)^2\frac{z\gamma}{(z\circ\sigma)^2a}\cdot\left(a^{\frac{1}{\gamma}}\int_{t_*}^t\frac{1}{r(s)}\int_{t_*}^s\frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\Delta s\right)^{\gamma-1}\frac{1}{r}a^{\frac{1}{\gamma}}\int_{t_*}^t\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}=$$

$$\frac{z^\Delta(t)}{z^\sigma(t)}w^\sigma-zQ-(w^\sigma)^2\frac{z\gamma}{(z\circ\sigma)^2}(A_1(t))^{\gamma-1}\frac{1}{r}A(t)$$

配方得

$$w^\Delta\leqslant-zQ-\Big[\frac{z\gamma(A_1(t))^{\gamma-1}A(t)}{(z\circ\sigma)^2r(t)}(w^\sigma)^2-\frac{z^\Delta(t)}{z^\sigma(t)}w^\sigma+\frac{(z^\Delta(t))^2r(t)}{4z\gamma(A_1(t))^{\gamma-1}A(t)}\Big]+\frac{(z^\Delta(t))^2r(t)}{4z\gamma(A_1(t))^{\gamma-1}A(t)}\leqslant-zQ+\frac{(z^\Delta(t))^2r(t)}{4z\gamma(A_1(t))^{\gamma-1}A(t)}$$

对上式从 T 到 $t(\geqslant T)$ 积分，可得

$$w(T)\geqslant\int_T^t\Big[z(s)Q(s)-\frac{(z^\Delta(s))^2r(s)}{4z(s)\gamma(A_1(s))^{\gamma-1}A(s)}\Big]\Delta s$$

与条件矛盾，结论成立。证毕。

下面我们给出定理4对应的 Kamenev 型振动准则。

定理5 设（H1）-（H3）成立 $\gamma\geqslant1$，且 $\int_T^\infty q(s)\tau^\gamma(s)\Delta s=\infty$，$\int_a^\infty\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty$，$\int_a^\infty\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty$，$\int_b^\infty\frac{1}{r(s)}\int_s^\infty\left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^\infty q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s=\infty$ 成立，若存在一个 Δ 可导的正函数 z 及满足条件（a），（b）的函数 $H(t,s)$，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{H(t,s)Q(s)z(s)-\frac{[H_s^\Delta(t,s)z(\sigma(s))+H(t,s)z^\Delta(s)]^2r(s)}{4z\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s)}\}\Delta s=\infty$$

成立。这里 $Q(t)=q(t)(\frac{\tau}{t})^\gamma,A(t)=\int_{t_*}^t\frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}$，$A_1(t)=\int_{t_*}^t\frac{1}{r(s)}\int_{t_*}^s\frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\Delta s$，则方程（1）的解或振动或趋向于0。

证明 假设方程（1）的解非振动，不失一般性，我们假设 $\exists T\in[0,\infty)$，$x(t)>0(t\geqslant T)$，则引理1-3成立。由定理4证明可得

$$\int_T^tH(t,s)zQ(t)\Delta s\leqslant-\int_T^tH(t,s)w^\Delta(s)\Delta s+\int_T^tH(t,s)\frac{z^\Delta}{z^\sigma}w^\sigma(s)\Delta s-\int_T^t\frac{z(s)\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s)}{r(s)(z(\sigma(s)))^2}(w^\sigma(s))^2\Delta s$$

由分部积分公式可得

$$-\int_T^tH(t,s)w^\Delta(s)\Delta s=-H(t,s)w(s)|_T^t+\int_T^tH_s^\Delta(t,s)w^\sigma(s)\Delta s=H(t,T)w(T)+\int_T^tH_s^\Delta(t,s)w^\sigma(s)\Delta s$$

故

$$\int_T^tH(t,s)Q(s)z(s)\Delta s\leqslant H(t,T)w(T)-\int_T^t\Big\{\frac{z\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s)}{r(s)(z\circ\sigma)^2}(w^\sigma)^2-\Big[H_s^\Delta(t,s)+H(t,s)\frac{z^\Delta}{z^\sigma}\Big]w^\sigma(s)\Big\}\Delta s\leqslant$$

$$H(t,T)w(T)-\int_T^t\Big\{\left(\frac{z\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s)}{r(s)(z\circ\sigma)^2}\right)^{\frac{1}{2}}w^\sigma-\frac{r^{\frac{1}{2}}(s)[H_s^\Delta(t,s)(z\circ\sigma)+H(t,s)(z)^\Delta]}{2(z\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s))^{\frac{1}{2}}}\Big\}^2\Delta s+\int_T^t\frac{r(s)[H_s^\Delta(t,s)(z\circ\sigma)+H(t,s)z^\Delta(s)]^2}{4z\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s)}\Delta s\leqslant$$

$$H(t,T)w(T)+\int_T^t\frac{r(s)[H_s^\Delta(t,s)(z\circ\sigma)+H(t,s)z^\Delta(s)]^2}{4z\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s)}\Delta s$$

对上式从 T 到 $t(\geqslant T)$ 积分，可得

$$w(T)\geqslant\frac{1}{H(t,T)}\int_T^t\{H(t,s)Q(s)z(s)-\frac{r(s)[H_s^\Delta(t,s)z(\sigma(s))+H(t,s)z^\Delta(s)]^2}{4z(s)\gamma A(s)A_1^{\gamma-1}(s)H(t,s)}\}\Delta s(\text{矛盾})$$

故结论成立。证毕。

定理6 设（H1）-（H3）成立 $\gamma\geqslant1$，且 $\int_T^\infty q(s)\tau^\gamma(s)\Delta s=\infty$，$\int_a^\infty\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s=\infty$，$\int_a^\infty\frac{1}{r^{\frac{1}{\gamma}}(s)}\Delta s$

$= \infty, \int_b^\infty \frac{1}{r(s)}\int_s^\infty \left(\frac{1}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\left(\int_u^\infty q(v)\Delta v\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\Delta u\Delta s = \infty$ 成立，若存在一个 Δ 可导的正函数 z，使得

$$\limsup_{t\to\infty}\int_T^t\left[q(s)Q(s) - \frac{(z^\Delta(s))^2 r(s)}{\gamma(A_1(s))^{\gamma-1}A(s)}\right]\Delta s = \infty$$

成立，其中 $Q_1(t) = \frac{\tau^\gamma(t)}{t^\gamma}(z^2(t))^\sigma, A(t) = \int_{t_*}^t \frac{\Delta s}{a^{\frac{1}{\gamma}}(s)}, A_1(t) = \int_{t_*}^t \frac{1}{r(s)}\int_{t_*}^s \frac{\Delta u}{a^{\frac{1}{\gamma}}(u)}\Delta s$ 则方程（1）的解振动或趋于 0。

证明　假设方程（1）的解非振动，不失一般性，我们假设 $\exists T \in [t_*, \infty), x(t) > 0 (t \geqslant T)$，则引理 1－3 成立。

定义 Riccati 变换

$$w(t) = \frac{z^2(t)a(t)((r(t)x^\Delta(t))^\Delta)^\gamma}{x^\gamma(t)}$$

对上式求导得

$$w^\Delta = [a((rx^\Delta)^\Delta)^\gamma]^\Delta\left[\frac{z^2}{x^\gamma}\right]^\sigma + a((rx^\Delta)^\Delta)^\gamma\left[\frac{z^2}{x^\gamma}\right]^\Delta \leqslant$$

$$-q(x\circ\tau)^\gamma\left[\frac{z^2}{x^\gamma}\right]^\sigma + \frac{a((rx^\Delta)^\Delta)^\gamma}{(x^\gamma)^\Delta}\cdot(x^\gamma)^\Delta\cdot\left[\frac{z^2}{x^\gamma}\right]^\Delta =$$

$$-q\frac{(x\circ\tau)^\gamma}{(x\circ\sigma)^\gamma}(z^2)^\sigma + \frac{a((rx^\Delta)^\Delta)^\gamma}{((x)^\gamma)^\Delta}\cdot$$

$$\left[(z^\Delta)^2 - (x)^\gamma((x)^\sigma)^\gamma\left(\left(\frac{z}{x}\right)^\Delta\right)^2\right]$$

由引理 3 及引理 5－6 可得

$$w^\Delta \leqslant -q\frac{(x\circ\tau)^\gamma}{(x)^\gamma}(z^2)^\sigma + \frac{a((rx^\Delta)^\Delta)^\gamma}{(x^\gamma)^\Delta}(z^\Delta)^2 \leqslant$$

$$-q\frac{\tau^\gamma}{t^\gamma}(z^2)^\sigma + \frac{a((rx^\Delta)^\Delta)^\gamma}{\gamma x^{\gamma-1}x^\Delta}(z^\Delta)^2 =$$

$$-q\frac{\tau^\gamma}{t^\gamma}(z^2)^\sigma + \frac{a}{\gamma}\frac{((rx^\Delta)^\Delta)^{\gamma-1}}{x^{\gamma-1}}\frac{(rx^\Delta)^\Delta}{x^\Delta}(z^\Delta)^2$$

又由引理 2 可得

$$w^\Delta \leqslant -q\frac{\tau^\gamma}{t^\gamma}(z^2)^\sigma + \frac{(z^\Delta)^2 r(t)}{\gamma(A_1(t))^{\gamma-1}A(t)}$$

令 $Q_1(t) = \frac{\tau^\gamma(t)}{t^\gamma}(z^2(t))^\sigma$，因此

$$w^\Delta \leqslant -qQ_1 + \frac{(z^\Delta)^2 r(t)}{\gamma(A_1(t))^{\gamma-1}A(t)}$$

对上式从 T 到 $t(\geqslant T)$ 积分，可得

$$w(T) \geqslant \int_T^t\left[q(s)Q_1(s) - \frac{(z^\Delta(s))^2 r(s)}{\gamma(A_1(s))^{\gamma-1}A(s)}\right]\Delta s$$

可知与条件矛盾，故结论成立。证毕。

3　例　子

例 1　考虑方程

$$(t^\gamma(x^{\Delta\Delta}(t))^\gamma)^\Delta + \frac{1}{t^2}\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^\gamma x^\gamma(\tau(t)) = 0,$$

$$t \in [1, +\infty) \qquad (7)$$

取 $q(t) = \frac{1}{t^2}\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^\gamma$，$z(t) = 1$，且 $a(t) = t^\gamma$，$r(t) = 1$，根据定理 1 得

$$\int_1^t\left(z(s)Q(s) - \frac{1}{(\gamma+1)^{\gamma+1}}\frac{(z^\Delta(s))^{\gamma+1}r^\gamma(s)}{(z)^\gamma A^\gamma(s)}\right)\Delta s =$$

$$\int_1^s\left[\frac{1}{s}\left(\frac{s}{\tau(s)}\right)^\gamma\cdot\left(\frac{\tau(s)}{s}\right)^\gamma\right]\Delta s = \int_1^t\frac{1}{s}\Delta s \to \infty$$

故方程（7）的解或振动或趋向于 0。

例 2　考虑方程

$$((x^{\Delta\Delta}(t))^\gamma)^\Delta + \frac{1}{t}\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^\gamma x^\gamma(\tau(t)) = 0,$$

$$t \in [1, +\infty) \qquad (8)$$

取 $q(t) = \frac{1}{t}\left(\frac{t}{\tau(t)}\right)^\gamma$，$z(t) = 1$，根据定理 3 得

$$\int_1^t\left[z^\sigma(s)q(s)\frac{\tau^\gamma(s)}{s^\gamma} - \frac{z^\Delta(s)}{A_1^\gamma(s)}\right]\Delta s =$$

$$\int_1^t\left[\frac{1}{s}\left(\frac{s}{\tau(s)}\right)^\gamma\frac{\tau^\gamma(s)}{s^\gamma}\right]\Delta s = \int_1^t\frac{1}{s}\Delta s \to \infty$$

故方程（8）的解或振动或趋向于 0。

参考文献：

[1] HASSAN T S. Oscillation of third order nonlinear delay dynamic equations on time scales [J]. Math Comput Model, 2009, 49:1573－1586.

[2] ERBE L, HASSAN T S, PETERSON A. Oscillation of third order nonlinear functional dynamic equations on time scales [J]. Differential Equations Dynamical Systems, 2010, 18:199－227.

[3] ZHANG S Y, WANG Q R. Oscillation of second-order nonlinear neutral dynamic equations on time scales [J]. Appl Math Comput, 2010, 216: 2837－2848.

[4] AKIN-BOHNER E, BOHNER M, SAKER S H. Oscillation criteria for a certain class of second order Emden-Fowler dynamic equations [J]. Electronic Transactions on Numerical Analysis, 2010, 27: 1－12.

[5] BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales [M]. Birkhäuser, Boston, 2001.

[6] SAKER S H, AGARWAL R P, O'REGAN D. Oscillation results for second-order nonlinear neutral delay dynamic equations on time scales[J]. Applicable Analysis, 2007,86:1－17.

[7] WANG Q R. Oscillation criteria for nonlinear second order damped differential equations [J]. Acta Math Hungar, 2004, 102: 117－139.

（下转第 60 页）

参考文献：

[1] KHAN Z R, ZULFEQUAR M, KHAN M S. Chemical synthesis of CdS nanoparticles and their optical and dielectric studies [J]. J Mater Sci, 2011, 46(16):5412 - 5416.

[2] BHATTACHARYA R, DAS T K, SAHA S. Synthesis and characterization of CdS nanoparticles[J]. J Mater Sci: Mater Electron, 2011, 22(12):1761 - 1765.

[3] ZHANG Y J, ZHANG L, LI S. Synthesis of Al-substituted mesoporous silica coupled with CdS nanoparticles for photocatalytic generation of hydrogen[J]. International Journal of Hydrogen Energy, 2010, 35(2): 438 - 444.

[4] WANG M L, WANG C H, WANG W. Synthesis of CdS nanocomposites using macroporous ion-exchange resins [J]. Materials Chemistry and Physics, 2007, 104: 162 - 165.

[5] PENG T Y, ZENG P, KE D D, et al. Hydrothermal preparation of multiwalled carbon nanotubes (MWCNTs)/CdS nanocomposite and its efficient photocatalytic hydrogen production under visible light irradiation[J]. Energy Fuels, 2011, 25 (5) : 2203 - 2210.

[6] RYU S Y, BALCERSKI W, LEE T K, et al. Photocatalytic production of hydrogen from water with visible light using hybrid catalysts of CdS attached to microporous and mesoporous silicas[J]. Journal of Physical Chemistry: C, 2007, 111(49): 18195 - 18203.

[7] BAI X F, CAO Y, WU W. Confined formation of CdS nanoparticles within the pore of Al-MCM-41 molecular sieve [J]. Journal of Synthetic Crystals, 2010, 39(Suppl): 203 - 207, 211.

[8] WANG N, SHAO Y, SHI Z, et al. Influence of MCM-41 particle on mechanical and morphological behavior of polypropylene[J]. Mater Sci Eng: A, 2008, 497: 363 - 368.

[9] OZMIHCIFIHCI F, BALKOSE D, ULKU S. Natural zeolite polypropylene composite film preparation and characterization [J]. Journal of Applied Polymer Science, 2001, 82: 2913 - 2921.

[10] SILVESTRE-ALBERO J, SEPULVEDA-ESCRIBANO A, RODRIGUEZ REINOSO F. Preparation and characterization of zinc containing MCM-41 spheres [J]. Microporous and Mesoporous Materials, 2008, 113: 362 - 369.

[11] BOUVY C, MARINE W, SPORKEN R, et al. Photoluminescence properties and quantum size effect of ZnO nanoparticles confined inside a faujasite X zeolite matrix [J]. Chemical Physics Letters, 2006, 428: 312 - 316.

[12] KHAN E A, HU E, LAI Z P. Preparation of metal oxide/zeolite core - shell nanostructures[J]. Microporous and Mesoporous Materials, 2009, 118: 210 - 217.

（上接第 55 页）

[8] WANG Q R. Interval criteria for oscillation of certain second order nonlinear differential equations [J]. Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems, Series A: Math Anal, 2005, 12: 769 - 781.

[9] WU H W, ZHUANG R K, MATHSEN R M. Oscillation criteria for second-order nonlinear neutral variable delay dynamic equations [J]. Appl Math Comput, 2006, 173: 321 - 331.

[10] YU Z H, WANG Q R. Asymptotic behavior of solutions of third-order nonlinear dynamic equations on time scales [J]. J Comput Appl Math, 2009, 225 (2): 531 - 540.