斜 π－Armendariz 环*

普昭年
（河西学院数学与统计学院，甘肃 张掖 734000）

摘　要：对于环 R 的自同态 α，引入了 $\alpha-\pi-$Armendariz 环这一概念，给出了例子，并对这一类环的扩张进行了研究。

关键词：$\alpha-\pi-$Armendariz 环；斜多项式环；幂零元
中图分类号：O153.3　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2012）03－0039－05

On Skew π－Armendariz Rings

PU Zhaonian
（School of Mathematics and Statistics, Hexi University, Zhangye 734000, China）

Abstract: The notion of $\alpha-\pi-$Armendariz rings is introduced for a ring endomorphism α. The examples of $\alpha-\pi-$Armendariz rings are given, and the extensions of this class of rings are investigated.

Key words: $\alpha-\pi-$Armendariz rings; shew polynomial ring; nilpotent elements

根据文献［1］，称环 R 是 Armendariz 环，是指对任意 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x]$，如果 $f(x)g(x)=0$，那么对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，有 $a_ib_j=0$ 成立。由于 Armendariz 在文献［2，引理 1］首次发现 reduced 环（没有非零幂零元的环）满足上面这一特性，所以人们称这类环为 Armendariz 环。许多文献对 Armendariz 环进行了深入的研究，基本的结论参见文献［1－6］。

作为 Armendariz 环的推广，在文献［7］中，作者引入了 $\pi-$Armendariz 环。称环 R 是 $\pi-$Armendariz 环，是指对任意 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x]$，如果 $f(x)g(x)\in \mathrm{nil}(R[x])$，那么对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，有 $a_ib_j\in \mathrm{nil}(R)$ 成立，其中 $\mathrm{nil}(R)$ 是 R 中的幂零元做成的集合。关于 $\pi-$Armendariz 环的相关结论，参见文献［7－8］。

设 α 是环 R 的自同态。R 上的斜多项式环 $R[x;\alpha]$ 是对 R 上的多项式环定义新的乘法运算：对任意 $r\in R$，$xr=\alpha(r)x$。许多学者在斜多项式环中研究了环的 Armendariz 性质。对于环 R 的自同态，Hong 等在文献［9］中引入了 $\alpha-$斜 Armendariz 环。称 R 是 $\alpha-$斜 Armendariz 环，是指对任意 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$，如果 $f(x)g(x)=0$，则对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，有 $a_i\alpha^i(b_j)=0$ 成立。在文献［10］，作者又引入了 $\alpha-$Armendariz 环。称环 R 是 $\alpha-$Armendariz 环是指对任意 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$，如果 $f(x)g(x)=0$，那么对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，有 $a_ib_j=0$ 成立。$\alpha-$Armendariz 环是 $\alpha-$斜 Armendariz 环，但反之并不成立。关于 $\alpha-$斜 Armendariz 环和 $\alpha-$Armendariz 环的更多结论，参见文献［9－11］。

受以上研究成果的启发，对于环 R 的自同态 α，我们在本文中引入了 $\alpha-\pi-$Armendariz 环这一概念。取代多项式环 $R[x]$，我们在斜多项式环中讨论了环的 $\pi-$Armendariz 的性质。$\alpha-$Armendariz

* **收稿日期**：2011－09－29
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10901133）
作者简介：普昭年（1964 年生），男，副教授；E-mail：puzhaonian@163.com

环和 α－诣零 Armendariz 环是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。但有例子表明反之并不成立。因此，$\alpha-\pi-$Armendariz 环是 $\alpha-$Armendariz 环和 $\alpha-$诣零 Armendariz 环的推广。本文讨论了 $\alpha-\pi-$Armendariz 环的基本性质，证明了环 R 是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环当且仅当 R 上的 n 阶上三角矩阵环是 $\hat{\alpha}-\pi-$Armendariz环。此外，我们还讨论了 $\alpha-\pi-$Armendariz 环的多项式扩张问题。一些已知的关于 $\pi-$Armendariz 环的结论都可以作为我们结果的推论。

贯穿全文，所有的环都是有单位元的结合环。对于环 R，我们用 $\mathrm{nil}(R)$ 表示 R 中所有幂零元做成的集合，$\mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$ 表示 $R[x;\alpha]$ 中系数是幂零元的所有多项式做成的集合。对于环 R 的自同态 α，我们认为满足条件 $\alpha(1)=1$。

1 $\alpha-\pi-$Armendariz 环

定义 1 设 α 是环 R 的自同态。称环 R 是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环，是指对任意 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$，如果 $f(x)g(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$，那么对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，有 $a_ib_j\in \mathrm{nil}(R)$ 成立。

显然，R 是 $\pi-$Armendariz 环当且仅当 R 是 $I_R-\pi-$Armendariz 环，其中 I_R 是环 R 的恒等自同态。设 S 是 R 的子环，且满足条件 $\alpha(S)\subseteq S$。如果 R 是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环，那么 S 也是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。下面的例子说明，存在 $\pi-$Armendariz 环 R 的一个自同态 α，使得 R 不是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

例 1 设 $R=Z_2\oplus Z_2$，其中 Z_2 是整数环模 2 的剩余类环。则 R 是交换的 reduced 环。由文献［7，引理 1.1］可知，R 是 $\pi-$Armendariz 环。α：$R\to R$，$\alpha((a,b))=(b,a)$ 是 R 的自同态。取 $f(x)=(1,0)+(1,0)x$，$g(x)=(0,1)+(1,0)x\in R[x;\alpha]$，显然 $f(x)g(x)=0\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$。但是 $(1,0)(1,0)\notin \mathrm{nil}(R)$。所以 R 不是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

下面我们给出一些 $\alpha-\pi-$Armendariz 环的例子。设 α 是环 R 的自同态。如果对任意 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$，满足 $f(x)g(x)=0$，那么对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，有 $a_ib_j=0$ 成立，则称 R 是 $\alpha-$Armendariz 环。

命题 1 （i）设 R 是 $\alpha-$Armendariz 环，$n\geqslant 2$。如果 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in R[x;\alpha]$ 并且 $f_1f_2\cdots f_n=0$，则 $a_1a_2\cdots a_n=0$，其中 a_i 是 f_i 的任意系数，$i=1,2,\cdots,n$。

（ii）$\alpha-$Armendariz 环是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

证明 （i）是文献［10，引理 3.5］中的结论。由（i）知，（ii）显然。

下面的例子说明 $\alpha-\pi-$Armendariz 环不一定是 $\alpha-$Armendariz 环。

例 2 设 R 是刚性环，

$$S_4=\left\{\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ 0 & a & a_{23} & a_{24}\\ 0 & 0 & a & a_{34}\\ 0 & 0 & 0 & a\end{pmatrix}\middle|\, a,\ a_{ij}\in R\right\}$$

由文献［10，命题 1.7］可知，R 是 $\alpha-$Armendariz 环。根据命题 1 和定理 2，我们得到 S_4 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。取 $p=e_{12}+(e_{12}-e_{13})x$，$q=e_{34}+(e_{24}+e_{34})x\in S_4[x;\alpha]$，其中 e_{ij} 是 S_4 中的矩阵单位。显然 $pq=0$，但是 $(e_{12}-e_{13})e_{34}\neq 0$。所以 S_4 不是 $\bar{\alpha}-$Armendariz 环。

设 α 是环 R 的自同态。称环 R 是 $\alpha-$诣零 Armendariz 环，是指对任意 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$，如果 $f(x)g(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$，那么对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，有 $a_ib_j\in \mathrm{nil}(R)$ 成立。

命题 2 （i）设 R 是 $\alpha-$诣零 Armendariz 环，$n\geqslant 2$。如果对任意 $f_1,f_2,\cdots,f_n\in R[x;\alpha]$，满足 $f_1f_2\cdots f_n\in \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$，那么 $a_1a_2\cdots a_n\in \mathrm{nil}(R)$，其中 a_i 是 f_i 的任意系数，$i=1,2,\cdots,n$。

（ii）如果 R 是 $\alpha-$诣零 Armendariz 环，那么 $\mathrm{nil}(R[x;\alpha])\subseteq \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$。

（iii）$\alpha-$诣零 Armendariz 环是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

证明 （i）由于 $f_1(f_2\cdots f_n)\in \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$，所以对 $f_2\cdots f_n$ 的任意系数 b，有 $a_1b\in \mathrm{nil}(R)$，从而 $a_1f_2\cdots f_n\in \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$。由于 $(a_1f_2)(f_3\cdots f_n)\in \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$，而 a_1a_2 是 a_1f_2 的系数，因此对 $f_3\cdots f_n$ 的任意系数 c，有 $a_1a_2c\in \mathrm{nil}(R)$。所以 $a_1a_2f_3\cdots f_n\in \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$ 继续上述过程，我们得到 $a_1a_2\cdots a_n\in \mathrm{nil}(R)$。

（ii）对于任意 $f(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$，存在正整数 n，使得 $f(x)^n=0$。由于 R 是 $\alpha-$诣零 Armendariz 环，由（i）可知 $a_1a_2\cdots a_n\in \mathrm{nil}(R)$，其中 a_i 是 $f(x)$ 的任意系数，$i=1,2,\cdots,n$。特别地，对 $f(x)$ 的任意系数 a，有 $a^n\in \mathrm{nil}(R)$。因此 $a\in \mathrm{nil}(R)$，$f(x)\in \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$。

根据(i)和(ii)，则(iii)显然。

设 α 是环 R 的自同态。根据文献［12］，如果对任意 a，$b\in R$，$ab=0\Leftrightarrow a\alpha(b)=0$ 成立，则称环 R 是 α－相容的。显然，如果 R 是 α－相容的，那么 α 是单同态。

引理 1　设 α 是环 R 的自同态。如果 R 是 α－相容的，那么以下各条成立：

(i) 对任意 a，$b\in R$，如果 $ab\in \mathrm{nil}(R)$，那么对任意正整数 n，有 $a\alpha^n(b)\in \mathrm{nil}(R)$。

(ii) 如果存在正整数 n 使得 $a\alpha^n(b)\in \mathrm{nil}(R)$，那么 $ab\in \mathrm{nil}(R)$。

(iii) 对任意 a_1，a_2，a_3，$\cdots a_n\in R$，如果 $a_1a_2a_3\cdots a_n=0$，那么对任意正整数 i_1，i_2，i_3，$\cdots$，i_{n-1}，有 $a_1\alpha^{i_1}(a_2)\alpha^{i_1+i_2}(a_3)\alpha^{i_1+i_2+i_3}(a_4)\cdots\alpha^{i_1+i_2+i_3+\cdots+i_{n-1}}(a_n)=0$。

证明　(i) 设 $ab\in \mathrm{nil}(R)$，只需证明 $a\alpha(b)\in \mathrm{nil}(R)$ 即可。设 $(ab)^k=0$，其中 $k\in \mathbf{N}$。则 $a\alpha(b)\alpha(ab\cdots ab)=a\alpha(bab\cdots ab)=0$。由于 R 是 α－相容的，所以 $a\alpha(b)ab\cdots ab=0$。从而 $a\alpha(b)a\alpha(b)\alpha(ab\cdots ab)=a\alpha(b)a\alpha(b\cdots ab)=0$。继续上述过程，我们得到 $(a\alpha(b))^k=0$，所以 $a\alpha(b)\in \mathrm{nil}(R)$。

(ii) 如果 $a\alpha^n(b)\in \mathrm{nil}(R)$，那么 $\alpha^n(b)a\in \mathrm{nil}(R)$。根据(i)，我们得到 $\alpha^n(ba)=\alpha^n(b)\alpha^n(a)\in \mathrm{nil}(R)$。设 $[\alpha^n(ba)]^k=\alpha^n(ba\cdots ba)=0$，由于 α 是单同态，所以 $(ba)^k=0$。因此 $ba\in \mathrm{nil}(R)$，所以 $ab\in \mathrm{nil}(R)$。

(iii) 由于 R 是 α－相容的，并且 $a_1a_2a_3\cdots a_n=0$，这样我们得到 $a_1\alpha^{i_1}(a_2a_3\cdots a_n)=0$。注意到 $a_1\alpha^{i_1}(a_2)\alpha^{i_1}(a_3\cdots a_n)=a_1\alpha^{i_1}(a_2a_3\cdots a_n)=0$，所以

$$a_1\alpha^{i_1}(a_2)\alpha^{i_1+i_2}(a_3)\alpha^{i_1+i_2+i_3}(a_4\cdots a_n)=a_1\alpha^{i_1}(a_2)\alpha^{i_1+i_2}(a_3a_4\cdots a_n)=0$$

继续上述过程，我们得到

$$a_1\alpha^{i_1}(a_2)\alpha^{i_1+i_2}(a_3)\alpha^{i_1+i_2+i_3}(a_4)\cdots\alpha^{i_1+i_2+i_3+\cdots+i_{n-1}}(a_n)=0$$

设 R 是环。如果对任意 a，$b\in R$，$ab=0\Rightarrow aRb=0$，则称 R 是半交换环。在文献［5，引理 3.1］，作者证明了如果 R 是半交换环，那么 $\mathrm{nil}(R)$ 是 R 的理想。对任意 $f(x)\in R[x;\alpha]$，我们用 C_f 表示 $f(x)$ 的系数做成的集合。设 I 是环 R 的理想。如果 $\alpha(I)\subseteq I$，那么 $\bar{\alpha}$：$R/I\rightarrow R/I$，$\bar{\alpha}(a+I)=\alpha(a)+I$ 是商环 R/I 的自同态。

引理 2　设 R 是 α－相容半交换环，$f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_n(x)\in R[x;\alpha]$。如果 $C_{f_1f_2\cdots f_n}\subseteq \mathrm{nil}(R)$，那么 $C_{f_1}C_{f_2}\cdots C_{f_n}\subseteq \mathrm{nil}(R)$。

证明　由于 R 是半交换环，由文献［5，引理 3.1］可知，$\mathrm{nil}(R)$ 是 R 的理想。显然 $R/\mathrm{nil}(R)$，是 reduced 环。注意到 R 是 α－相容的，根据引理 1，在 $R/\mathrm{nil}(R)$ 中，$\bar{a}\bar{\alpha}(\bar{a})=0\Leftrightarrow\bar{a}=0$ 成立。所以 $R/\mathrm{nil}(R)$ 是 $\bar{\alpha}$－刚性环。根据文献［10，命题 1.7］可知，$R/\mathrm{nil}(R)$ 是 $\bar{\alpha}$－Armendariz 环。对任意 $f(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$，记 $\overline{f(x)}=\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}x^i$。由于 $C_{f_1f_2\cdots f_n}\subseteq \mathrm{nil}(R)$，所以 $\overline{f_1}\,\overline{f_2}\cdots\overline{f_n}=0$。根据命题 2，我们得到 $C_{f_1}C_{f_2}\cdots C_{f_n}\subseteq \mathrm{nil}(R)$。

命题 3　设 R 是半交换环，$f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n\in R[x;\alpha]$。如果 R 是 α－相容的，那么 $f(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$ 当且仅当对任意 $0\leqslant i\leqslant n$，$a_i\in \mathrm{nil}(R)$。

证明　如果 $f(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$，根据引理 2，对任意 $0\leqslant i\leqslant n$，有 $a_i\in \mathrm{nil}(R)$。反之，如果对任意 $0\leqslant i\leqslant n$，有 $a_i\in \mathrm{nil}(R)$，则存在正整数 $k>1$ 使对任意 $i=0$，1，$\cdots$，n，都有 $a_i^k=0$。下证 $f(x)^{(n+1)k}=0$。

$f(x)^{(n+1)k}$ 的系数可以写成如下形式的一些项之和

$$a_{i1}\alpha^{i_1}(a_{i2})\alpha^{i_1+i_2}(a_{i3})\cdots\alpha^{i_1+i_2+i_3+\cdots+i_{(n+1)k-1}}(a_{i_{(n+1)k}})$$

其中 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_{(n+1)k}}\in\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$。我们来证明

$$a_{i1}\alpha^{i_1}(a_{i2})\alpha^{i_1+i_2}(a_{i3})\cdots\alpha^{i_1+i_2+i_3+\cdots+i_{(n+1)k-1}}(a_{i_{(n+1)k}})=0$$

由于 R 是 α－相容的，根据引理 1，我们只需证明 $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}=0$。

考虑 $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}$。一定存在 $a_{j0}\in\{a_0$，a_1，$\cdots$，$a_n\}$，使得 a_{j0} 在其中出现了至少 k 次。由于 R 是半交换环且 $a_{j0}^k=0$，所以 $a_{i_1}a_{i_2}a_{i_3}\cdots a_{i_{(n+1)k}}=0$。所以 $f(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$。

定理 1　如果 R 是 α－相容半交换环，则 R 是 α－π－Armendariz 环。

命题 4　设 α 是环 R 的自同态，I 是 R 的理想且 $\alpha(I)\subseteq I$。如果 $I\subseteq \mathrm{nil}(R)$，并且 R/I 是 $\bar{\alpha}$－π－Armendariz 环，则 R 是 α－π－Armendariz 环。

证明　设 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$，满足 $f(x)g(x)\in \mathrm{nil}(R[x;\alpha])$，则 $(\sum_{i=0}^{n}\overline{a_i}x^i)(\sum_{j=0}^{n}\overline{b_j}x^j)\in \mathrm{nil}((R/I)[x;\bar{\alpha}])$。由于 R/I 是 $\bar{\alpha}$－π－Armendariz 环，因此对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，存在正整数 n_{ij} 使得 $(\overline{a_ib_j})^{n_{ij}}=0$，所以 $a_ib_j\in \mathrm{nil}(R)$。因此 R 是 α－π－Armendariz 环。

设 $R_i(i\in I)$ 是一族环，α_i 是 R_i 的自同态。考虑 R_i 的直积 $\prod_{i\in I}R_i$ 和同态 $\bar{\alpha}$：$\prod_{i\in I}R_i\mapsto\prod_{i\in I}R_i$，

$\bar{\alpha}((a_i))=(\alpha_i(a_i))$。显然，如果指标集 I 是有限集，那么 $\prod_{i\in I}R_i$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环当且仅当每个 R_i 是 $\alpha_i-\pi-$Armendariz 环。

设 α 是环 R 的自同态，$M_n(R)$ 是 R 上的 $n\times n$ 全矩阵。显然，由 α 可以诱导出 $M_n(R)$ 的自同态 $\bar{\alpha}$：$(a_{ij})\mapsto(\alpha(a_{ij}))$。设 $T_n(R)$ 表示 R 上的 $n\times n$ 上三角矩阵环。同理，我们有由 α 诱导出的 $T_n(R)$ 的自同态 $\bar{\alpha}$。

设 R 是环。记

$$S_n=\left\{\left.\begin{pmatrix} a & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n}\\ 0 & a & a_{23} & \cdots & a_{2n}\\ 0 & 0 & a & \cdots & a_{3n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a\end{pmatrix}\right| a,\ a_{ij}\in R\right\},$$

$$R_n=\left\{\left.\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n\\ 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ 0 & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1\end{pmatrix}\right| a_i\in R(1\leqslant i\leqslant n)\right\}$$

按照通常的矩阵加法和乘法，S_n 和 R_n 分别构成 $M_n(R)$ 的子环。

定理2 设 α 是环 R 的自同态。以下各条件等价：

(i) R 是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环；

(ii) $T_n(R)$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环；

(iii) S_n 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环；

(iv) R_n 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。

证明 (i)⇒(ii) 设 $I=\{A\in T_n(R)\mid A$ 的主对角线上元素全为 $0\}$。显然，I 是 $T_n(R)$ 的理想且 $I\subseteq \mathrm{nil}(T_n(R))$。由于 $T_n(R)/I\cong R^n$，所以 $T_n(R)/I$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。根据命题4，$T_n(R)$ 是 $\bar{\alpha}-$诣零 Armendariz 环。

由于 $\alpha-\pi-$Armendariz 环的不变子环仍然是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环，所以(ii) ⇒ (iii) ⇒ (iv) ⇒ (i) 显然。

根据定理2，人们可能猜想如果 R 是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环，则 R 上的 $n\times n$ 全矩阵环 $M_n(R)$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环，其中 $n\geqslant 2$。下面的例子说明这个猜想是不成立的。

例3 设 R 是环，α 是 R 的自同态，$S=M_2(R)$。取 $f(x)=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}x$ 和 $g(x)=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\-1&-1\end{pmatrix}x\in S[x;\bar{\alpha}]$。显然，$f(x)g(x)=0\in \mathrm{nil}(S[x;\bar{\alpha}])$。但是 $\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}\notin \mathrm{nil}(S)$。

所以 S 不是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。

设 R 是环，如果 R 中的幂等元全是中心元，则称 R 是 abelian 环。

命题5 设 R 是 abelian 环，α 是 R 的自同态且对任意 $e^2=e\in R$，有 $\alpha(e)=e$。则以下各条等价：

(i) R 是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

(ii) 对任意 $e^2=e\in R$，eR 和 $(1-e)R$ 都是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

(iii) 存在 $e^2=e\in R$，使得 eR 和 $(1-e)R$ 都是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

证明 由于 $\alpha-\pi-$Armendariz 环的不变子环仍然是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环，所以(i) ⇒ (ii) ⇒ (iii)显然。

(iii) ⇒ (i) 设 $f(x)=a_0+a_1x_1+\cdots+a_nx^n$，$g(x)=b_0+b_1x_1+\cdots+b_mx^m\in R[x;\alpha]$ 满足 $f(x)g(x)\in \mathrm{nil}(R[x])$。取 $f_1(x)=ef(x)$，$f_2(x)=(1-e)f(x)$，$g_1(x)=eg(x)$，$g_2(x)=(1-e)g(x)$，则 $f_1(x)g_1(x)\in \mathrm{nil}(eR[x;\alpha])$，$f_2(x)g_2(x)\in \mathrm{nil}((1-e)R[x;\alpha])$。由于 eR 和 $(1-e)R$ 都是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环，因此对任意 $0\leqslant i\leqslant n$ 和 $0\leqslant j\leqslant m$，存在正整数 m_{ij} 和 n_{ij}，使得 $e(a_ib_j)^{m_{ij}}=((ea_i)(eb_j))^{m_{ij}}=0$，$(1-e)(a_ib_j)^{n_{ij}}=((1-e)a_i(1-e)b_j)^{n_{ij}}=0$。令 $k_{ij}=\max\{m_{ij},n_{ij}\}$，则 $e(a_ib_j)^{k_{ij}}=(1-e)(a_ib_j)^{k_{ij}}=0$，因此 $(a_ib_j)^{k_{ij}}=0$，所以 R 是 $\alpha-\pi-$Armendariz 环。

2 多项式环

设 α 是环 R 的自同态，定义 $\bar{\alpha}(\sum_{i=0}^n a_ix^i)=\sum_{i=0}^n\alpha(a_i)x^i$，则 α 被扩张为多项式环 $R[x]$ 的自同态。具有未知量 x 的洛朗多项式环 $R[x;x^{-1}]$ 是由所有的形式和 $\sum_{i=k}^n a_ix^i$ 组成，其中 $a_i\in R$，k，n 是(可能是负数)整数。映射 $\bar{\alpha}$：$R[x;x^{-1}]\mapsto R[x;x^{-1}]$，$\bar{\alpha}(\sum_{i=k}^n a_ix^i)=\sum_{i=k}^n\alpha(a_i)x^i$ 也是 $R[x;x^{-1}]$ 的自同态。

命题6 设 α 是环 R 的自同态。则以下各条件等价：

(i) $R[x]$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。

(ii) $R[x;x^{-1}]$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。

证明 由于 $R[x]$ 是 $R[x;x^{-1}]$ 的 $\bar{\alpha}-$不变子环，所以如果 $R[x;x^{-1}]$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环，则 $R[x]$ 也是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。反之，任取

$f(y)=f_0+f_1y+\cdots+f_ny^n, g(y)=g_0+g_1y+\cdots+g_my^m\in R[x;x^{-1}][y;\bar{\alpha}]$ 满足 $f(y)g(y)\in \mathrm{nil}(R[x;x^{-1}][y;\bar{\alpha}])$，其中 f_i，$g_j\in R[x;x^{-1}]$，则存在正整数 k，使得 $f'_i=f_ix^k$，$g'_j=g_jx^k\in R[x]$。令 $p(y)=f'_0+f'_1y+\cdots+f'_ny^n$，$q(y)=g'_0+g'_1y+\cdots+g'_my^m\in R[x][y;\bar{\alpha}]$ 则 $p(y)q(y)\in \mathrm{nil}(R[x][y;\bar{\alpha}])$。由于 $R[x]$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环，因此对任意 i 和 j，有 $f'_ig'_j\in \mathrm{nil}(R[x])$，即 $(f_ix^k)(g_jx^k)=f_ig_jx^{2k}\in \mathrm{nil}(R[x])$，所以 $f_ig_j\in \mathrm{nil}(R[x;x^{-1}])$。所以 $R[x;x^{-1}]$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。

设 α 是环 R 的自同态。根据文献［10，命题 2.3］，如果存在正整数 t 使得 $\alpha^t=I_R$，则 $R[x]$ 是 $\bar{\alpha}-$Armendariz 环当且仅当 R 是 $\alpha-$Armendariz 环。对于 $\alpha-\pi-$Armendariz 环，我们有与之相似的结论。

定理 3 设 R 是 $\alpha-$相容半交换环。如果存在正整数 t，使得 $\alpha^t=I_R$，则 $R[x]$ 是 $\bar{\alpha}-\pi-$Armendariz 环。

证明 根据命题 2，只需证明 $R[x]$ 是 $\bar{\alpha}-$诣零 Armendariz 环。假设 $p(y)=f_0+f_1y+\cdots+f_my^m$，$q(y)=g_0+g_1y+\cdots+g_ny^n\in R[x][y;\bar{\alpha}]$，使得 $p(y)q(y)\in \mathrm{nil}(R[x][y;\bar{\alpha}])$。不妨设 $f_i=a_{i0}+a_{i1}x+\cdots+a_{ik_i}x^{k_i}$，$g_j=b_{j0}+b_{j1}x+\cdots+b_{jl_j}x^{l_j}$，其中 a_{i0}，a_{i1}，$\cdots$，a_{ik_i}，b_{j0}，b_{j1}，$\cdots$，$b_{jl_j}\in R$，$0\leqslant i\leqslant m$，$0\leqslant j\leqslant n$。下证对任意 $0\leqslant i\leqslant m$ 和 $0\leqslant j\leqslant n$，有 $f_ig_j\in \mathrm{nil}(R[x])$。任取正整数 k，使得 $k>\deg(f_0)+\deg(f_1)+\cdots+\deg(f_m)+\deg(g_0)+\deg(g_1)+\cdots+\deg(g_n)$。由于 R 是半交换环，根据命题 3 可知 $\mathrm{nil}(R)[x]=\mathrm{nil}(R[x])$。因为 $p(y)q(y)\in \mathrm{nil}(R[x][y;\bar{\alpha}])$，所以

$$f_0g_0\in \mathrm{nil}(R)[x];$$
$$f_0g_1+f_1\bar{\alpha}(g_0)\in \mathrm{nil}(R)[x];$$
$$\cdots\cdots$$
$$f_m\bar{\alpha}^m(g_n)\in \mathrm{nil}(R)[x]$$

令 $f(x)=f_0(x^t)+f_1(x^t)x^{tk+1}+\cdots+f_m(x^t)x^{mtk+m}$，$g(x)=g_0(x^t)+g_1(x^t)x^{tk+1}+\cdots+g_n(x^t)x^{ntk+n}$ 则 $f(x)(g(x))$ 的系数做成的集合和所有 $f_i(x)(g_j(x))$ 的系数做成的集合相等。由于 $\alpha^t=I_R$，容易验证

$$f(x)g(x)=f_0(x^t)g_0(x^t)+[f_0(x^t)g_1(x^t)+f_1(x^t)\bar{\alpha}(g_0(x^t))]x^{tk+1}+\cdots+f_m(x^t)\bar{\alpha}^m(g_n(x^t))x^{(tk+1)(m+n)}\in \mathrm{nil}(R)[x;\alpha]$$

因为 R 是 $\alpha-$相容半交换环，根据引理 2，对任意 $0\leqslant i\leqslant m$ 和 $0\leqslant j\leqslant n$，有 $a_{il}b_{jr}\in \mathrm{nil}(R)$。由于 $\mathrm{nil}(R)$ 是 R 的理想，从而 $f_ig_j\in \mathrm{nil}(R)[x]=\mathrm{nil}(R[x])$。所以 $R[x]$ 是 $\bar{\alpha}-$诣零 Armendariz 环。

参考文献：

［1］ REGE M B，CHHAWCHHARIA S. Armendariz rings［J］. Proc Japan Acad:Ser A，1997，73：14－17.

［2］ ARMENDARIZ E P. A note on extensions of Baer and p. p. －rings［J］. J Austral Math Soc，1974，18：470－473.

［3］ ANDERSON D D，CAMILLO V. Armendariz rings and Gaussian rings［J］. Comm Algebra，1998，26：2265－2272.

［4］ HUH C，LEE Y，SMOKTUNOWICZ A. Armendariz rings and semicommutative rings［J］. Comm Algebra，2002，30：751－761.

［5］ LIU Z K，ZHAO R Y. On weak Armendariz rings［J］. Comm Algebra，2006，34：2607－2616.

［6］ ANTOINE R. Nilpotent elements and Armendariz rings［J］. J Algebra，2008，319：3128－3140.

［7］ HUH C，LEE C I，PARK K S，et al. On π－Armendariz rings［J］. Bull Korean Math Soc，2007，44：641－649.

［8］ GHALANDARZADEH S，MALAKOOTI R. On π－near-Armendariz rings［J］. Asian-Eur J Math，2009，2：77－83.

［9］ HONG C Y，KIM N K，KWAK T K. On skew Armendariz rings［J］. Comm Algebra，2003，31：103－122.

［10］ HONG C Y，KWAK T K，RIZVI S T. Extensions of generalized Armendariz rings［J］. Algebra Colloq，2006，13：253－266.

［11］ CHEN W X，TONG W T. A note on skew Armendariz rings［J］. Comm Algebra，2005，33：1137－1140.

［12］ HASHEMI E，MOUSSAVI A. Polynomial extensions of quasi-Baer rings［J］. Acta Math Hungar，2005，107：207－224.