第 52 卷 第 2 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 52 No. 2
2013 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2013

广义 Boussinesq 方程的正则性准则*

邱 华[1]，姚正安[2]
（1. 华南农业大学数学系，广东 广州 510642；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要：研究三维不可压广义 Boussinesq 方程，得到了该方程的二个正则性准则。

关键词：广义 Boussinesq 方程；正则性准则；Morrey 空间
中图分类号：O175.2 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2013）02－0043－04

Regularity Criteria for the Generalized Boussinesq Equations

QIU Hua[1], *YAO Zheng'an*[2]
（1. Department of Applied Mathematics, South China Agricultural University, Guangzhou 510642, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China）

Abstract: The three-dimensional generalized Boussinesq equations with the incompressibility condition is considered. Two regularity criteria for the generalized Boussinesq equations are obtained.

Key words: generalized Boussinesq equations; regularity criterion; Morrey spaces

在本文，我们考虑如下三维广义 Boussinesq 方程的柯西问题：

$$\begin{cases} u_t + (u\cdot\nabla)u + \mu(-\Delta)^{\alpha}u + \nabla P = \theta e_3, \\ \theta_t + (u\cdot\nabla)\theta + \kappa(-\Delta)^{\beta}\theta = 0, \\ \nabla\cdot u = 0, (x,t) \in \mathbf{R}^3\times(0,\infty), \\ u(x,0) = u_0, \theta(x,0) = \theta_0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $u=(u_1,u_2,u_3)$ 表示流体速度，P 为压力，θ 为温度，μ 为黏性系数，κ 为热扩散系数，$e_3=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$，$u=(u_1,u_2,u_3)$，u_0 与 θ_0 分别为在 $t=0$ 给定的流体初始速度与初始温度，且满足 $\nabla\cdot u_0=0$。

Boussinesq 方程不仅在大气科学中有着重要应用[1]，而且在地球物理科学中亦有着广泛应用[2]。广义 Boussinesq 方程是将通常的 Boussinesq 方程中的拉普拉斯算子 $-\Delta$ 用分数次拉普拉斯算子 $(-\Delta)^{\alpha}$ 替换得到，这种研究分数次方程的方法可参见 Wu 等[3]对广义 MHD 方程的研究。若 $\alpha=\beta=1$，广义 Boussinesq 方程（1）即为通常的 Boussinesq 方程。在二维情形，Cannon 与 DiBenedetto[4]得到了在 $\alpha=\beta=1$ 和 $\mu,\kappa>0$ 关于整体时间的正则性解；然而，当 $\mu=\kappa=0$ 时，该方程解的正则性问题仍然是数学流体力学中的公开问题[5-6]。最近，众多学者考虑了当 $\alpha=\beta=1$ 无黏性或者无扩散情形下的解的整体正则性问题，相关文献可参见文献［7-9］。另外，对于通常的三维 Boussinesq 方程，Ishimura 和 Morimoto[10]给出了如下光滑解的正则性准则

$$\nabla u \in L^1(0,T;L^{\infty}(\mathbf{R}^3)) \tag{2}$$

最近，邱华，杜毅与姚正安[11]得到了三维 Boussinesq 方程的 Serrin 类正则性准则。而对于广义 Boussinesq 方程的柯西问题，许孝精得到了二维广义 Boussinesq 方程在 $1\leqslant\alpha+\beta\leqslant2$ 条件下解的存在唯一性，并给出了正则性准则。

本文，我们考虑三维广义 Boussinesq 方程的正则性问题，给出了该类方程的两个正则性准则。本文的第一个主要结论是三维广义 Boussinesq 方程在 Sobolev 空间意义下的正则性准则，结果如下：

* **收稿日期**：2012－10－10
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11126266，11271381）；广东高校优秀青年创新人才培养计划资助项目（LYM11030，2012LYM_0030）
作者简介：邱华（1977 年生），男，讲师；E-mail：tsiuhua@scau.edu.cn

定理 1　假设 $0 < \alpha = \beta < \dfrac{3}{2}$，流体的初始速度与温度 $(u_0,\theta_0) \in H^1(\mathbf{R}^3)$，且 (u,θ) 为问题（1）在 $0 \leqslant t < T$ 时的光滑解。若

$$\nabla u \in L^p(0,T;L^q(\mathbf{R}^3)) \tag{3}$$

则解 (u,θ) 在时刻 $t = T$ 处仍然是光滑的，其中

$$\frac{2\alpha}{p} + \frac{3}{q} \leqslant 2\alpha, \frac{3}{2\alpha} < q \leqslant \infty$$

进一步地，我们给出了在 Morrey 空间意义下三维广义 Boussinesq 方程的正则性准则，结果陈述如下：

定理 2　假设 $0 < \alpha = \beta \leqslant 1$，流体的初始速度与温度 $(u_0,\theta_0) \in H^1(\mathbf{R}^3)$，且 (u,θ) 为问题（1）在 $0 \leqslant t < T$ 时的光滑解。若

$$\nabla u \in L^p(0,T;\dot{M}_{q,r}(\mathbf{R}^3)) \tag{4}$$

则解 (u,θ) 在时刻 $t = T$ 处仍然是光滑的，其中

$$\frac{2\alpha}{p} + \frac{3}{q} = 2\alpha, \frac{3}{2\alpha} < q \leqslant \infty, 1 < r \leqslant q$$

注 1　当 $\alpha = 1$ 时，定理 1 的条件变为

$$\frac{2}{p} + \frac{3}{q} \leqslant 2, \frac{3}{2} < q \leqslant \infty$$

这包含了 Ishimura 与 Morimoto[10] 的结果（2）。

注 2　由于 $L^q(\mathbf{R}^3) = \dot{M}_{q,q}(\mathbf{R}^3) \subset \dot{M}_{q,r}(\mathbf{R}^3)$，$1 < r \leqslant q \leqslant \infty$，定理 2 中（4）可以在一定程度上看作是定理 1 中（3）的推广。然而，需要注意的是，定理 2 中的分数次指标 α,β 要比定理 1 范围小很多；因此，当 $1 < \alpha = \beta < \dfrac{3}{2}$ 时，（4）式是否成立，尚需讨论，对此我们将另外展开讨论。

进一步地，根据 Biot-Savart 定律与 $L^p(\mathbf{R}^3)$ 间上 Riesz 变换的有界性（这里 $1 < p < +\infty$）（参见文献［13］），我们有

$$\nabla f_{L^p(\mathbf{R}^3)} \leqslant C \| \mathrm{curl} f \|_{L^p(\mathbf{R}^3)}$$

于是，我们可得如下推论：

推论 1　假设 $0 < \alpha = \beta < \dfrac{3}{2}$，流体的初始速度与温度 $(u_0,\theta_0) \in H^1(\mathbf{R}^3)$，$\omega_0 = \mathrm{curl} u_0 \in L^2(\mathbf{R}^3)$，且 (u,θ) 为问题（1）在 $0 \leqslant t < T$ 时的光滑解。若

$$\omega = \mathrm{curl} u \in L^p(0,T;L^q(\mathbf{R}^3))$$

则解 (u,θ) 在时刻 $t = T$ 处仍然是光滑的，其中

$$\frac{2\alpha}{p} + \frac{3}{q} \leqslant 2\alpha, \frac{3}{2\alpha} < q \leqslant \infty$$

推论 2　假设 $0 < \alpha = \beta \leqslant 1$，流体的初始速度与温度 $(u_0,\theta_0) \in H^1(\mathbf{R}^3)$，$\omega_0 = \mathrm{curl} u_0 \in L^2(\mathbf{R}^3)$，且 (u,θ) 为问题（1）在 $0 \leqslant t < T$ 时的光滑解。若

$$\omega = \mathrm{curl} u \in L^p(0,T;\dot{M}_{q,r}(\mathbf{R}^3))$$

则解 (u,θ) 在时刻 $t = T$ 处仍然是光滑的，其中

$$\frac{2\alpha}{p} + \frac{3}{q} = 2\alpha, \frac{3}{2\alpha} < q \leqslant \infty, 1 < r \leqslant q$$

本文第二节给出一些基本定义与定理。第三节证明定理 1。第四节证明定理 2。

1　预备

在本小节，我们给出 Morrey 空间的相关定义以及证明过程中需要的引理。

定义 1　设 $0 < p \leqslant q < \infty$。齐次 Morrey 空间 $\dot{M}_{p,q}(\mathbf{R}^3)$ 定义为

$$\dot{M}_{p,q}(\mathbf{R}^3) = \{ f \in L^p_{loc}(\mathbf{R}^3) \mid \| f \|_{\dot{M}_{p,q}} = \sup_{x \in \mathbf{R}^3} \sup_{R>0} R^{\frac{3}{q}-\frac{3}{p}} \| f \|_{L^p(B(x,R))} < \infty \}$$

其中 $B(x,R)$ 是 $\mathbf{R}^3$ 中以 x 为中心且半径为 R 的球。

定义 2　设 $1 \leqslant q' \leqslant p' < \infty$。齐次空间 $\dot{N}_{q',p'}$ 定义为 $L^{p'}(\mathbf{R}^3)$ 的子空间，且具有形式 $f = \sum_{k \in \mathbf{N}} g_k$，其中 $g_k \subset L^{p'}_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^3)$ 且

$$\sum_{k \in \mathbf{N}} d_k^{\frac{3}{q'}-\frac{3}{p'}} \| g_k \|_{L^{p'}} < \infty$$

这里 $d_k = \mathrm{diam}(\mathrm{supp}\, g_k) < \infty$，$L^{p'}_{\mathrm{comp}}(\mathbf{R}^3)$ 为 $\mathbf{R}^3$ 中所有具有紧支集的 $L^{p'}(\mathbf{R}^3)$ 函数构成的空间。

注 3　当 $\dot{N}_{q',p'}$ 赋以如下形式范数：

$$\| f \|_{\dot{N}_{q',p'}} = \inf \{ \sum_{k \in \mathbf{N}} d_k^{\frac{3}{q'}-\frac{3}{p'}} \| g_k \|_{L^{p'}} < \infty \}$$

则 $\dot{N}_{q',p'}$ 为 Banach 空间，其中下确界取遍所有原子分解。

对于空间 $\dot{M}_{p,q}$ 和空间 $\dot{N}_{q',p'}$，我们有如下引理：

引理 1[14]　设 $1 \leqslant q' \leqslant p' < \infty$，且 p,q 满足 $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{p'} = \dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$，则 $\dot{M}_{p,q}$ 是 $\dot{N}_{q',p'}$ 的对偶空间。

引理 2[14]　设 $1 \leqslant q' \leqslant p' < \infty$，$m \geqslant 2$ 且 $\dfrac{1}{q} + \dfrac{1}{q'} = 1$。记 $\gamma = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{q} + \dfrac{3}{m} \in (0,1]$。则存在常数 $C > 0$，使得对任意 $u \in L^m(\mathbf{R}^3)$ 和 $v \in \dot{H}^\gamma(\mathbf{R}^3)$ 都有

$$\| uv \|_{\dot{N}_{q',p'}} \leqslant C \| u \|_{L^m} \| v \|_{\dot{H}^\gamma}$$

另外，在证明过程中我们需要如下插值不等式：

引理 3　设 $2 \leqslant q \leqslant \dfrac{6}{3-2\alpha}$，$0 < \alpha < \dfrac{3}{2}$，则有

$$\| u \|_{L^q} \leqslant C \| u \|_{L^2}^{1-\frac{3}{2\alpha}+\frac{3}{q\alpha}} \| \Lambda^\alpha u \|_{L^2}^{\frac{3}{2\alpha}-\frac{3}{q\alpha}}$$

2　定理 1 的证明

本小节给出定理 1 的证明。不失一般性，在本小节以及下一小节，我们均假设 $\mu = \kappa = 1$ 。首先，(1) 的第一个方程与第二个方程两端分别乘以 Δu 与 $\Delta\theta$ ，并将所得方程在 $\mathbf{R}^3$ 上积分，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2 = \int[(u\cdot\nabla)u]\cdot\Delta u\mathrm{d}x + \int\nabla P\cdot\Delta u\mathrm{d}x - \int(\theta e_3)\cdot\Delta u\mathrm{d}x \tag{5}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{\alpha+1}\theta\|_{L^2}^2 = \int[(u\cdot\nabla)\theta]\cdot\Delta\theta\mathrm{d}x \tag{6}$$

注意到

$$\int[(u\cdot\nabla)u]\cdot\Delta u\mathrm{d}x = \int\sum_{i,j,k=1}^{3}u_i\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k^2}\mathrm{d}x = -\int\sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathrm{d}x - \int\sum_{i,j,k=1}^{3}u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathrm{d}x,$$

$$\int[(u\cdot\nabla)\theta]\cdot\Delta\theta\mathrm{d}x = \int\sum_{i,j=1}^{3}u_i\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial^2\theta}{\partial x_j^2}\mathrm{d}x = -\int\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\mathrm{d}x - \int\sum_{i,j=1}^{3}u_i\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\mathrm{d}x$$

利用不可压条件 $\nabla\cdot u = 0$ ，可得

$$\int\sum_{i,j,k=1}^{3}u_i\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_i\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int\sum_{i,j=1}^{3}u_i\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\mathrm{d}x = 0$$

因而有

$$\int[(u\cdot\nabla)u]\cdot\Delta u\mathrm{d}x = -\int\sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$\int[(u\cdot\nabla)\theta]\cdot\Delta\theta\mathrm{d}x = -\int\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\mathrm{d}x \tag{8}$$

$$\int[(u\cdot\nabla)\theta]\cdot\Delta\theta\mathrm{d}x = -\int\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\mathrm{d}x \tag{9}$$

将 (5) 与 (6) 相加，并将 (7)–(9) 代入，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2) + \|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{\alpha+1}\theta\|_{L^2}^2 = -\int\sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathrm{d}x - \int\sum_{i,j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial\theta}{\partial x_j}\mathrm{d}x - \int\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\theta}{\partial x_i}\frac{\partial u_3}{\partial x_i}\mathrm{d}x = I_1 + I_2 + I_3 \tag{10}$$

下面分两种情况来讨论：$q < +\infty$ 与 $q = +\infty$ 。

第一种情况：当 $q < +\infty$ 时。对第一项 I_1 应用 Hölder 不等式，

$$|I_1| = \left|\int\sum_{i,j,k=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\frac{\partial u_j}{\partial x_k}\mathrm{d}x\right| \leqslant \|\nabla u\|_{L^q}\|\nabla u\|_{L^\gamma}^2 \tag{11}$$

其中 $\frac{1}{q} + \frac{2}{\gamma} = 1$ 。对于 $\|\nabla u\|_{L^\gamma}$ ，我们有如下插值不等式（参见文献 [15]）

$$\|\nabla u\|_{L^\gamma} \leqslant \|\nabla u\|_{L^2}^{\sigma}\|\nabla u\|_{L^r}^{1-\sigma} \tag{12}$$

其中 $\frac{1}{\gamma} = \frac{\sigma}{2} + \frac{1-\sigma}{r}$ 。另外，在条件 $\frac{1}{r} = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{n} = \frac{3-2\alpha}{6}$ 下，有如下的 Sobolev 嵌入不等式成立：

$$\|\nabla u\|_{L^r} \leqslant \|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2} \tag{13}$$

由 (11)–(13) 及 Young 不等式，可得

$$|I_1| \leqslant C\|\nabla u\|_{L^q}\|\nabla u\|_{L^2}^{2\sigma}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^{2(1-\sigma)} \leqslant \|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^q}^{\frac{1}{\sigma}}\|\nabla u\|_{L^2}^2 \tag{14}$$

根据上面证明过程可知

$$\sigma = 1 + \frac{3}{\gamma\alpha} - \frac{3}{2\alpha} \tag{15}$$

对于第二项 I_2 ，类似讨论可得，

$$|I_2| \leqslant \|\Lambda^{\alpha+1}\theta\|_{L^2}^2 + C\|\nabla u\|_{L^q}^{\frac{1}{\sigma}}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2 \tag{16}$$

其中指标 σ 与 (15) 相同。

对于第三项 I_3 ，应用 Hölder 不等式及 Young 不等式，得

$$|I_3| \leqslant \|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^2} \leqslant C(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2) \tag{17}$$

将 (14)，(16)，(17) 代入 (10)，有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2) + \|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2 + \|\Lambda^{\alpha+1}\theta\|_{L^2}^2 \leqslant C(\|\nabla u\|_{L^q}^{\frac{1}{\sigma}} + 1)(\|\nabla u\|_{L^2}^2 + \|\nabla\theta\|_{L^2}^2) \tag{18}$$

因此，当 $\frac{2\alpha}{p} + \frac{3}{q} \leqslant 2\alpha$ 成立时，则有 $\frac{1}{\sigma} \leqslant p$ 且

$$\int_0^T\|\nabla u\|_{L^q}^{\frac{1}{\sigma}}\mathrm{d}t < \infty \tag{19}$$

于是，对于不等式 (18)，应用 Gronwall 不等式可知当 $q < +\infty$ 时，光滑解 (u,θ) 在时刻 $t = T$ 处仍然是光滑的。

第二种情形：当 $q = +\infty$ 时。对式 (10) 最右端第一项 I_1 应用 Hölder 不等式，得

$$|I_1| \leqslant C\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla u\|_{L^2}^2$$

对第二项 I_2 ，应用 Hölder 不等式，有

$$|I_2| \leqslant C\|\nabla u\|_{L^\infty}\|\nabla\theta\|_{L^2}^2$$

将上述不等式与式 (10) 以及式 (17) 联立，得

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2)\leqslant$$
$$C(\|\nabla u\|_{L^\infty}+1)(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2) \tag{20}$$

而在假设 $q=+\infty$ 情形下，可知条件 $\frac{2\alpha}{p}+\frac{3}{q}\leqslant 2\alpha$ 蕴含着 $p\geqslant 1$ 。对不等式（20）应用 Gronwall 不等式可知，如果

$$\int_0^T\|\nabla u\|_{L^\infty}\mathrm{d}t<\infty \tag{21}$$

成立，则光滑解 (u,θ) 在时刻 $t=T$ 处仍然是光滑的。定理 1 证毕。

3 定理 2 的证明

在本小节，我们给出定理 2 的证明。在式（10）中，对于第一项 I_1 ，应用引理 1，引理 2，引理 3 以及 Young 不等式，有

$$|I_1|\leqslant C\|\nabla u\|_{M_{q,r}}\|\nabla u\|_{L^m}\|\nabla u\|_{\dot H^\alpha}\leqslant$$
$$C\|\nabla u\|_{M_{q,r}}(\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\frac{3}{2\alpha}+\frac{3}{m\alpha}}\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^{\frac{3}{2\alpha}-\frac{3}{m\alpha}})\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}\leqslant$$
$$C\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^{1+\frac{3}{2\alpha}-\frac{3}{m\alpha}}\cdot\|\nabla u\|_{M_{q,r}}\|\nabla u\|_{L^2}^{1-\frac{3}{2\alpha}+\frac{3}{m\alpha}}\leqslant$$
$$\|\Lambda^{\alpha+1}u\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{M_{q,r}}^p\|\nabla u\|_{L^2}^2 \tag{22}$$

这里 $\alpha=-\frac{3}{2}+\frac{3}{q}+\frac{3}{m},\frac{2\alpha}{p}+\frac{3}{q}=2\alpha,\frac{3}{2\alpha}<q\leqslant\infty$ ， $1<r\leqslant q$ 。

类似讨论可得，对于第二项 I_2 ，

$$|I_2|\leqslant\|\Lambda^{\alpha+1}\theta\|_{L^2}^2+C\|\nabla u\|_{M_{q,r}}^p\|\nabla\theta\|_{L^2}^2 \tag{23}$$

对于第三项 I_3 ，应用 Hölder 不等式及 Young 不等式，得

$$|I_3|\leqslant\|\nabla u\|_{L^2}\|\nabla\theta\|_{L^2}\leqslant$$
$$C(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2) \tag{24}$$

联立式（10），（22），（23）与（24），有

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2)\leqslant$$
$$C(\|\nabla u\|_{M_{q,r}}^p+1)(\|\nabla u\|_{L^2}^2+\|\nabla\theta\|_{L^2}^2) \tag{25}$$

对式（25）应用 Gronwall 不等式，可知在假设（4）条件下光滑解 (u,θ) 在时刻 $t=T$ 处仍然是光滑的。定理 2 证毕。

参考文献：

[1] MAJDA A. Introduction to PDEs and waves for the atmosphere and ocean [M]. New York : Courant Lecture Notes in Mathematics, vol. 9, AMS/CIMS, 2003.

[2] PEDLOSKY J. Geophysical fluid dynamics [M]. New York : Springer-Verlag, 1987.

[3] WU J. Regularity criteria for the generalized MHD equations [J]. Comm Partial Differential Equations, 2008, 33: 285 – 306.

[4] CANNON J R, DIBENEDETTO E. The initial problem for the Boussinesq equations with data in L^p [J]. Lect Notes Math, 1980, 771: 129 – 144.

[5] TANIUCHI Y. A note on the blow-up criterion for the inviscid 2d Boussinesq equations [J]. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 2002, 223: 131 – 140.

[6] WEINAN E, SHU C W. Small scale structure on Boussinesq convection [J]. Phys Fluids, 1994, 6: 48 – 54.

[7] CHAE D. Global regularity for the 2d Boussinesq equations with partial viscosity terms [J]. Adv Math, 2006, 203:497 – 515.

[8] HMIDI T, KERAANI S. Global well-posedness result for two-dimensional Boussinesq system with a zero diffusivity [J]. Adv Diff Equations, 2007, 12: 461 – 480.

[9] HOU T Y, LI C. Global well-posedness of the viscous Boussinesq equations [J]. Discrete Contin Dyn Syst, 2005, 12: 1 – 12.

[10] ISHIMURA N, MORIMOTO H. Remarks on the blow-up criterion for the 3D Boussinesq equations [J]. Math Meth Appl Sci, 1999, 9: 1323 – 1332.

[11] QIU H, DU Y, YAO Z. Serrin-type blow-up criteria for three-dimensional Boussinesq equations [J]. Appl Anal, 2010, 89: 1603 – 1613.

[12] XU X. Global regularity of solutions of 2d Boussinesq equations with fractional diffusion [J]. Nonlinear Anal, 2010, 72: 677 – 681.

[13] CHEMIN J Y. Perfect incompressible fluids [M]. New York: Oxford University Press, 1998.

[14] LEMARIE-RIEUSSET P. Recent developments in the Navier-Stokes problem [M]. London: Chapman and Hall/CRC, 2002.

[15] BERGH J, LOFSTROM J. An introduction to interpolation [M]. Berlin: Springer, 1976.