

# 单位圆周上同胚映射的逆扩张\*

李淑龙<sup>1</sup>, 刘学文<sup>2</sup>

(1. 南方医科大学生物医学工程学院, 广东 广州 510515;

2. 深圳西乡中学新高中部, 广东 深圳 518102)

**摘要:** 在 Douady-Earle 扩张基础上定义了单位圆周之间同胚映射的新共形自然扩张即逆扩张, 并用一个反例证明了逆扩张不同于 Douady-Earle 扩张。

**关键词:** Douady-Earle 扩张; 逆扩张; 拟共形映射

**中图分类号:** O174.5    **文献标志码:** A    **文章编号:** 0529-6579 (2012) 03-0052-04

## The Inverse Extension of the Homeomorphism Between Unit Circles

LI Shulong<sup>1</sup>, LIU Xuewen<sup>2</sup>

(1. School of Biomedical Engineering, Southern Medical University, Guangzhou 510515, China;

2. Shenzhen Xi Xiang Middle School, Shenzhen 518102, China)

**Abstract:** Based on Douady-Earle extension of homeomorphism from  $S^1$  to  $S^1$ , a new extension map between unit discs called inverse extension is defined, which is conformal natural. And the inverse extension is shown not always to be equal to Douady-Earle extension by an example.

**Key words:** Douady-Earle extension; inverse extension; quasi-conformal mapping

$S^1$  上映射的扩张问题已经得到广泛的研究<sup>[1-9]</sup>, 其在 Teichmüller 空间的研究中具有重要的作用。我们知道: Beurling-Ahlfors 扩张不是共形自然的, 而 Douady-Earle 扩张是共形自然的。由于 Beurling-Ahlfors 扩张不是共形自然的, 它只能直接用于万有 Teichmüller 空间的研究, 而不能直接用于一般的 Teichmüller 空间的研究。而 Douady-Earle 扩张是共形自然的, 可以直接用于一般的 Teichmüller 空间的研究。

寻找单位圆周上映射的共形自然扩张是一个很有趣的问题。在本文中我们将定义单位圆周上同胚映射的共形自然扩张——逆扩张, 并且我们将通过一个例子证明逆扩张不同于 Douady-Earle 扩张。

### 1 主要定义

设  $D = \{z \in \mathbf{C}; |z| < 1\}$  是复平面  $\mathbf{C}$  上的单位圆盘, 且  $S^1 = \partial D, \bar{D} = D \cup S^1$ 。令  $G$  是  $D$  上所有共

形自同构所构成的集合, 则  $G$  是一个群。由  $D$  上指数 2 的保向共形自同构所构成的集合  $G_+ \subset G$  是  $G$  的子群。那么

$$G_+ = \{z \rightarrow \lambda \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \mid |\lambda| = 1, |a| < 1\}$$

对于每个  $a$ , 映射

$$g_a = \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \in G_+$$

满足  $g_a : a \rightarrow 0$  且  $0 \rightarrow -a$ 。

给定同胚映射  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$ , Douady 和 Earle (文献 [2]) 如下定义了一个扩张  $E(\varphi) = \Phi : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$ : 当  $z \in S^1$  时, 令  $\Phi(z) = \varphi(z)$ ; 当  $z \notin S^1$  时, 令  $\Phi(z) = \omega$ , 这里  $\omega \in D$  是以下方程

$$F_1(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \frac{\varphi(\xi) - \omega}{1 - \bar{\omega}\varphi(\xi)} \frac{(1 - |z|^2)}{|z - \xi|^2} |d\xi| = 0 \tag{1}$$

\* 收稿日期: 2011-09-16

基金项目: 国家自然科学基金面上资助项目 (10871211)

作者简介: 李淑龙 (1981 年生), 女, 讲师; E-mail: shulong2004@163.com

的唯一解，我们称之为 Douady-Earle 扩张。显然  $F_1$  是定义在  $D \times D$  上的实解析函数。

**引理 1**<sup>[2]</sup> Douady-Earle 扩张映射  $E(\varphi)(z) : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  是同胚的，如果限制在  $D$  上则是实解析微分同胚。而且如果  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  是拟对称函数，则 Douady-Earle 扩张映射  $E(\varphi)(z), z \in D$  也是拟共形映射。

**引理 2**<sup>[2]</sup> Douady-Earle 扩张是共形自然的，即满足

$$E(gB \circ \varphi \circ h) = g \circ E(\varphi) \circ h, \forall g, h \in G$$

易知 (1) 等价于方程

$$F_2(z, \omega) = \int_{S^1} \frac{\varphi(\xi) - \omega}{1 - \bar{\omega}\varphi(\xi)} \frac{|d\xi|}{|z - \xi|^2} = 0 \quad (2)$$

既然 Douady-Earle 扩张是共形自然的，不失一般性，我们可以假设  $E(\varphi)(0) = 0$ ，即

$$\int_{S^1} \varphi(\xi) |d\xi| = 0 \text{ 或 } \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) d\theta = 0 \quad (3)$$

若  $z \in S^1$ ，令  $z = e^{i\theta}, \zeta = e^{i\iota}$ ，且  $\zeta = \varphi(e^{i\theta}) = e^{i\psi(\theta)}$ ，则  $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  是同胚映射，且满足  $\psi(\theta + 2\pi) = \psi(\theta) + 2\pi$ 。记  $\varphi$  的逆映射为  $\varphi^{-1}$ ，则

$$\varphi^{-1}(\zeta) = e^{i\psi^{-1}(\iota)}$$

这里  $\psi^{-1}$  是  $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  的逆映射，满足  $\psi^{-1}(t + 2\pi) = \psi^{-1}(t) + 2\pi$ 。

由引理 1，我们能够如下定义  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  的另一扩张  $N$ ：

**定义 1** 令  $E(\varphi) : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  是  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  的 Douady-Earle 扩张，我们定义

$$\omega = N(\varphi)(z) = E^{-1}(\varphi^{-1})(z) : z \in \bar{D}$$

即它是同胚映射  $\varphi : S^1 \rightarrow S^1$  逆映射  $\varphi^{-1} : S^1 \rightarrow S^1$  的 Douady-Earle 扩张映射的逆映射，我们称之为逆扩张。

显然与 Douady-Earle 扩张一样，逆扩张映射  $\omega = N(\varphi)(z) : \bar{D} \rightarrow \bar{D}$  也是同胚的且限制在  $D$  上是实解析微分同胚。因此有  $z = E(\varphi^{-1})(\omega), z \in \bar{D}$ 。由 (1) 可得逆扩张应满足

$$H_1(z, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{S^1} \frac{\varphi^{-1}(\xi) - z}{1 - \bar{z}\varphi^{-1}(\xi)} \frac{(1 - |\omega|^2)}{|\omega - \xi|^2} |d\xi| = 0 \quad (4)$$

其等价于

$$H_2(z, \omega) = \int_{S^1} \frac{\varphi^{-1}(\xi) - z}{1 - \bar{z}\varphi^{-1}(\xi)} \frac{1}{|\omega - \xi|^2} |d\xi| = 0 \quad (5)$$

## 2 主要定理

显然  $S^1$  上的恒等映射的 Douady-Earle 扩张和

逆扩张是一样的，都还是恒等映射；旋转映射  $f(z) = e^{ia}z, z \in S^1, a \in \mathbf{R}$  的 Douady-Earle 扩张和逆扩张也是一样的，都还是旋转映射  $E(f)(z) = N(f)(z) = e^{ia}z, z \in \bar{D}$ 。但是它们是否总是一样的呢？回答是否定的，请看下面例子：

假设  $a_j, j = 1, 2, 3$  是正整数并且满足

$$a_1 + a_2 + a_3 = 3, (\sqrt{3} - 1)a_1 + (2 - \sqrt{3})a_2 = 1 \quad (6)$$

记

$$\begin{cases} a_1(1) = 1 + t, \\ a_2(1) = 1 - (1 + \sqrt{3})t, \\ a_3(1) = 1 + \sqrt{3}t, \end{cases}$$

这里  $-\frac{\sqrt{3}}{3} \leq t \leq \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ 。显然  $a_j(t), j = 1, 2, 3$  满足 (6)。

我们考虑同胚映射  $f_t : S^1 \rightarrow S^1$  如下：对于  $z = e^{i\theta}$ ，

$$f_t(e^{i\theta}) =$$

$$\begin{cases} e^{i\frac{1}{a_1(t)}\theta}, & 0 \leq \theta \leq a_1(t) \frac{\pi}{6}, \\ e^{i(1 - \frac{a_1(t)}{a_2(t)})\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{1}{a_2(t)}\theta}, & a_1(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq (a_1(t) + a_2(t)) \frac{\pi}{6}, \\ e^{i(1 - \frac{1}{a_3(t)})\frac{\pi}{2}} e^{i\frac{1}{a_3(t)}\theta}, & \frac{\pi}{2} - a_3(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + a_3(t) \frac{\pi}{6}, \\ e^{i(4 - \frac{3}{a_2(t)} - \frac{a_3(t)}{a_2(t)})\frac{\pi}{6}} e^{i\frac{1}{a_2(t)}\theta}, & \frac{\pi}{2} + a_3(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + (a_2(t) + a_3(t)) \frac{\pi}{6}, \\ e^{i(1 - \frac{1}{a_1(t)})\pi} e^{i\frac{1}{a_1(t)}\theta}, & \pi - a_1(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \pi, \\ e^{i\theta}, & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

容易计算

$$\int_0^{2\pi} f_t(e^{i\theta}) d\theta = 0$$

由 (3) 知上式意味着  $\omega_t|_{z=0} = E(f_t)(0) = 0$ 。但下面我们将证明

$$\int_0^{2\pi} f_t^{-1}(e^{i\theta}) d\theta \neq 0,$$

从而  $E(f_t^{-1})(0) \neq 0$ ，因此  $\omega_t'|_{z=0} = N(f_t)(0) \neq 0$ 。

事实上，记  $f_t(e^{i\theta}) = e^{i\psi_t(\theta)}$ ，那么

$$\psi_t(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{a_1(t)}\theta, & 0 \leq \theta \leq a_1(t) \frac{\pi}{6}, \\ (1 - \frac{a_1(t)}{a_2(t)}) \frac{\pi}{6} + \frac{1}{a_2(t)}\theta, & a_1(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq (a_1(t) + a_2(t)) \frac{\pi}{6}, \\ (1 - \frac{1}{a_3(t)}) \frac{\pi}{2} + \frac{1}{a_3(t)}\theta, & \frac{\pi}{2} - a_3(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + a_3(t) \frac{\pi}{6}, \\ (4 - \frac{3\pi}{a_2(t)} - \frac{a_3(t)}{a_2(t)}) \frac{\pi}{6} + \frac{1}{a_2(t)}\theta, & \frac{\pi}{2} + a_3(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + (a_2(t) + a_3(t)) \frac{\pi}{6}, \\ (1 - \frac{1}{a_1(t)})\pi + \frac{1}{a_1(t)}\theta, & \pi - a_1(t) \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \pi, \\ \theta, & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

从而  $\psi_t(\theta)$  的逆  $\psi_t^{-1}(\theta)$  满足

$$\psi_t^{-1}(\theta) = \begin{cases} a_1(t)\theta, & 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{6}, \\ a_2(t)\theta - (a_2(t) - a_1(t)) \frac{\pi}{6}, & \frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, \\ a_3(t)\theta - (a_3(t) - 1) \frac{\pi}{2}, & \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3}, \\ a_2(t)\theta - (4a_2(t) - 3 - a_3(t)) \frac{\pi}{6}, & \frac{2\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{6}, \\ a_1(t)\theta - (a_1(t) - 1)\pi, & \frac{5\pi}{6} \leq \theta \leq \pi, \\ \theta, & \pi \leq \theta \leq 2\pi \end{cases}$$

我们知道  $f_t(\zeta) = e^{i\psi^{-1}(\theta)}$ ,  $\zeta = e^{i\theta}$ 。因此

$$\begin{aligned} \int_{S^1} f_t^{-1}(\zeta) |d\zeta| &= \int_{S^1} e^{i\psi^{-1}(\theta)} d\theta = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^{ia_1(t)\theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} e^{i[a_2(t)\theta - (a_2(t) - a_1(t)) \frac{\pi}{6}]} d\theta + \\ &+ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}} e^{i[a_3(t)\theta - (a_3(t) - 1) \frac{\pi}{2}]} d\theta + \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{6}} e^{i[a_2(t)\theta - (4a_2(t) - 3 - a_3(t)) \frac{\pi}{6}]} d\theta + \\ &+ \int_{\frac{5\pi}{6}}^{\pi} e^{i[a_1(t)\theta - (a_1(t) - 1)\pi]} d\theta + \int_{\pi}^{2\pi} e^{i\theta} d\theta = \\ &= A + B + C - 2i \end{aligned}$$

其中

$$A = \frac{1}{ia_1(t)}(e^{ia_1(t)\frac{\pi}{6}} + e^{-ia_1(t)\frac{\pi}{6}} - 2) =$$

$$\begin{aligned} &= i \frac{-2\cos a_1(t) \frac{\pi}{6} + 2}{a_1(t)}, \\ B &= \frac{1}{ia_2(t)}(e^{i(a_2(t) + a_1(t))\frac{\pi}{6}} - e^{ia_1(t)\frac{\pi}{6}} + \\ &+ ie^{i(a_2(t) + a_3(t))\frac{\pi}{6}} - ie^{ia_3(t)\frac{\pi}{6}}) = \\ &= i \frac{-2\sin a_3(t) \frac{\pi}{6} + 2\cos a_1(t) \frac{\pi}{6}}{a_2(t)}, \\ C &= \frac{1}{ia_3(t)}(ie^{ia_3(t)\frac{\pi}{6}} - ie^{-ia_3(t)\frac{\pi}{6}}) = i \frac{2\sin a_3(t) \frac{\pi}{6}}{a_3(t)} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{S^1} f_t^{-1}(\zeta) |d\zeta| &= A + B + C - 2i = \\ &= 2i \left[ \frac{a_1(t) - a_2(t)}{a_1(t)a_2(t)} \cos a_1(t) \frac{\pi}{6} + \right. \\ &\left. \frac{a_2(t) - a_3(t)}{a_2(t)a_3(t)} \sin a_3(t) \frac{\pi}{6} + \frac{1 - a_1(t)}{a_1(t)} \right] \end{aligned}$$

令  $t = -\frac{1}{2}$ , 则  $a_1(t) = \frac{1}{2}, a_2(t) = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}, a_3(t) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ , 此时

$$\begin{aligned} \int_{S^1} f_t^{-1}(\zeta) |d\zeta| &= A + B + C - 2i = \\ &= 2i \left[ -\frac{3 + \sqrt{3}}{3} \cos \frac{\pi}{12} + \frac{9 + 7\sqrt{3}}{3} \sin \frac{(2 - \sqrt{3})\pi}{12} + 1 \right] \neq 0 \end{aligned}$$

这意味着当  $t = -\frac{1}{2}$  时,  $E(f_t^{-1})(0) \neq 0$ , 由 Douady-Earle 扩张的同胚性可知  $E^{-1}(f_t^{-1})(0) \neq 0$ , 因此  $\omega_t' |_{z=0} = N(f_t)(0) \neq 0$ 。这与  $\omega_t |_{z=0} = E(f_t)(0) = 0$  矛盾, 由此可知逆扩张不同于 Douady-Earle 扩张。

从上面这个例子我们马上有如下定理:

**定理 1** 逆扩张不同于 Douady-Earle 扩张。

由引理 2, 即 Douady-Earle 扩张是共形自然的, 同样地逆扩张也是共形自然的。

**定理 2** 逆扩张映射是共形自然的, 即满足

$$G(g \circ \varphi \circ h) = g \circ G(\varphi) \circ h, \quad \forall g, h \in G$$

**证明**  $\forall g, h \in G,$

$$\begin{aligned} G(g \circ \varphi \circ h) &= [E((g \circ \varphi \circ h)^{-1})]^{-1} = \\ &= [E(h^{-1} \circ \varphi^{-1} \circ g^{-1})]^{-1} = [h^{-1} \circ E(\varphi^{-1}) \circ g^{-1}]^{-1} = \\ &= g \circ E^{-1}(\varphi^{-1}) \circ h \end{aligned}$$

证毕。

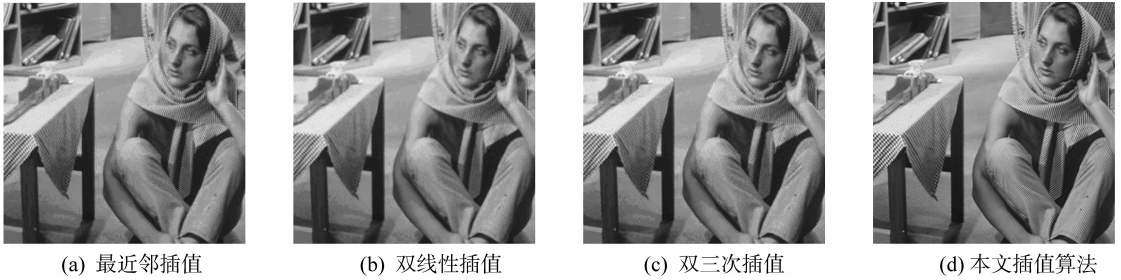


图 5 Barbara 图像

Fig. 5 Barbara image

噪比, 并且图像中细节丰富, 无明显的畸变, 实验结果表明该方法是超分辨率图像处理的一种行之有效的途径。但算法的效率需要在以后的研究工作中进行改进。在遥感图像、人物图像上插值的对比实验表明了新方法的有效性与广泛的应用性。

### 参考文献:

- [1] 汪西莉, 刘芳, 焦李成. 一种小波域 HMT 模型参数初始化方法[J]. 计算机科学, 2003, 30(1): 85 - 86.
- [2] KINEBUCHI K, MURESAN D D, PARKS T W. Image interpolation using wavelet-based hidden Markov trees [C] // IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 2001, (3): 1957 - 1960.
- [3] ZHAO S B, HAN H, PENG S L. Wavelet-domain HMT-based image super-resolution [C] // IEEE International Conference on Image Processing, 2003: II953 - II956.
- [4] DONG HIM WOO, IL KYN EOM, YOO SHIN KIM. Image interpolation based on interscale dependency in wavelet domain [C] // IEEE International Conference on Image

Processing, 2004: 1687 - 1690.

- [5] ROMBERG J K, HYEOKHO CHOI, BARANIUK R G. Bayesian tree-structured image modeling using wavelet-domain hidden Markov models [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(7): 1056 - 1068.
- [6] RICHARD A REDNER, HOMER F WALKER. Mixture densities, maximum likelihood and the EM algorithm [J]. SIAM Review, 1984, 26(2): 195 - 239.
- [7] 浦利, 刘玉树, 金伟其. 基于非均衡系数小波变换的插值算法研究 [J]. 南京理工大学学报: 自然科学版, 2007, 3: 323 - 326.
- [8] 龙兴明, 周静. 基于 EM 算法的图像小波系数统计研究 [J]. 计算机仿真, 2005, 22(6): 71 - 74.
- [9] ELAD M, FEUER A. Restoration of a single superresolution image from several blurred, noisy, and undersampled measured images [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1997, 6(12): 1646 - 1658.
- [10] DONOHO D L, JOHNSTONE I M. Ideal spatial adaptation by wavelet shrinkage [J]. Biometrika, 1994, 81(3): 425 - 455.

(上接第 54 页)

### 参考文献:

- [1] 李忠. 拟共形映射及其在黎曼曲面论中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 1988.
- [2] DOUADY A, EARLE C J. Conformally natural extension of homeomorphisms of the circle [J]. Acta Mathematica, 1986, 157(1): 23 - 48.
- [3] EARLE C, MARKOVIC V, SARIC D. Barycentric extension and the Bers embedding for asymptotic Teichmüller space [J]. Contemporary Math, 2002, 311: 87 - 105.
- [4] LI S L, LIU L X, SU W X. A family of conformally natural extensions of homeomorphisms of the circle [J]. Complex Variables and Elliptic Equations, 2008, 53(5): 435

- 443.

- [5] FOTIADIS A. Harmonic extensions of symmetric maps [J]. Calc Var, 2009, 35: 271 - 278.
- [6] ABIKOFF W, EARLE C, MITRA S. Barycentric extensions of monotone maps of the circle [J]. In the tradition of Ahlfors and Bers, III, Contemporary Math, 2004, 355: 1 - 20.
- [7] ABIKOFF W. Conformal barycenters and the Douady-Earle extension | a discrete dynamical approach [J]. Anal Math, 2002, 86: 221 - 234.
- [8] YAO G W. Harmonic maps and asymptotic Teichmüller space [J]. Manuscripta Math, 2007, 122: 375 - 389.